Список використаних джерел:

1. Kolmogoroff A. N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownishen Bewegungen) / A. N. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1934. — Vol. 35. — P. 116–117.
2. Eidelman S. D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2004. — Vol. 152. — 390 p.
3. Малицька Г. П. Системи рівнянь типу Колмогорова / Г. П. Малицька // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, №12. — С. 1650–1663.
4. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.
5. Івасишен С. Д. Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом / С. Д. Івасишен, В. А. Літовченко // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №8. — С. 1066–1087.

We established the correct solvability of the Cauchy problem for degenerate model parabolic systems of Kolmogorov-type equations in the space of initial data, elements of which are generalized functions distribution L. Shvarts type.

Key words: *degenerate parabolic system, the Cauchy problem, correct solvability, fundamental and generalized functions.*

Отримано: 19.06.2012

УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук,
У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НЕОБХІДНІ, ДОСТАТНІ УМОВИ І КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції p рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень з використанням крайніх точок субдиференціалів функції p .

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні опуклої функції рівномірна апроксимація, крайні точки, субградієнт, критерії.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції p рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента з використанням крайніх точок субдиференціалів функції p, які узагальнюють на випадок вищеназваної задачі відповідні умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні норми рівномірної апроксимації компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень, встановлені у праці [1].

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність непорожніх компактів простору X, $C\big(S,K(X)\big)$ — множина багатозначних відображень a компакта S в X, таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=K_s\in K(X)$ і які неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$, $V\subset C(S,X)$, p — задана на X опукла неперервна функція.

Задачею найкращої у розумінні функції p рівномірної апроксимації відображення $a\in C\big(S,K(X)\big)$ множиною $V\subset C(S,X)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*(a) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\big(y-g(s)\big). \tag{1}$$

Елемент $g^*\in V$ такий, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\big(y-g^*(s)\big) = \alpha_V^*(a),$$

називається екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Як відомо, виникають задачі наближення, в яких міра відхилення між елементами лінійного нормованого простору оцінюється не за допомогою норми, а за допомогою деякої опуклої неперервної функції. Серед них, зокрема, задачі найкращого у розумінні переднорми, функції Мінковського, сублінійної функції, функції повільного зростання наближення та низка інших задач (див., наприклад, [2—5]).

Названі задачі є частковими випадками задачі відшукання величини (1). Результати загального характеру, отримані при дослідженні величини (1), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що вкладаються у схему постановки задачі відшукання цієї величини.

Мета роботи. Встановити необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для величини (1) з використанням крайніх точок субдиференціалів функції p.

Деякі означення та допоміжні твердження. Нехай далі X^* — простір, спряжений з X, X_R — дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором X, тобто простір X, розглядуваний лише над полем дійсних чисел, X_R^* — простір , спряжений з простором X_R.

Кожному $\varphi \in X_R^*$ будемо ставити у відповідність елемент $f \in X^*$ такий, що $\operatorname{Re} f = \varphi$.

Відомо (див., наприклад, [6, с. 269]), що тоді $f(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$, $x \in X$.

Будемо позначати через ED — множину крайніх точок множини D лінійного простору Y .

Твердження 1. Нехай M — слабко* компактна опукла множина простору X_R^*, EM - множина крайніх точок M ,

$$M_C = \left\{ f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in M \right\}.$$

Має місце рівність

$$EM_C = \left\{ f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in EM \right\}. \tag{2}$$

Доведення. Нехай $f \in EM_C$. Переконаємося, що $\operatorname{Re} f \in EM$. Припустимо супротивне. Тоді існують елементи $\varphi_1, \varphi_2 \in M$, $\alpha \in (0,1)$ такі, що $\operatorname{Re} f = (1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2$, причому $\varphi_1 \neq \varphi_2$.

