14. Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. — Рівне : НУВГП, 2005. — 163 с.

The mathematical model which describes laws of filtering and accumulation of impurity in porous attachment taking into account return influence of characteristics of process (concentration of a deposit) on characteristics of environment (diffusion factors, mass exchange) is constructed and includes possibility of definition unknown mass exchange factor. The algorithm of the decision of the corresponding indignant problem which, in particular, provides possibility of definition of time of protective action of the filter is offered. Results of calculations of distribution of specific concentration and mass volume of impurity (on length filtering porous attachment) for the different moments of time are resulted.

Key words: *a nonlinear problem, filtering, a return problem, singular indignations, asymptotic, identification of unknown parameter.*

Отримано: 19.04.2012

УДК 517.956.4

О. Б. Васько, асистент

Буковинський державний фінансово-економічний університет, м. Чернівці

КОРЕКТНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПРОСТІШОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Для вироджених модельних параболічних систем рівнянь типу Колмогорова встановлено коректну розв'язність задачі Коші у просторах початкових даних, елементами яких є узагальнені функції типу розподілів Л. Шварца.

Ключові слова: *вироджені параболічні системи, задача Коші, коректна розв'язність, основні та узагальнені функції.*

Вступ. При математичному моделюванні броунівського руху фізичної системи А. М. Колмогоров прийшов до рівняння, яке у простішому випадку має вигляд [1]

$$\left(\partial_t - x_1\partial_{x_2}\right)u(t;x) = a^2\partial_{x_1}^2 u(t;x),\ \ x=(x_1;x_2),\ \ (t;x)\in\left(0;T\right]\times\mathbb{R}^2 .$$

Це рівняння є виродженим стосовно змінної x_2 з параболічною за Петровським диференціальною частиною $\partial_t - a^2\partial_{x_1}^2$. Воно має важливе значення при дослідженні теплових і дифузійних процесів з інерцією в однорідних середовищах. Відтак, наведене вище рівняння багаторазово узагальнювалось і досліджувалось різними авторами (див. [2]). Системи ж рівнянь типу Колмогорова першою розпочала досліджувати Г. П. Малицька [3]. Вона, для простішого випадку систем, побудувала фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) та дослідила її властивості.

У цій статті з'ясовано, що задача Коші для систем з [3] коректно розв'язна в просторі початкових даних — узагальнених функцій типу розподілів Л. Шварца, а її розв'язок є нескінченно диференційовною вектор-функцією за просторовою змінною.

1. Допоміжні відомості. Постановка задачі Коші. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ і $\mathbb{C}$ — множини всіх натуральних, дійсних та комплексних чисел відповідно, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := (0;+\infty)$, i — уявна одиниця, $|\xi + i\eta| := \\ := \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, якщо $\{\xi, \eta\} \subset \mathbb{R}$; $x := (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^2$, $\|x\| := \sqrt{(x,x)}$ для $x \in \mathbb{R}^2$, $z^l := z_1^{l_1} z_2^{l_2}$, $|z|^l := |z_1|^{l_1} |z_2|^{l_2}$, якщо $z := (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2 := \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, $l = (l_1; l_2) \in \mathbb{Z}_+^2 := \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, $\alpha^* = 1 - \dfrac{1}{2b}$, $\beta^* := \dfrac{1}{2b}$; $|x|_+ := |x_1| + |x_2|$, $\Pi_M^n := \{(t;x) \mid t \in M, x \in \mathbb{R}^n\}$, $\langle , \rangle$ — результат дії функціонала на основну функцію, при цьому, якщо $f = (f_1; \ldots; f_m)$ і $\psi(\cdot) = \left(\psi_{lj}(\cdot)\right)_{l,j=1}^m$, то $\langle f, \psi \rangle := col\left(\sum_{r=1}^m \langle f_r, \psi_{1r} \rangle; \ldots; \sum_{r=1}^m \langle f_r, \psi_{mr} \rangle \right)$.

