УДК 517.946.9

О. Б. Кобильська, канд. фіз.-мат. наук

Кременчуцький національний університет
імені Михайла Остроградського, м. Кременчук

ОБЕРНЕНА НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА З УМОВОЮ ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

У статті, із залученням нелокальної інтегральної умови, розв'язуються обернені задачі для рівняння теплопровідності. Визначаються параметри керування температурним полем рухомого середовища, приводяться результати чисельних експериментів. Побудовані графіки температурних розподілів та розподілів значень параметрів.

Ключові слова: *рівняння теплопровідності, інтегральна умова, обернена задача.*

Загальна постановка задачі та її актуальність. Як було показано в [1], нелокальні задачі більш точно відображають реальні температурні розподіли усередині зони нагрівання рухомого середовища. Тому для визначення параметрів керування температурним полем доцільно застосовувати не розв'язки крайових, а розв'язки нелокальних задач для рівняння теплопровідності. У якості додаткової умови при розв'язанні оберненої задачі теплопровідності в такому випадку береться інтегральна умова, що визначає баланс енергії зони нагрівання, для $v(t) > 0$:

$$\int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_{0+}^{r_0}\int\limits_{0}^{l} \frac{I(t)^2 \rho_{_0} l + \beta I(t)^2 \rho_{_0} l T(r,z,t)}{v(t) r_0^4 \pi^2} dzdrdt =$$
$$= c\rho_n \int\limits_{0+}^{t} \iint\limits_{G} (T(r,z,t) - T_0) dg dt + r_{_0} \alpha l \int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_{0}^{r_0}\int\limits_{0}^{l} \frac{T(r,z,t) - T_c}{v(t)} dzdrdt. \quad (1)$$

Питання існування розв'язку нелокальної задачі розглядалось в [1].

Аналіз публікацій за темою. Розв'язок оберненої задачі для рівняння теплопровідності із залученням інтегральної умови було розглянуто у роботі [2]. Тут розглядалася задача знаходження сталого параметра керування квазістаціонарним температурним полем ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$), який є коефіцієнтом функції джерела тепла у рівнянні теплопровідності. Пошук сталого значення параметра керування, якщо відомий температурний розподіл, не викликає суттєвих труднощів. Коли швидкість руху дроту через зону нагрівання змінна, а температура у її кінці повинна бути сталою необхідно, щоб параметр керування, в даному випадку сила струму $I(t)$ повинна бути змінною величиною. Обернена задача по знаходженню невідомого коефіцієнта для параболічного рівняння з умовою інтегрального перевизначення розглянута у роботах [3; 4]. У цих роботах застосовано інтегральне перетворення за часом і досліджується питання існування розв’язку оберненої задачі.

Метою цієї роботи є розв’язок оберненої нелокальної задачі з інтегрального умовою.

Матеріали і результати дослідження. Математична модель температурного поля ізотропного осесиметричного середовища зі сталими теплофізичними характеристиками розглядається у вигляді крайової задачі (функція $I(t)$ є невідомою) для нестаціонарного рівняння теплопровідності в області

$$Q_{1t} = \left\{(z;r;t)\middle| 0 < z < l, 0 < r < r_0, 0 < t \le t_0\right\}$$

$$\lambda \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - v(t)c\rho_n \frac{\partial T}{\partial z} - c\rho_n \frac{\partial T}{\partial t} = -W(t,T)\,, \tag{2}$$

$$T(r,z,0) = T_0\,, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0} = 0, \lambda \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_0} = -\alpha(T - T_c) - \varepsilon\sigma(T^4 - T_c^4)\,, \tag{4}$$

$$T(r,0,t) = T_0\ , T(r,l,t) = T_l\ . \tag{5}$$

Якщо замість однієї із крайових умов (5) ввести інтегральну умову (1), то з’являється можливість керувати температурним полем у будь-якій точці рухомої області.

Керування температурним полем може відбуватися за допомогою будь-якого параметра, що відображений у рівнянні або у крайовій умові. Зокрема, це може бути сила струму при нагріванні області внутрішніми джерелами тепла. Параметр керування може бути як сталою, так і змінною величиною, наприклад, функцією часу.