Нехай $f_1(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix)$, $f_2(x) = \varphi_2(x) - i\varphi_2(ix)$, $x \in X$. Зрозуміло, що $f_1 \in M_C$, $f_2 \in M_C$, $f_1 \neq f_2$ і

$$f(x) = \left((1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2\right)(x) - i\left((1-\alpha)\varphi_1 + \alpha\varphi_2\right)(ix) =$$
$$= (1-\alpha) f_1(x) + \alpha f_2(x),\ x \in X .$$

Тобто $f = (1-\alpha) f_1 + \alpha f_2$, де $f_1 \neq f_2$, що суперечить співвідношенню $f \in EM_C$.

Одержана суперечність доводить, що коли $f \in EM_C$, то $\operatorname{Re} f \in EM$. Отже,

$$EM_C \subset \left\{ f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in EM \right\}. \tag{3}$$

Нехай тепер $f \in X^*$ і $\operatorname{Re} f \in EM$.

Переконаємося, що $f \in EM_C$. Припустимо супротивне. Тоді існують елементи $f_1, f_2 \in M_C$, $\alpha \in (0,1)$ такі, що $f = (1-\alpha) f_1 + \alpha f_2$, причому $f_1 \neq f_2$. Оскільки $f_1(x) = \operatorname{Re} f_1(x) - i \operatorname{Re} f_1(ix)$, $f_2(x) = = \operatorname{Re} f_2(x) - i \operatorname{Re} f_2(ix)$, $x \in X$, і $f_1 \neq f_2$, то $\operatorname{Re} f_1 \neq \operatorname{Re} f_2$. З рівності $f = (1-\alpha) f_1 + \alpha f_2$ випливає, що

$$\operatorname{Re} f = (1-\alpha) \operatorname{Re} f_1 + \alpha \operatorname{Re} f_2,$$

де $\operatorname{Re} f_1 \in M$, $\operatorname{Re} f_2 \in M$, $\operatorname{Re} f_1 \neq \operatorname{Re} f_2$.

Тому $\operatorname{Re} f \notin EM$, що суперечить припущенню. Одержана суперечність доводить, що $f \in EM_C$. Тому

$$\left\{ f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in EM \right\} \subset EM_C. \tag{4}$$

З (3), (4) випливає справедливість (2).

Твердження доведено.

Твердження 2. Якщо M — слабко* компактна опукла множина простору X_R^*, EM — множина крайніх точок M, $z \in X$, то

$$\max_{\varphi \in M} \varphi(z) = \max_{\varphi \in EM} \varphi(z). \tag{5}$$

Доведення. Оскільки M — слабко* компактна опукла множина простору X_R^*, то згідно з теоремою Крейна—Мільмана (див., наприклад, [7, с. 497]) $EM \neq \varnothing$. Внаслідок того, що функція $\varphi \in X_R^* \to \varphi(z)$ є неперервною по φ на X_R^* у слабкій* топології простору X_R^*, існує елемент $\tilde{\varphi} \in M$ такий, що $\max_{\varphi \in M} \varphi(z) = \tilde{\varphi}(z) = c$ (див., наприклад, [8, с. 28]).

Переконаємося, що множина $M_c = \left\{ \varphi : \varphi \in M, \varphi(z) = c \right\}$ є опуклою слабко* замкненою крайньою підмножиною множини M.

Опуклість M_c є очевидною. Той факт, що M_c є крайньою підмножиною множини M, випливає, зокрема, з теореми 8.3.1 [4, с. 401].

Нехай φ_0 — гранична точка M_c у розумінні слабкої* топології простору X^*. Внаслідок слабкої* компактності множини M $\varphi_0 \in M$.

Крім того, для довільного $\varepsilon > 0$ окіл

$$\left\{ \varphi : \varphi \in X_R^*, \left| \varphi(z) - \varphi_0(z) \right| < \varepsilon \right\}$$

точки φ_0 містить точки $\varphi_\varepsilon \in M_c$.

Для цих точок маємо $\left|\varphi_\varepsilon(z)-\varphi_0(z)\right|=\left|c-\varphi_0(z)\right|<\varepsilon$.

Звідси на підставі довільності $\varepsilon>0$ робимо висновок, що $\varphi_0(z)=c$. Отже, $\varphi_0\in M_c$. Слабку* замкненість M_c встановлено.