Наведемо необхідні відомості про простори типу S, де S — простір основних функцій Л. Шварца [4]. Для довільних $\alpha > 0$, $\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta := \Big\{ \varphi \in S \mid \exists \{c, A, B\} \subset \mathbb{R}_+ \ \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+^2$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^2 : \ | x^k \partial_x^m \varphi(x) | \le c A^{|k|_+} B^{|m|_+} k^{k\alpha} m^{m\beta} \Big\}.$$

Цей простір з відповідною топологією є об'єднанням повних досконалих зліченно-нормованих просторів із неперервними операціями додавання, віднімання, множення, диференціювання та звичайного зсуву τ_h на крок $h \in \mathbb{R}^2$, остання з яких є ще й нескінченно диференційовною.

При $\alpha + \beta \ge 1$ простір S_α^β є нетривіальним і містить тільки ті нескінченно диференційовні в $\mathbb{R}^2$ функції φ, для яких виконуються оцінки

$$\left| \partial_x^m \varphi(x) \right| \le c B^{|m|_+} m^{m\beta} e^{-\delta |x|_+^{1/\alpha}}, \ m \in \mathbb{Z}_+^2, \ \ x \in \mathbb{R}^2,$$

де c, B, δ — додатні сталі, залежні від φ.

При $0<\beta<1$ простір S_{α}^{β} складається тільки з тих функцій φ, які продовжуються з $\mathbb{R}^2$ до цілих функцій $\varphi(x+iy)$, $(x+iy)\in\mathbb{C}^2$, причому

$$|\varphi(x+iy)|\le c\exp\left\{-\delta_1\,|x|_+^{1/\alpha}+\delta_2\,|y|_+^{1/(1-\beta)}\right\},$$

з деякими $\{c,\delta_1,\delta_2\}\subset\mathbb{R}_+$.

Якщо $\beta=1$, то елементи φ відповідного простору S_{α}^{β} допускають аналітичне продовження в деяку залежну від φ множину

$$\left\{(x+iy)\in\mathbb{C}^2\mid \|y\|<\delta\right\}.$$

Якщо ж $\beta>1$, то простір S_{α}^{β} містить і фінітні функції. Простори типу S пов'язані між собою перетворенням Фур'є F, зокрема, правильним є співвідношення $F[S_{\alpha}^{\beta}]=S_{\beta}^{\alpha}$, де

$$F[X]:=\left\{\psi\mid\ \psi(\cdot)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(x)e^{i(x,\cdot)}dx,\ \ \varphi\in X\right\}.$$

Позначимо топологічно спряжений з S_{α}^{β} простір через $\left(S_{\alpha}^{\beta}\right)'$. Якщо f належить до простору $\left(S_{\alpha}^{\beta}\right)'$, то і її похідна $\partial_x^m f$, $m\in\mathbb{Z}_+^2$, зсув $f(ax+h)$, $a\neq 0$, і добуток μf, де μ — мультиплікатор у S_{α}^{β}, теж належать до нього. Для того, щоб послідовність $\left\{\varphi_\nu,\ \nu\ge 1\right\}\subset S_{\alpha}^{\beta}$ збігалась у S_{α}^{β} до $\varphi\in S_{\alpha}^{\beta}$ при $0<\beta<1$, необхідно і досить, щоб вона:

1) правильно збігалась на $\mathbb{C}^2$, тобто $\varphi_\nu(z)\underset{\nu\to\infty}{\overset{z\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}\varphi(z)$ (рівномірно щодо z на кожному компакті $K\subset\mathbb{C}^2$);
2) була обмежена в S_{α}^{β}:

$$\exists\{c,\delta_1,\delta_2\}\subset\mathbb{R}_+\ \forall\,\nu\ge 1\ \ \forall(x+iy)\in\mathbb{C}^2:$$
$$|\varphi_\nu(x+iy)|\le c\exp\left\{-\delta_1\,|x|_+^{1/\alpha}+\delta_2\,|y|_+^{1/(1-\beta)}\right\}.$$

