УДК 519.85

О. О. Ємець, д-р фіз.-мат. наук,
Є. М. Ємець, канд. фіз.-мат. наук,
Ю. Ф. Олексійчук, старший викладач

Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава

ЖАДІБНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ В МЕРЕЖІ

У статті розглядається комбінаторна задача знаходження максимального потоку в мережі, яка зводиться до задачі евклідової комбінаторної задачі на розміщеннях. Запропоновано наближений алгоритм для її розв'язання, визначена поліноміальна оцінка його складності.

Ключові слова: *максимальний потік, комбінаторна оптимізація, розміщення, жадібний алгоритм.*

Вступ

Задача знаходження максимального потоку широко досліджена [1—7] та відомі поліноміальні методи для її розв'язання, зокрема, методи Форда і Фалкерсона [1], Едмондса і Карпа [4], Дініца [5], Карзанова [6] та ін. Задача, що розглядається, є узагальненням задачі знаходження максимального потоку. Комбінаторну задачу знаходження максимального потоку можна звести [8] до евклідової комбінаторної задачі оптимізації на розміщеннях [9—11], для розв'язання якої відомі неполіноміальні алгоритми. Тому побудова наближених поліноміальних методів є актуальною.

У статті розглядається жадібний метод розв'язання комбінаторної задачі знаходження максимального потоку в мережі і аналізується його складність.

1. Постановка задачі

Нехай дано зв'язний орієнтований граф $\Gamma = (V, U)$, де V — множина вершин, U — множина дуг. Дугу, що сполучає вершина v_i і v_j, позначимо u_{ij}; $v_i, v_j \in V$.

Означення 1. Транспортною мережею називають орієнтований граф $\Gamma = (V, U)$, в якому кожній із дуг u_{ij} привласнене невід'ємне число $b_{ij} \ge 0$, яке називають пропускною спроможністю дуги. Хоча б одна із вершин має лише вихідні дуги. Таку вершину називають джерелом и позначають v_s. Також є принаймні одна вершина, що має лише вхідні дуги. Її називають стоком і позначають v_t.

Далі будемо розглядати транспортні мережі з одним джерелом і одним стоком. Будемо вважати, що кожна дуга u_{ij} в протилежному напрямку має пропускну спроможність $b_{ji} = 0$.

Означення 2. [7] Потоком називають функцію $w: U \to R$ з такими властивостями для будь-якої дуги u_{ij}:

1. Значення функції w на дузі u_{ij} не може перевищувати пропускну здатність дуги, тобто $w(u_{ij}) \le b_{ij}$.
2. Збереження балансу у всіх вершинах, крім стоку и джерела, тобто $\sum_{u_{iz} \in U} w(u_{iz}) = \sum_{u_{zj} \in U} w(u_{zj})$ $\forall v_z, v_i, v_j \in V$, $v_z \ne v_s$, $v_z \ne v_t$.

Означення 3. Величиною потоку $|w|$ будемо називати суму значень функції w по дугах, що виходять із джерела: $|w| = \sum_{u_{si} \in U} w(u_{si})$, де $v_i \in V$.

Величина потоку $|w|$ також дорівнює сумі значень функції w по дугах, що входять в стік.

Задача знаходження максимального потоку формулюється так: знайти потік w, для якого величина потоку $|w|$ є максимальною.

Означення 4. Залишковою пропускною спроможністю ребра u_{ij} називають величину $h_{ij} = b_{ij} - w(u_{ij})$.

Якщо в транспортній мережі замінити пропускні спроможності на залишкові пропускні спроможності, то отримаємо мережу, яку назвемо залишковою.

Потоком на дузі u_{ij} будемо називати величину $w(u_{ij})$.