Оскільки M_c є слабко* замкненою підмножиною слабко* компактної множини M , то M_c також слабко* компактна множина.

Тоді M_c містить принаймні одну крайню точку φ' (див., наприклад, [7, с. 497]). Оскільки M_c є крайньою підмножиною множини M , то $\varphi'\in EM$ (див., наприклад, [4, с. 401]).

З урахуванням того, що $\varphi'(z)=c$, робимо висновок про справедливість рівності (5).

Твердження доведено.

Позначимо далі через $\Phi_a(g)=\max\limits_{s\in S}\max\limits_{y\in a(s)}p\big(y-g(s)\big)$, $g\in C(S,X)$, цільову функцію задачі відшукання величини (1).

Теорема 1 [9]. Для кожного $a\in C\big(S,K(X)\big)$ цільова функція $\Phi_a(g)$, $g\in C(S,X)$, задачі відшукання величини (1) є опуклою та неперервною на $C(S,X)$.

Елемент $\varphi\in X_R^*$ називається субградієнтом функції p в точці $x_0\in X$, якщо

$$p(x)-p(x_0)\ge\varphi(x-x_0),\ x\in X,$$

(див., наприклад, [10, с. 57]).

Множину субградієнтів функції p в точці $x_0\in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial p(x_0)$ (див., наприклад, [10, с. 58]).

Оскільки p є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0\in X$ $\partial p(x_0)$ є неперервною опуклою слабко* компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [4, с. 327]).

Для $g^*\in C(S,X)$ покладемо

$$S_a(g^*)=\left\{s:s\in S,\ \max_{y\in a(s)}p\big(y-g^*(s)\big)=\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)}p\big(y-g^*(s)\big)=\Phi_a(g^*)\right\},$$

а для $s\in S_a(g^*)$ покладемо

$$a\left(s,g^*\right)=\left\{y: y\in a(s),\, p\left(y-g^*(s)\right)=\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^*(s)\right)=\Phi_a\left(g^*\right)\right\}.$$

Через $\Phi_a^/\left(g^*,z\right)$ будемо позначати похідну функції Φ_a в точці g^* за напрямом $z\in C(S,X)$.

Теорема 2. Якщо $g^*,z\in C(S,X)$ і $\Phi_a^/\left(g^*,z\right)\geq 0$, то справедлива рівність

$$\Phi_a^/\left(g^*,z\right)=\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\max_{y\in a\left(s,g^*\right)}\max_{f\in E\partial p\left(y-g^*(s)\right)_C}\operatorname{Re} f\left(-z(s)\right). \qquad (6)$$

Доведення. Згідно з теоремою 2 [9]

$$\Phi_a^/\left(g^*,z\right)=\max_{s\in S_a\left(g^*\right)}\max_{y\in a\left(s,g^*\right)}\max_{\varphi\in\partial p\left(y-g^*(s)\right)}\varphi\left(-z(s)\right). \qquad (7)$$

Оскільки $\partial p(x)$ є слабко* компактною опуклою множиною простору X_R^* (див., наприклад, [4, с. 327]), то внаслідок твердження 2 для $s\in S_a\left(g^*\right)$, $y\in a\left(s,g^*\right)$

$$\max_{\varphi\in\partial p\left(y-g^*(s)\right)}\varphi\left(-z(s)\right)=\max_{\varphi\in E\partial p\left(y-g^*(s)\right)_C}\varphi\left(-z(s)\right), \qquad (8)$$

а згідно з твердженням 1

$$\max_{\varphi\in E\left(\partial p\left(y-g^*(s)\right)\right)}\varphi\left(-z(s)\right)=\max_{\varphi\in E\partial p\left(y-g^*(s)\right)_C}\operatorname{Re} f\left(-z(s)\right). \qquad (9)$$

З (7)—(9) випливає (6).

Теорему доведено.

Необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента

Будемо позначати далі через $\Gamma\left(M,y_0\right)$ — конус внутрішніх напрямків для множини M лінійного нормованого простору Y із точки $y_0\in Y$, а через $\Gamma^*\left(M,y_0\right)$ — конус граничних напрямків для M з точки y_0.

При цьому $y\in\Gamma\left(M,y_0\right)$, якщо існує окіл $O(y)$ точки y простору Y та число $\varepsilon>0$ такі, що $y_0+tz\in M$ для всіх $z\in O(y)$, $t\in(0,\varepsilon)$, а $y\in\Gamma^*\left(M,y_0\right)$, якщо для довільного околу $O(y)$ точки y простору Y та довільного числа $\varepsilon>0$ існують такі $z\in O(y)$ і $t\in(0,\varepsilon)$, що $y_0+tz\in M$ (див., наприклад, [4, с. 12, 13]).

Для $g^* \in V$ позначимо через

$$C_a\left(g^*\right) = \left\{g : g \in C\left(S, X\right), \Phi_a\left(g\right) < \Phi_a\left(g^*\right)\right\}.$$

Обмеження $g \in V$ у задачі відшукання величини (1) будемо називати суттєвим, якщо

$$\alpha^*_{C(S,X)}\left(a\right) < \alpha^*_V\left(a\right).$$

Зрозуміло, що у випадку суттєвості обмеження $g \in V$ у задачі відшукання величини (1) $C_a\left(g^*\right) \neq \varnothing$.

Теорема 3. Нехай V — довільна множина простору $C\left(S, X\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно, щоб не існувало такого $z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$, що $\operatorname{Re} f\left(z\left(s\right)\right) > 0$ для всіх $s \in S_a\left(g^*\right)$, $y \in a\left(s, g^*\right)$, $f \in E\partial p\left(y - g^*\left(s\right)\right)_C$.

Доведення. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (1). Тоді g^* є екстремальним елементом для задачі оптимізації

$$\inf_{g \in V} \Phi_a\left(g\right).$$

Якщо $C_a\left(g^*\right) = \varnothing$, то для всіх $g \in C\left(S, X\right)$ $\Phi_a\left(g\right) \geq \Phi_a\left(g^*\right)$. Тому для всіх $z \in C\left(S, X\right)$ $\Phi_a^{/}\left(g^*, z\right) \geq 0$. Згідно з теоремою 2 для будь-якого $z \in C\left(S, X\right)$, у тому числі і для будь-якого $z \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$, існують елементи $s_z \in S_a\left(g^*\right)$, $y_z \in a\left(s_z, g^*\right)$, $f_z \in E\partial p\left(y_z - g^*\left(s_z\right)\right)_C$ такі, що $\Phi_a^{/}\left(g^*, z\right) = \operatorname{Re} f_z\left(-z\left(s_z\right)\right) \geq 0$. Звідки випливає, що $\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right) \leq 0$.

В цьому випадку теорему доведено.

Припустимо тепер, що $C_a\left(g^*\right) \neq \varnothing$. Згідно з теоремою 1.4.1 [4, с. 22] має місце співвідношення

$$\Gamma\left(C_a\left(g^*\right), g^*\right) \cap \Gamma^*\left(V, g^*\right) = \varnothing. \tag{10}$$

Оскільки функція $\Phi_a\left(g\right)$, $g \in C\left(S, X\right)$, є опуклою та неперервною на $C\left(S, X\right)$ (див. теорему 1), то (див. твердження 6.9.1 [4, с. 352])

$$\Gamma\left(C_a\left(g^*\right),g^*\right)=\left\{z : z\in C\left(S,X\right),\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)<0\right\}. \qquad (11)$$

Із співвідношень (10), (11) випливає, що для кожного $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$ $\Phi_a^{/}\left(g^*,z\right)\geq 0$.

Внаслідок теореми 2 тоді для кожного $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$ існують $s_z\in S_a\left(g^*\right)$, $y_z\in a\left(s_z,g^*\right)$, $f_z\in E\partial p\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right)_C$ такі, що $\operatorname{Re} f_z\left(-z\left(s_z\right)\right)\geq$ ≥ 0 . Звідки випливає, що $\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right)\leq 0$.