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f\in\left(S_{\alpha}^{\beta}\right)'$ діє за правилом

$$\left\langle F[f],F[\varphi]\right\rangle:=(2\pi)^2\left\langle f,\varphi\right\rangle,\ \ \varphi\in S_{\alpha}^{\beta};$$

і є узагальненою функцією визначеною на $F[S_{\alpha}^{\beta}]$. Обернене перетворення Фур'є F^{-1} узагальненої функції $g\in\left(F[S_{\alpha}^{\beta}]\right)'$ задається формулою

$$\left\langle F^{-1}[g],F^{-1}[\psi]\right\rangle := (2\pi)^{-2}\left\langle g,\psi\right\rangle,\ \psi\in F[S_\alpha^\beta].$$

Зафіксуємо довільно $T>0$, $\{m,\ 2b\}\in\mathbb{N}$ і розглянемо систему вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова вигляду [3]

$$\left(\partial_t - x_1\partial_{x_2}\right)u(t;x)=\mathbb{A}(t;i\partial_{x_1})u(t;x),\quad (t;x)\in\Pi^2_{(0;T]},\tag{1}$$

де $u:=col(u_1;...;u_m)$, $\mathbb{A}(t;i\partial_{x_1})=\left(\sum_{k=0}^{2b}a_k^{ij}(t)(i\partial_{x_1})^k\right)_{i,j=1}^m$ — матричний диференціальний вираз, коефіцієнти якого є неперервними на $[0;T]$ функціями і такими, що відповідний диференціальний вираз

$$\partial_t-\mathbb{A}(t;i\partial_{x_1})$$

є $2b$-параболічним за Петровським на множині $\Pi^1_{(0;T]}$, тобто

$$\exists\delta_0>0\ \ \forall\xi_1\in\mathbb{R}\ \ \forall t\in\left[0;T\right]:\ \max_j \operatorname{Re}\lambda_j(t;\xi_1)\le-\delta_0\left|\xi_1\right|^{2b}.$$

Тут λ_j — власні числа головного матричного символа

$$\mathcal{A}^0(t;\xi_1)=\xi_1^{2b}\left(a_{2b}^{ij}(t)\right)_{i,j=1}^m.$$

Задамо для системи (1) початкову умову

$$u(t;\cdot)\big|_{t=0}=f,\ \ f\in\left(\mathbb{S}_\alpha^\beta\right)'\tag{2}$$

де $\mathbb{S}_\alpha^\beta$ — векторний аналог простору S_α^β. Розв’язком задачі Коші (1), (2) назвемо вектор-функцію u, яка диференційована за t, нескінченно диференційована за x на множині $\Pi^2_{(0;T]}$ і задовольняє систему (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (2) у сенсі збіжності в просторі $\left(S_\alpha^\beta\right)'$, тобто

$$\left\langle u(t;\cdot),\varphi(\cdot)E\right\rangle\xrightarrow[t\to+0]{}\left\langle f,\varphi(\cdot)E\right\rangle\ \left(\forall\varphi\in S_\alpha^\beta\right),$$

де E — одинична матриця порядку m.

Функціональна матриця $G(t,x;\tau,\xi)$ розмірності $m\times m$, визначена для всіх $(t;x)\in\Pi^2_{(0;T]}$ й залежна від параметричної точки $(\tau;\xi)\in\Pi^2_{(0;T]}$, називається ФМРЗК для системи (1), якщо:

1) G як функція аргументу $(t;x)$ задовольняє систему (1) на $\Pi^2_{(\tau;T]}$, $\tau\in[0;T)$;

2) виконується граничне співвідношення

$$G(t,x;\tau,\xi) \xrightarrow[t\to\tau+0]{} \delta(\cdot - x)E$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' розподілів Л. Шварца, де $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака.