При застосуванні умови (1) вважаємо, що температурний розподіл $T(r,z,t)$ відомий, тому підставивши його можемо визначити будь-який параметр керування температурним полем. Нев’язка рівності (1) використовується для уточнення значення параметра I_0 на кожному часовому кроці. Отже, питання полягає у знаходженні будь — якої функції $T(r,z,t)$, що відображена у математичній моделі.

У випадку термічно тонкого середовища перейшовши до усередненої інтегральної температури[1; 6]. будемо мати задачу в області $Q_{2t} = \left\{(z;t)\middle| 0 < z < l, 0 < t \le t_0\right\}$

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v(t)c\rho_n \frac{\partial u}{\partial z} - c\rho_n \frac{\partial u}{\partial t} = F_1(u,t)\,, \tag{6}$$

$$u(z,0) = T_0\,, \tag{7}$$

$$u(0,t) = T_0\,,\ u(l,t) = T_l\,, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_{0}^{l}\frac{I(t)^2\rho_0 l + \beta I(t)^2\rho_0 u(z,t)l}{r_0^4\pi^2 v(t)}dzdt = \\ = c\rho_n\int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_{0}^{l}(u(z,t)-T_0)dzdt + r_0\alpha l\int\limits_{0+}^{t_0}\int\limits_{0}^{l}\frac{u(z,t)-T_c}{v(t)}dzdt,\end{gathered} \tag{9}$$

де

$$F_1(u,t) = -\left(\frac{I(t)^2\rho_0}{\pi^2 r_0^4} + \frac{2\alpha T_c}{r_0} + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0}(T_c^4 - u^4) + \left(\frac{I(t)^2\rho_0\beta}{\pi^2 r_0^4} - \frac{2\alpha}{r_0}\right)u\right).$$

Для розв'язання оберненої задачі теплопровідності використовуємо пошуковий метод, що базується на пошуку температурної функції, яка задовольняє рівнянню (6), граничним умовам (8) і початковій умові (7). Умова (9) задовольняється в усіх точках області $Q_{2t} = \left\{(z;t)\big|\,0 < z < l, 0 < t \le t_0\right\}$. Значення невідомої функції часу $I(t)$ (параметру керування) знаходиться на дискретній множині t_j, $j = 1...n$ точок у вигляді I_j. За допомогою інтерполяції сплайнами отримуємо функцію $I(t)$, що дозволяє підтримувати необхідний температурний режим. Керування I_j проводиться згідно з вимогою мінімізації відхилень в рівності (9) після підстановки у неї отриманої модельної температурної функції, що задовольняє (6)—(8).

Процес знаходження параметра керування $I(t)$ розпочинається із апріорного задання початкового наближення функції $I(t)$ — сталого значення I_0, задання якого достатньо для того, щоб задача (6)—(8) стала прямою задачею теплопровідності [7, c. 154].

Його знайдемо, поклавши в (6) $\lambda = 0$, $\sigma = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$.

Це приводить до розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{du}{dz} - \left(\frac{2}{r_0 v c\rho_n}\alpha + \frac{\beta\rho_0 I^2}{\pi^2 r_0{}^4 v c\rho_n}\right)u = \frac{\rho_0 I^2}{\pi^2 r_0{}^4 v c\rho_n} - \frac{2}{r_0 v c\rho_n}\alpha T_c\,,\ 0 < z < l\,, \tag{10}$$

$$u(0) = T_0\,. \tag{11}$$

Її розв'язок можна записати у вигляді

$$u(z) = \frac{\chi_1}{\theta_1} + \left(T_0 - \frac{\chi_1}{\theta_1}\right)e^{\theta_1 z}\,. \tag{12}$$

З нього визначаємо значення I_0 .

Більш точне наближення I_0 можна отримати, прийнявши в (6) $\lambda = 0$, $\sigma \neq 0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

За таких припущень розв'язок задачі (10)—(11) шукаємо методом предиктор-коректор.