Теорему доведено.

Теорему 3 можна сформулювати у таких еквівалентних формах.

Теорема 4. Нехай V — довільна множина простору $C\left(S,X\right)$. Для того щоб елемент $g^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно, щоб для будь-якого $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$ існували елементи $s_z\in S_a\left(g^*\right)$, $y_z\in a\left(s_z,g^*\right)$, $f_z\in E\partial p\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right)_C$ такі, що $\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right)\leq 0$.

Теорема 5. Нехай V — довільна множина простору $C\left(S,X\right)$. Для того щоб $g^*\in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно, щоб для будь-якого $z\in\Gamma^*\left(V,g^*\right)$ існували елементи $s_z\in S$, $y_z\in a\left(s_z\right)$, $f_z\in E\partial p\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right)_C$ такі, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^*\left(s\right)\right)=\max_{y\in a(s_z)} p\left(y-g^*\left(s_z\right)\right)=p\left(y_z-g^*\left(s_z\right)\right),$$

$$\operatorname{Re} f_z\left(z\left(s_z\right)\right)\leq 0 .$$

Врахування властивостей конуса $\Gamma^*\left(V,g^*\right)$, які зумовлені специфікою множини V , дозволяє в окремих випадках дещо конкретизувати встановлені вище необхідні умови екстремальності елемента для величини (1).

Теорема 6. Нехай $V=\bigcup\limits_{i\in I}V_i$, де V_i , $i\in I$, — сім'я опуклих множин простору $C\left(S,X\right)$, $g^*\in V$, $\overline{V_i}$ — замикання множини V_i , $i\in I$, $V_{g^*}=\bigcup\limits_{i\in I,g^*\in\overline{V}_i}V_i$.

Якщо g^* є екстремальним елементом для величини (1), то для будь-якого $g \in V_{g^*}$ існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in E\partial p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)_C$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \leq 0$.

Доведення. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1). Згідно з твердженням 1.2.3 [4, с. 15]

$$\Gamma^*\left(V, g^*\right) \supset \bigcup_{i \in I} \Gamma^*\left(V_i, g^*\right) = \bigcup_{\substack{i \in I, \\ g^* \in \overline{V}_i}} \Gamma^*\left(V_i, g^*\right). \tag{12}$$

Нехай, крім того, $g \in V_{g*}$.Тоді існує індекс $i_g \in I$ такий, що $g^* \in \overline{V}_{i_g}$ та $g \in V_{i_g}$. Оскільки V_{i_g} є опуклою множиною, то внаслідок теореми 1.3.4 [4, с. 19] $g - g^* \in \Gamma^*\left(V_{i_g}, g^*\right)$. Звідси та з (12) робимо висновок, що $g - g^* \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$. Згідно з теоремою 3 існують елементи $s_g \in S$, $y_g \in a\left(s_g\right)$, $f_g \in E\partial p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)_C$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \leq 0$.

Теорему доведено.

Сформулюємо далі достатню умову того, що g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорема 7. Нехай V — довільна множина простору $C(S, X)$, $g^* \in V$. Якщо для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in E\partial p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)_C$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \leq 0$, то g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорема 7 має місце для довільної множини V. Становлять інтерес множини, для яких сформульована в ній умова є не лише достатньою, а й необхідною умовою екстремальності елемента для величини (1).

Множину M лінійного нормованого простору Y будемо називати Γ^* — множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо $y - y_0 \in \Gamma^*\left(M, y_0\right)$ для всіх $y \in M$.

До Γ^* — множин відносно точки $y_0 \in M$ відносяться, зокрема, зіркові відносно y_0 (див, наприклад, [11, с. 16]), в тому числі опуклі, множини.