ФМРЗК для системи (1) має вигляд [3]

$$G(t,x;\tau,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x,\xi)} e^{i(y,(\xi_1-(t-\tau)\xi_2;\xi_2))} \Theta_\tau^t(\xi)d\xi, \qquad (3)$$

де

$$\Theta_\tau^t(\xi) = E + \sum_{r=1}^{\infty} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \dots \int_\tau^{t_{r-1}} \left(\prod_{j=1}^{r} \mathbb{A}(\xi_1 - (t-t_j)\xi_2) \right) dt_r \dots dt_2 dt_1.$$

При дослідженні властивостей матричної функції $\Theta_\tau^t(\cdot)$ встановлено, що вона допускає аналітичне продовження у комплексний простір $\mathbb{C}^2$ до цілої матричної функції, причому

$$\begin{aligned} &|\Theta_\tau^t(\xi+i\eta)| \le c\exp\{-(t-\tau)[\delta_1(\xi_1^{2b} + ((t-\tau)\xi_2)^{2b}) - \\ &-\delta_2(\eta_1^{2b} + ((t-\tau)\eta_2)^{2b})]\},\ \xi+i\eta \in \mathbb{C}^2,\ 0 \le \tau < t \le T, \end{aligned} \qquad (4)$$

де c, δ_1, δ_2 — додатні сталі, залежні лише від T.

Ця оцінка є достатньою умовою належності до простору $S_{\frac{1}{2b}}^{1-\frac{1}{2b}}$ при фіксованих змінних t і τ кожного елемента матриці $\Theta_\tau^t(\cdot)$ (як функції просторової змінної).

Означимо оператор $T_t^{\eta,\xi}$, який діє за правилом

$$T_t^{\eta,\xi}\varphi(x) = \varphi(x_1 - \xi_1, x_2 + t\eta_1 - \xi_2).$$

Тоді за допомогою цього оператора ФМРЗК G можна зобразити так:

$$G(t,x;\tau,\xi) = \left(T_{t-\tau}^{x,\xi} F_{\eta\to x}^{-1}[\Theta_\tau^t(\eta)]\right)(t,x;\tau,\xi),\ \ 0 \le \tau < t \le T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^2,$$

де позначення $F_{\eta\to x}$ означає, що перетворення Фур'є діє за змінною η і переводить її в x).

Ураховуючи властивості оператора $T_t^{\eta,\xi}$ (див. [5]), одержимо належність матричної функції G стосовно кожної просторової змінної x і ξ до відповідного векторного простору $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$ (при фіксованих t і τ), а також її (сильну) диференційовність за змінною $t \in (\tau;T]$ та нескінченну диференційовність за змінною $x \in \mathbb{R}^2$ у цьому просторі (як абстрактної функції цих змінних).

2. Коректна розв’язність задачі Коші. Коректну розв’язність задачі Коші (1), (2) характеризує наступне твердження.

Теорема. Нехай початкова вектор-функція f є елементом простору $\left(\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}\right)'$. Тоді для задачі Коші (1), (2) існує єдиний неперервно залежний від початкових даних розв’язок, який диференційовний за t, нескінченно диференційовний за змінною x і зображується формулою

$$u(t;x) = \left\langle f, G(t,x;0,\cdot)\right\rangle,\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^2 .$$

Доведення. Диференційовність за змінною t і нескінченна диференційовність за змінною x на множині $\Pi_{(0;T]}^2$ вектор-функції $\langle f, G(t,x;0,\cdot)\rangle$ безпосередньо випливає із сильної диференційовності у просторі $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$ матричної функції G за цими змінними.

Використовуючи властивість лінійності функціонала f, а також рівність

$$\partial_t G(t,x;0,\xi) = \left(x_1\partial_{x_2} + \mathbb{A}(t;i\partial_{x_1})\right)G(t,x;0,\xi),$$

отримаємо

$$\partial_t u(t;x) = \langle f, \partial_t G(t,x;0,\cdot)\rangle = \langle f, \left(x_1\partial_{x_2} + \mathbb{A}(t;i\partial_{x_1})\right)G(t,x;0,\cdot)\rangle =$$

$$= \left(x_1\partial_{x_2} + \mathbb{A}(t;i\partial_{x_1})\right)u(t;x),\ \ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}^2.$$

Таким чином, вектор-функція $\langle f, G(t,x;0,\cdot)\rangle$ є звичайним розв'язком системи (1) на множині $\Pi_{(0;T]}^2$.