Введемо на відрізку $0 \le t \le t_0$ рівномірну сітку $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1...\}$. Уведемо позначення сіткової функції $u_n = u(t_n)$ і використовуємо наступний алгоритм

$$\overline{u}_n = u_n + \frac{\tau}{2} f(t_n, u_n), \overline{u}_{n+1} = u_n + \tau f(t_n + \frac{\tau}{2}, \overline{u}_n), \tag{13}$$

$$u_0 = T_0, \tag{14}$$

де

$$f(u,t) = \left(\frac{2}{r_0 v c \rho_n} \alpha + \frac{\beta \rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4 v c \rho_n} \right) u -$$

$$- \frac{\rho_0 I^2}{\pi^2 r_0^4 v c \rho_n} + \frac{2}{r_0 v c \rho_n} \alpha T_c + \frac{2\varepsilon\sigma}{r_0} (T_c^4 - u^4).$$

Далі розв'язуємо задачу (6)—(8) при апріорно заданому, знайденому із (12) значенні параметра I_0 . Розв'язок задачі (6)—(8), для відомого значення I_0 , є коректно поставленою прямою задачею теплопровідності.

Для розв'язання задачі (6)—(8) застосуємо метод Роте та проводимо дискретизацію рівняння та граничних умов.

Уведемо на відрізку $0 \le t \le t_0$ рівномірну за часом сітку $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0,1...\}$ та замінимо оператор диференціювання за часовою змінною різницевим співвідношенням $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(z,t_j) - u(z,t_{j-1})}{\tau} + O(\tau)$. Тоді на кожному часовому шарі отримуємо напівдискретний аналог задачі (6)—(8) у вигляді послідовності диференціально-різницевих рівнянь для $0 \le z \le l,\ j = 1,2....$

$$\lambda \frac{d^2 u^j}{dz^2} - v c \rho_n \frac{du^j}{dz} - c \rho_n u^j \tau^{-1} = -c \rho_n u^{j-1} \tau^{-1} - F_1(u^{j-1}, t_{j-1}) \tag{15}$$

$$u^0 = T_0, \tag{16}$$

$$u^j(0) = T_0,\ u^j(l) = T_l. \tag{17}$$

Цей метод є зручним, оскільки на кожному часовому шарі маємо температурний розподіл якому відповідає дискретне значення I_j. Задачу (15)—(17) розв'язуємо на кожному кроці окремо шляхом застосування методу ітерацій.

На першому кроці, підставляємо знайдене із (12) значення I_0, отримаємо температурний розподіл, що відповідає моменту часу $j = 0$,а потім переходимо на другий часовий шар і т.д.

Оскільки функція розподілу температур розглядається у кожний момент часу окремо, то умова (9) прийме дискретний вигляд

$$\int_0^l \frac{I_j^2 \rho_0 l + \beta I_j^2 \rho_0 l u^j(z)}{v_j r_0^4 \pi^2} dz = c\rho_n \int_0^l (u^j(z) - T_0) dz + r_0 \alpha l \int_0^l \frac{u^j(z) - T_c}{v_j} dz. \quad (18)$$

При підстановці отриманого температурного розподілу у (18) отримуємо нев'язку $\eta_{j(k)}$ у k -му наближені.

Сукупність нев'язок отриманих для кожного часового шару j утворює вектор нев'язок $\overline{\mathrm{H}}$, усі компоненти якого повинні бути зведені до нуля у процесі розв'язку.

Пошук значень I_j, що забезпечує мінімальну нев'язку $\eta_{j(k)}$ реалізується наступним чином. Після отримання першого значення η_1 виконується невеликий пробний крок ΔI і знову знаходиться розв'язок прямої задачі (15)—(17), у результаті якого знаходиться приріст відповідної нев'язки $\Delta\eta_1$ і наближене значення похідної $\frac{\partial \eta_1}{\partial I_1} = \frac{\Delta \eta_1}{\Delta I_1}$. Далі робиться кілька робочих кроків уздовж параметра I_1 при фіксованих значеннях інших параметрів до тих пір, поки не буде задоволена умова $|\eta_1| \le \delta$, де δ — необхідна точність обчислень. Величина робочого кроку може бути визначена згідно формули

$$\Delta I_j = -\eta_j \frac{\partial I_j}{\partial \eta_j}.$$

Якщо для нев'язки η_j, яка відповідає параметру I_j умова $|\eta_j| \le \delta$ уже виконується, то вважаємо, що оптимальне значення функції $I(t)$ на j -му кроці знайдено. Отримавши вектор I_j, можна провести інтерполювання сплайном отриманої функції (рис. 1).