Введемо додаткові обмеження на потік. Нехай потік по дугах $u_{ij} \in U_c \subseteq U$, може приймати значення, які не перевищують число $x_{ij} = g_l \in G$, тобто $w(u_{ij}) \le x_{ij}$, де мультимножина $G = \{g_1, g_2, ..., g_\eta\}$; причому вектор із чисел x_{ij} є розміщенням елементів із G [9—11], тобто $x = (x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, ..., x_{i_k j_k}) \in E_{\eta n}^k(G)$, де $E_{\eta n}^k(G)$ — множина розміщень, $k = |U_c|$, n — кількість різних в G елементів.

Назвемо задачу знаходження максимального потоку з додатковими комбінаторними обмеженнями комбінаторною задачею знаходження максимального потоку.

2. Математична модель

Розглянемо математичну модель задачі. Нехай потік по дузі u_{ij}, рівний y_{ij}, тобто $y_{ij} = w\left(u_{ij}\right)$.

Задача полягає у відшуканні максимального значення функції $f\left(y\right)$ і відповідних значень x_{ij}, y_{ij}:

$$f\left(y\right) = \sum_{u_{jt} \in U} y_{jt} \to \max , \tag{1}$$

при виконанні наступних умов:

- збереження балансу у вершинах

$$\sum_{u_{iz} \in U} y_{iz} = \sum_{u_{zj} \in U} y_{zj} \ , \ \forall z \ , \ z \neq t \ , \ z \neq s \ , \tag{2}$$

- обмеження на пропускну здатність дуг

$$0 \leq y_{ij} \leq b_{ij} \quad \forall i \forall j \ , \ u_{ij} \in U \ , \tag{3}$$

- додаткові комбінаторні обмеження

$$y_{ij} \leq x_{ij} \quad \forall i \forall j \ , \ u_{ij} \in U_c \, , \tag{4}$$

$$x = \left(x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, \ldots, x_{i_k j_k}\right) \in E_{\eta n}^{k}\left(G\right). \tag{5}$$

Задача (1)—(5) є частковим випадком задачі евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях.

Розробці методів розв'язання задач комбінаторної оптимізації, дослідженню властивостей опуклих оболонок комбінаторних множин присвячено багато робіт (див., зокрема, [9—12]). Методи розв'язання комбінаторних задач на розміщеннях з додатковими обмеженнями запропоновані, наприклад, в [11] і [12]; всі вони є неполіноміальними.

Зазначимо, що комбінаторну задачу знаходження максимального потоку в мережі можна звести до задачі евклідової комбінаторної оптимізації на переставленнях. Для цього достатньо побудувати нову мультимножину, взявши k найбільших елементів мультимножини G, де k — кількість дуг, на які накладені комбінаторні обмеження.

У [8] розглядається метод розв'язання задачі (1)—(5). Але враховуючи неполіноміальність методу, актуальною є розробка наближених методів розв'язання задачі.

3. Жадібний метод

Розглянемо метод, який дозволяє знайти наближений розв'язок поставленої задачі. В методі використовуються ідеї Едмондса і Карпа [4] для знаходження максимального потоку. На кожному етапі максимально насичується найкоротший шлях, тому метод названий «жадібним».

Крок 0. Покладаємо потік рівним нулю. Розширимо мультимножину G, додавши k нулів, де k — кількість дуг, на які накладені додаткові комбінаторні обмеження. Для всіх дуг покладаємо $x_{ij} = 0$, і будемо вважати всі ненульові елементи мультимножини G невикористаними. Залишкова мережа на початковому етапі збігається з початковою мережею.

Крок 1. Знаходимо в залишковій мережі, не враховуючи додаткових комбінаторних обмежень, найкоротший шлях із джерела в стік з максимальною пропускною здатністю, використовуючи модифікований пошук у ширину. Нехай шлях складається із p дуг і має пропускну здатність рівну b. (Під пропускною здатністю шляху розуміємо мінімальну пропускну здатність серед дуг цього шляху). Якщо такого шляху немає — зупинка алгоритму.