Перевіримо виконання початкової умови (2) для зазначеної вектор-функції $u(t;\cdot)$. Для цього зафіксуємо довільно елемент $\varphi \in S_{\alpha^*}^{\beta^*}$ і, врахувавши означення оберненого перетворення Фур'є узагальненої функції, а також регулярність функціонала $u(t;\cdot)$, одержимо

$$\langle u(t;x), \varphi(x)E\rangle = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\langle F_{\xi\to\eta}^{-1}[f], F_{\xi\to\eta}^{-1}[G(t,x;0,\xi)]\rangle\right)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \langle F_{\xi\to\eta}^{-1}[f], I_{\eta,\varphi}^t(x)\rangle dx,\quad 0 < t \le T,$$

де $I_{\eta,\varphi}^t(x) := (2\pi)^2 \varphi(x) F_{\xi\to\eta}^{-1}[G(t,x;0,\xi)].$

Далі, перевіримо виконання наступних умов інтегровності абстрактної матриці $I_{\eta,\varphi}^t(x)$ за x при кожному фіксованому $t \in (0;T]$ у просторі $S_{\alpha^*}^{\beta^*}$:

1) інтегровність матричної функції $I^t_{\eta,\varphi}(x)$ за x у просторі $S^{\beta^*}_{\alpha^*}$ на кожній множині

$$K(r) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \| x \| \le r\right\}, r > 0 ;$$

2) $J^t_{r,\varphi}(\eta) := \int\limits_{K(r)} I^t_{\eta,\varphi}(x)dx \underset{r\to+\infty}{\overset{\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}}{\rightarrow}} J^t_{\varphi}(\eta),\ \eta \in \mathbb{R}^2, 0 < t \le T,$

де $J^t_{\varphi}(\eta) := \int\limits_{\mathbb{R}^2} I^t_{\eta,\varphi}(x)dx.$

Виконання умови 1) забезпечує неперервність абстрактної матриці $I^t_{\eta,\varphi}(x)$ на множині $K(r)$ у сенсі топології простору $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ при $\eta \in \mathbb{R}^2$, $t \in (0;T]$. Проте ця неперервність стає очевидною, якщо зважити на сильну диференційовність стосовно змінної x матриці $G(t, x; 0, \xi)$ у цьому просторі, а також на неперервність оператора перетворення Фур'є у просторах типу S.

Перевіримо виконання умови 2. Для цього, враховуючи критерій збіжності у просторі $S^{\beta^*}_{\alpha^*}$, необхідно переконатись у виконанні наступних умов:

I) $| J^t_{r,\varphi}(\zeta) - J^t_{\varphi}(\zeta) | \underset{r\to+\infty}{\overset{\zeta\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} 0,\ 0 < t \le T,$ для довільного компакта $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}^2$;

II) обмеженість послідовності $J^t_{r,\varphi}(\cdot), r \in \mathbb{N}$, у $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ при кожних фіксованих $t \in (0;T]$.

Безпосередньо із структури (3) ФМРЗК G одержуємо, що

$$G(t, x; \tau, \xi) = (2\pi)^{-2} F_{z\to\xi}[e^{-i(x,(z_1+(t-\tau)z_2;z_2))}\ \Theta^t_{\tau}(z_1 + (t-\tau)z_2; z_2)],$$
$$\{x, \xi\} \in \mathbb{R}^2, 0 \le \tau < t \le T,$$

і, відтак приходимо до такого зображення матричної функції $I^t_{z,\varphi}(x)$:

$$I^t_{z,\varphi}(x) = e^{-i(x,(z_1+tz_2;z_2))}\varphi(x)\ \Theta^t_0(z_1 + tz_2; z_2), \{x, z\} \in \mathbb{R}^2,\ 0 < t \le T.$$

Надалі користуватимемося цим зображенням, яке, між іншим, є зручним для аналітичного продовження за змінною z матричної функції $I^t_{z,\varphi}(x)$ у комплексний простір $\mathbb{C}^2$.