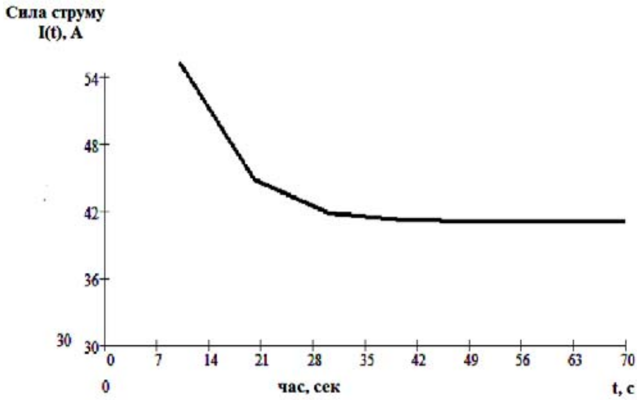

Рис. 1. *Функція* $I(t)$ *,знайдена за допомогою умови (9) із розв'язку задачі (1)—(6)*

На рис. 1 зображена функція $I(t)$, що дозволяє підтримувати задану температуру у кінці зони нагрівання. Для розрахунків були взяті значення теплофізичних характеристик для вольфраму. Функція $I(t)$ є розв'язком оберненої задачі (1)—(6).

Висновки. Запропоновано метод визначення параметрів керування нестаціонарним температурним полем у зоні нагрівання рухомого середовища внутрішніми джерелами тепла. Знайдено розв'язок оберненої задачі з нелокальною умовою для рівняння теплопровідності у циліндричній області. Шляхом уведення до математичної моделі теплового процесу, який протікає в рухомій циліндричній області, замість граничної умови, інтегральної умови визначено параметри керування температурним полем. Проведено чисельні експерименти та побудовано графіки залежності параметра керування температурним полем від часу для нестаціонарного процесу нагрівання [6].

Список використаних джерел:

1. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена / О. М. Алифанов. — М. : Машиностроение, 1988. — 280 с.
2. Ляшенко В. П. Квазистационарное температурное поле движущейся проволоки / В. П. Ляшенко. — К. : Изд-во Института математики АН УССР, 1981. — С. 36–39. (Препринт/ АН УССР, Институт математики; 1981 — № 82.3.)
3. Камынин В. Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения / В. Л. Камынин // Математические заметки. — 2005. — Т. 77, вып. 4 — С. 522–534.
4. Царькова Н. В. Обратная задача для уравнения колебаний струны с интегральным условием переопределения / Н. В. Царькова // Труды третьей Все-

российской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». — Самара : Изд-во СамГТУ, 2006. — Часть 3. — С. 221–223.
5. Кобильська О. Б. Дослідження нелокальної задачі для рівняння параболічного типу з інтегральною умовою / О. Б. Кобильська // Сучасні проблеми машинобудування: тези доповідей конференції молодих вчених та спеціалістів, Харків, 8–11 листопада 2010 р. — Харків : Інститут проблем машинобудування ім. А. М. Підгорного НАН України, 2010. — С. 32.
6. Ляшенко В. П. Дослідження нелокальної задачі з інтегральною умовою / В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська // Вісник Київського університету. Серія «Фізико-математичні науки». — 2010. — № 4. — С. 104–111.
7. Никитенко Н. И. Теория тепломассопереноса / Н. И. Никитенко. — К. : Наукова думка, 1983. — 352 с.

In this study involving nonlocal integral conditions resolved inverse problem for the equation-thermal conductivity of the Hall. Calculated parameters control the temperature field moving environment, the results of numericaltion experiments. Plotting temperature distribution diliv and distribution parameters.

Key words: *heat equation, integral condition inverse problem.*

Отримано: 9.04.2012

УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В ОБМЕЖЕНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЯХ

Методом функції впливу та функцій Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру гіперболічних крайових задач в обмежених кусково-однорідних (багатошарових) просторових областях. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є на декартових осі та півосі, а також інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті з n точками спряження.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуаль-