Теорема 8. Нехай V є Γ^* — множиною відносно $g^* \in V$ (зірковою відносно $g^* \in V$ або опуклою множиною). Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in E\partial p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)_C$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \le 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай g^* є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки V є Γ^* — множиною відносно g^* (зірковою відносно g^* або опуклою множиною), то $z = g - g^* \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$. Тоді згідно з теоремою 4 існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in E\partial p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)_C$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \le 0$.

Достатність умов теореми встановлено у теоремі 7.

Наслідок. Нехай V — підпростір простору $C\left(S, X\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in E\partial p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)_C$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \le 0 . \tag{13}$$

Доведення. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1). Для елемента $g \in V$ маємо, що $g^* + g \in V$. Тоді згідно з теоремою 8 існують елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in E\partial p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)_C$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(\left(g + g^*\right)\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) = \operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \le 0 .$$

Навпаки, нехай для будь-якого елемента $g \in V$ мають місце умови наслідку.

Візьмемо $g \in V$ і покладемо в (13) замість g елемент $g - g^* \in V$.

Тоді одержимо

$$\operatorname{Re} f_g \left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right) \right) \le 0 .$$

Внаслідок теореми 7 g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Наслідок доведено.

Висновки. Встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції рівномірної апроксимації компактнозначного відображення.

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 12. — С. 1601–1619.
2. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 4, №5. — С. 608–613.
3. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. — Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1968. — 178 с.
4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
5. Бейко И. В. Обобщенная $L-$проблема моментов и метод ее решения / И. В. Бейко , В. А. Гнатюк, В. В. Мойко // Укр. мат. журн. — 1978. — Т. 30, № 2. — С. 147–154.
6. Кадец В. М. Курс функционального анализа : учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В. М. Кадец. — Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. — 607 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. —624 с.
8. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 742 с.
9. Гудима У. В. Умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень / У. В. Гудима, Ю. В. Гнатюк // Теорія наближення функцій та суміжні питання : [зб. наук. пр. Інституту математики НАН України]. — К. : Інститут математики НАН України, 2011. — Т. 8, №1. — С.75–88.
10. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
11. Лейтхвейс К. Выпуклые множества / К. Лейтхвейс. — М. : Наука, 1985. — 335 с.

In this article criterions of the extremal element for the problem of the best at sense of the convex function uniform approximation of continuous compact-valued maps by continuous single-valued maps with the use of extreme points of subdifferentials of function are established.

Key words: *the compact-valued maps, the best in sense of the convex function uniform approximation, the extreme point, subdifferentials.*

Отримано: 13.06.2012

УДК 539.3

Н. А. Гук, д-р физ.-мат. наук

Днепропетровский национальный университет
имени Олеся Гончара, г. Днепропетровск

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СВОЙСТВ ОСНОВАНИЙ СООРУЖЕНИЙ МЕТОДОМ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

Рассматривается задача определения неоднородных свойств основания по результатам косвенных наблюдений. Для описания поведения грунта используется модель Винклера. Вектор неизвестных коэффициентов жесткостей пружин определяется из решения обратной задачи, сформулированной в вариационной постановке. Приводятся результаты восстановления вектора жесткостей для различных случаев местоположения неоднородностей основания.

Ключевые слова: *обратная задача, пластина, основание, модель Винклера, коэффициент жесткости пружины.*

Введение. Использование высокотехнологичного и дорогостоящего оборудования в технике выдвигает требование обеспечения высокой точности установки этого оборудования. Поэтому проектирование несущих конструкций должно выполняться с учетом свойств оборудования, которое на них опирается. В качестве несущих конструкций обычно выступают пластины, плиты, оболочки, опирающиеся на упругое основание, в роли которого может выступать грунт или специальные ложементы, состоящие из пружин, возможно различной жесткости. Решение задачи об определении жесткости основания или его структуры, необходимой для реализации требований к установке оборудования, является весьма актуальным при проектировании таких сооружений как энергетические комплексы, газонефтетранспортные системы, транспортные системы в ракетостроении и т.д.

В случае, когда необходимо определять напряженно-деформированное состояние грунта, для описания его поведения используются различные модели деформирования [1—3]: модель линейно-дефор-