Оскільки $\varphi \in S^{\beta^*}_{\alpha^*}$, то

$$\exists\{c, \delta\} \subset \mathbb{R}_+\ \forall x \in \mathbb{R}^2 :\ | \varphi(x) | \le c \exp\left\{-\delta | x |^{1/\beta^*}_+\right\}.$$

Для кожної кулі $\bar{K}(\rho) := \{\zeta \in \mathbb{C}^2 \mid \|\zeta\| \le \rho\}$, $\rho > 0$, маємо

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} I^t_{\zeta,\varphi}(x)dx\Big| \le \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi(x)|\,|e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|\,dx\,|\Theta^t_0(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2)| \le$$

$$\le c\cdot \sup_{\zeta\in\bar{K}(\rho),\, x\in\mathbb{R}^2}\left\{e^{-\frac{\delta}{2}|x|_+^{1/\beta^*}}\,|e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|\right\}\times$$

$$\times \sup_{\zeta\in\bar{K}(\rho)}\left\{|\Theta^t_0(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2)|\right\}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\delta}{2}|x|_+^{1/\beta^*}}dx =$$

$$= c_1(t,\rho) < +\infty,\ 0 < t \le T,\ \zeta\in\bar{K}(\rho).$$

Отже, інтеграл $\int_{\mathbb{R}^2} I^t_{\zeta,\varphi}(x)dx$ збігається рівномірно щодо ζ на довільній кулі $\bar{K}(\rho)$ при кожному фіксованому $t\in(0;T]$. Звідси та з рівності

$$\left|J^t_{r,\varphi}(\zeta) - J^t_{\varphi}(\zeta)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2\setminus K(r)} I^t_{\zeta,\varphi}(x)dx\right|,$$

дістаємо виконання умови I).

Умова II) теж виконується. Справді, для всіх $r > 0, \zeta\in\mathbb{C}^2$ і $t\in(0;T]$ маємо

$$|J^t_{r,\varphi}(\zeta)| \le \int_{\mathbb{R}^2} |I^t_{\zeta,\varphi}(x)|\,dx \le$$

$$\le c\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\delta|x|_+^{2b}}\,|e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|\,dx\,|\Theta^t_0(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2)|.$$

Безпосередньо з оцінки (4), для кожного фіксованого $t\in(0;T]$ одержуємо існування таких додатних сталих c_0, δ_+ і δ_-, з якими для всіх $\zeta\in\mathbb{C}^2$ виконується нерівність

$$|\Theta^t_0(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2)| \le c_0 e^{-\delta_-|\mathrm{Re}\,\zeta|_+^{2b}+\delta_+|\mathrm{Im}\,\zeta|_+^{2b}}.$$

Зваживши тепер на те, що

$$\sup_{\zeta\in\mathbb{C}^2,\, x\in\mathbb{R}^2}\left\{e^{-\delta(\|x\|+\|\zeta\|)^{2b}}\,|e^{-i(x,(\zeta_1+t\zeta_2;\zeta_2))}|\right\} < \infty$$

при кожному $\delta > 0$ і $t\in(0;T]$, дістанемо оцінку

$$|J^t_{r,\varphi}(\zeta)| \le ce^{-\delta_0|\mathrm{Re}\,\zeta|_+^{2b}+\delta_1|\mathrm{Im}\,\zeta|_+^{2b}},\quad r>0,\ \zeta\in\mathbb{C}^2, t\in(0;T],$$

в якій оціночні сталі залежать лише від t. Це й означає обмеженість послідовності $J^t_{r,\varphi}(\cdot), r\in\mathbb{N}$, у просторі $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ при кожному фіксованому $t\in(0;T]$.