Крок 2. Переберемо всі дуги знайденого шляху у порядку спадання пропускних спроможностей b_{ij}. Привласнимо всім x_{ij}, для яких $x_{ij} < b + y_{ij}$, мінімальні значення із мультимножини G, які незайняті і перевищують $b + y_{ij}$, де y_{ij} — поточне значення потоку по дузі u_{ij}. Якщо такого елемента немає, беремо найбільший елемент із G. Будемо вважати ці елементи мультимножини зайнятими, а попередні значення x_{ij} — незайнятими.

Крок 3. Пускаємо через знайдений шлях максимально можливий потік (враховуючи комбінаторні обмеження).

Крок 4. Модифікуємо залишкову мережу. Змінюємо пропускні здатності і видаляємо дуги, для яких виконується хоча б одна умова:

а) $y_{ij} = b_{ij}$;

б) $y_{ij} = x_{ij}$ і в G немає вільних елементів, що перевищують x_{ij}.

При цьому, якщо умови а) і б) більше не виконуються для деякої раніше видаленої дуги — повертаємо її в залишкову мережу.

Переходимо на крок 1.

Модифікований пошук в ширину дозволяє знайти найкоротший шлях з джерела до стоку. Якщо таких шляхів кілька — метод дозволяє знайти серед них шлях з найбільшою пропускною здатністю.

Для кожної вершини v_i потрібно задати такі поля:

1) стан вершини, можливі значення: не помічена, помічена, переглянута;
2) предок — інша вершина графа;

3) відстань від джерела d_i;
4) потенційний потік p_i.

Модифікований пошук в ширину.

Крок 0. Джерело вважаємо поміченим, $p_s = \infty$, $d_s = 0$. Всі інші вершини — не поміченими, $p_i = 0$, $\forall i$, $i \neq s$. Створюємо чергу із помічених вершин.

Крок 1. Якщо черга порожня — шляху не існує, зупинка алгоритму, інакше — вважаємо першу вершину черги v_c переглянутою і видаляємо її із черги.

Крок 2. Розглядаємо всі дуги u_{ci}, що виходять з вершини v_c, і перебираємо вершини v_i, які або містяться в черзі і $d_i > d_c$, або є непоміченими. Якщо $p_i < \min\left(p_c, b_{ci}\right)$, то $p_i = \min\left(p_c, b_{ci}\right)$, предком вершини v_i стає вершина v_c, $d_i = d_c + 1$ та, якщо вершина непомічена, помічаємо її та додаємо в кінець черги.

Крок 3. Якщо v_t міститься в черзі і $d_t = d_z$, де v_z — перша в черзі вершина, то зупинка алгоритму. (Зворотній до шуканого шлях можна отримати, почавши зі стоку і переходячи від вершини до її предка доки не досягнемо джерела). Інакше — перехід до кроку 1.

4. Оцінка складності жадібного методу

Нехай $|V|$ — кількість вершин графа, $|U|$ — кількість дуг.

Теорема 1. Час роботи модифікованого алгоритму пошуку в ширину $T\left(n\right) = O\left(|U| + |V|\right)$.

Доведення. Очевидно, що час виконання нульового кроку $O|V|$. В черзі ми переглядаємо не більше $|V|$ вершин, тобто цикл (кроки 1—3) виконується не більше $|V|$ разів. На кроці 2 ми розглядаємо не більше ніж K_c вершин, де K_c — число дуг, що виходять з вершини v_c. Оскільки $\sum_{c=1}^{|V|} K_c = |U|$, то час роботи алгоритму $T\left(n\right) = O\left(|U| + |V|\right)$.

Зауваження. Оскільки в роботі розглядаються зв'язні графи, то час роботи модифікованого алгоритму пошуку в ширину рівний $T\left(n\right) = O\left(|U|\right)$.

Теорема 2. Час роботи жадібного алгоритму розв'язання комбінаторної задачі знаходження максимального потоку $T\left(n\right) =$

$= O\left(|U| \cdot n \cdot |w^*|\right)$, де $|w^*|$ — шукана величина максимального потоку, n — кількість різних елементів у мультимножині G.