Таким чином, встановлено рівність

$$\langle u(t;x),\varphi(x)E\rangle = \langle F^{-1}_{\xi\to\eta}[f], J^t_\varphi(\eta)\rangle, \quad \varphi\in S^{\beta^*}_{\alpha^*},\ (t;x)\in\Pi^2_{(0;T]}, \qquad (5)$$

з якої згідно з аналогом відповідного твердження леми 6 з [5] одержуємо

$$\langle u(t;x),\varphi(x)E\rangle \underset{t\to+0}{\to} (2\pi)^2\langle F^{-1}[f](\eta), F^{-1}[\varphi](\eta)E\rangle = \langle f,\varphi E\rangle,$$

для довільних $\varphi\in S^{\beta^*}_{\alpha^*}$.

Отже, виконання початкової умови (2) для зазначеної вектор-функції $u(t;x)$ встановлено.

Доведемо далі єдиність розв'язку задачі Коші (1), (2). Скористаємося відомим способом Хольмгрена, належно пристосувавши його до даного випадку. Нагадаємо, що цей спосіб характеризується тим, що з існування розв'язку заданої системи рівнянь при довільних початкових даних з певного основного простору випливає єдиність розв'язку задачі Коші для відповідної спряженої системи рівнянь.

Розглянемо спряжену задачу Коші:

$$\left(-\partial_t + P^*(\partial_{x_1})\right)v_\tau(t;x) = 0, \quad (t;x)\in\Pi^2_{[0;\tau)}, \qquad (6)$$

$$v_\tau(t;\cdot)\xrightarrow[t\to\tau-0]{S^{\beta^*}_{\alpha^*}}\varphi(\cdot), \quad \varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}, \qquad (7)$$

де $\tau\in(0;T]$, а $P^*(\partial_{x_1})$ — спряжений за Лагранжем з $P(\partial_{x_1}) := x_1\partial_{x_2} - \mathbb{A}(t;i\partial_{x_1})$ диференціальний вираз.

Оскільки $\varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$, то згідно з [3] класичний розв'язок системи (6) зображується рівністю

$$v_\tau(t;\cdot) = \int_{\mathbb{R}^2} G^*(t,\cdot;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \ \ 0\le t<\tau\le T,$$

в якій G^* — відповідна ФМРЗК для системи (6).

Міркуючи як у випадку задачі Коші (1), (2), дотримуючись при цьому схеми, запропонованої в [5], переконуємося у тому, що вектор-функція $v_\tau(t;\cdot)$ є елементом простору $\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha_*}$ при всіх t і τ, $0\le t<\tau\le T$, яка задовольняє відповідну початкову умову (7).

Далі, означимо оператор $\Omega^t_\tau:\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}\to\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$ рівністю

$$\Omega^t_\tau\varphi(\cdot) := v_\tau(t;\cdot), \ \ 0\le t<\tau\le T.$$

Він є лінійним, неперервним і таким, що для всіх $\varphi\in\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*}$

$$\partial_t\Omega^t_\tau\varphi = P^*(\partial_{x_1})\Omega^t_\tau\varphi, \quad \Omega^t_\tau\varphi\xrightarrow[t\to\tau-0]{S^{\beta^*}_{\alpha^*}}\varphi. \qquad (8)$$

Розглянемо тепер розв'язок $u(t;\cdot)=\langle f, G(t,\cdot;0,\eta)\rangle$, $f\in(\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*})'$, задачі Коші (1), (2), який, очевидно, є елементом простору $(\mathbb{S}^{\beta^*}_{\alpha^*})'$. Для єдиності розв'язку цієї задачі Коші досить довести, що єдиним розв'язком системи (1) при нульовій початковій умові (2) може бути лише $u = 0$.