Доведення. Час виконання кроків 0, 1 та 3 можна оцінити як $O\left(|U|\right)$, кроків 2 і 4 — $O\left(n|U|\right)$. На кожній ітерації (кроки 1—4) величина потоку зростає. Тому Загальний час роботи алгоритму — $T(n) = O\left(|U| \cdot n \cdot |w^*|\right)$.

Висновки

У статті розглянута комбінаторна задача знаходження максимального потоку, запропонований наближений метод її розв'язання та зроблена оцінка часу роботи цього методу. В подальшому доцільно оцінити точність роботи алгоритму та провести обчислювальні експерименти.

Список використаних джерел:

1. Форд Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. — М. : Мир, 1966. — 277 с.
2. Ху Т. Ч. Комбинаторные алгоритмы / Т. Ч. Ху, М. Т. Шинг. — Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2004. — 330 с.
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. — М. : Мир, 1974. — 519 с.
4. Edmonds J. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network How Problems / J. Edmonds, R. M. Karp // J. ACM. — 1972. — Vol. 19, № 2. — P. 248–264.
5. Диниц Е. А. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой / Е. А. Диниц // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 194, № 4. — С. 754–757.
6. Карзанов А. А. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков / А. А. Карзанов // Докл. АН СССР. — 1974. — Т. 215, № 1. — С. 49–53.
7. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — 2-е издание. — М. : Изд. дом "Вильямс", 2005. — 1296 с.
8. Ємець О. О. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — №1. — С. 43–50.
9. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець — К. : ІСДО, 1993. — 188 с. — Режим доступу: http://informatics.org.ua/uploads/books/stoyan_emets_eko.pdf.
10. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи : монографія / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. — Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
11. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях : монография / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. — К. : Наукова думка, 2008. — 159 с. — Режим доступу: http://informatics.org.ua/uploads/books/ em_bar_monography.pdf.

12. Ємець О. О. Прямий метод відсікання для задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Вісник Запорізького національного університету : збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя : Запорізький національний університет, 2011. — №1. — С. 36–43.

The combinatorial problem of finding of the maximal flow in a network is considered in the paper. This problem is a Euclidean combinatorial problem on arrangements. The approximate algorithm for solution of this problem is proposed. The polynomial estimation of complexity of this algorithm found.

Key words: *maximum flow, combinatorial optimization, arrangements, greedy algorithm.*

Отримано: 05.06.2012

УДК 519.8(075)

Л. В. Іващенко, аспірант
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана», м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПІДКРІПЛЕННЯ БАНКОМАТІВ ГОТІВКОВИМИ КОШТАМИ

У статті розроблена математична модель управління залишком готівкових коштів у банкоматі з використанням теорії управління запасами та теорії масового обслуговування.

Ключові слова: *банкомат, стохастична модель, модель керування запасами Уілсона.*

Постановка проблеми. За оцінками фахівців, на сьогодні у світі налічується 2,3 млн. банкоматів, а до 2016 року їх кількість зросте до 3,2 млн. одиниць. Багато фінансових інститутів завантажують у банкомати на 40% більше готівки, ніж необхідно для їх ефективної роботи, а у структурі витрат на експлуатацію банкоматів від 35 до 60% припадають саме на витрати, пов'язані з готівкою, така політика управління готівковими коштами позбавляє банк значних фінансових ресурсів, які можна раціональніше використовувати у інших напрямках [1].

Отже, у сучасних умовах оптимізація потоків готівки, які спрямовуються на виплату клієнтам саме через банкомати є актуальною проблемою теорії і практики.

Аналіз останніх джерел чи публікацій. Проблематика дослідження у контексті визначення оптимального управління готівковими грошовими коштами висвітлювалася у публікаціях В. Соловйова, В. Ткалича, А. Кистанова, Н.Васіна, Д. В. Пастухова, В. Д. Іушиної та інших.

Постановка завдання. На сьогодні існують програмні продукти, які покликані вирішувати питання оптимізації управління готівко-