Застосуємо функціонал u до функції $\Omega_\tau^t \varphi$, де φ — довільний елемент з $\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$, і розглянемо $\sum_\tau^t \varphi := \langle u, \Omega_\tau^t \varphi \rangle$. Диференціюючи $\sum_\tau^t \varphi$ за змінною t та використовуючи (1) і (8), одержимо [4, с.96]

$$\partial_t \sum_\tau^t \varphi = \langle \partial_t u, \Omega_\tau^t \varphi \rangle + \langle u, \partial_t \Omega_\tau^t \varphi \rangle = -\langle Pu, \Omega_\tau^t \varphi \rangle + \langle u, P^* \Omega_\tau^t \varphi \rangle =$$

$$= -\langle Pu, \Omega_\tau^t \varphi \rangle + \langle Pu, \Omega_\tau^t \varphi \rangle = 0, \varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}, \quad 0 \le t < \tau \le T.$$

З останнього співвідношення випливає, що $\sum_\tau^t \varphi$ — стала величина. Якщо тепер урахувати початкову умову $u(t;\cdot)\big|_{t=0} = 0$, то матимемо, що для всіх $t \in [0;\tau)$ $\sum_\tau^t \varphi = 0$, $\varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$. Зокрема, при $t \to \tau - 0$, згідно (8) і тим, що елементи вектор-функції $u -$ неперервні функціонали з $(S_{\alpha^*}^{\beta^*})'$, маємо $\sum_\tau^t \varphi = \langle u, \varphi \rangle, \varphi \in \mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*}$. Таким чином, $u(t;\cdot) = 0$ для $t \in [0;\tau]$. Довільність вибору τ з $(0;T]$ забезпечує виконання останньої рівності для всіх $t \in [0;T]$.

Наостанок, переконаємось у неперервній залежності розв'язку задачі Коші (1), (2) від початкових даних. Для цього досить установити, що

$$\forall \{f;\, f_\nu, \nu \ge 1\} \subset (\mathbb{S}_{\alpha^*}^{\beta^*})' : \; f_\nu \xrightarrow[\nu \to +\infty]{(S_{\alpha^*}^{\beta^*})'} f,$$

відповідна послідовність розв'язків

$$u_\nu := \langle f_\nu, G \rangle \underset{\nu \to +\infty}{\overset{(S_{\alpha^*}^{\beta^*})'}{\to}} \langle f, G \rangle =: u.$$

Проте цей факт стає очевидним, якщо зважити на рівність (5) та властивість неперервності оператора перетворення Фур'є у просторі $\left(S_{\alpha^*}^{\beta^*}\right)'$.

Теорему доведено.

Висновок. Задача Коші для системи (1) вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з відповідними узагальненими початковими даними типу розподілів Гельфанда І. М. і Шилова Г. Є. коректно розв’язна, причому її розв’язок є звичайною нескінченно диференційовною за просторовою змінною вектор функцією.

Список використаних джерел:

1. Kolmogoroff A. N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownishen Bewegungen) / A. N. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1934. — Vol. 35. — P. 116–117.
2. Eidelman S. D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2004. — Vol. 152. — 390 p.
3. Малицька Г. П. Системи рівнянь типу Колмогорова / Г. П. Малицька // Укр. мат. журн. — 2008. — Т. 60, №12. — С. 1650–1663.
4. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.
5. Івасишен С. Д. Задача Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова з додатним родом / С. Д. Івасишен, В. А. Літовченко // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, №8. — С. 1066–1087.

We established the correct solvability of the Cauchy problem for degenerate model parabolic systems of Kolmogorov-type equations in the space of initial data, elements of which are generalized functions distribution L. Shvarts type.

Key words: *degenerate parabolic system, the Cauchy problem, correct solvability, fundamental and generalized functions.*

Отримано: 19.06.2012

УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук,
У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НЕОБХІДНІ, ДОСТАТНІ УМОВИ І КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

У статті встановлено необхідні, достатні умови і критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції p рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень з використанням крайніх точок субдиференціалів функції p .

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні опуклої функції рівномірна апроксимація, крайні точки, субградієнт, критерії.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції p рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень

