

УДК 621.371.39

## ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОСТИ НА ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ, СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. НИКИШОВ

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

*Получено 30.04.2003*

Рассматривается влияние вязкости на движение электропроводящей, стратифицированной жидкости при наличии внешнего магнитного поля. Предполагается, что выполняются приближение Буссинеска и магнитогидродинамическое приближение. Получено уравнение, описывающее развитие малых возмущений скорости, на основе которого определены области существования волновых и аперiodических режимов движения. В пространстве волновых чисел построена диаграмма типов движений, найдены характерные точки диаграммы. Рассмотрен случай, когда волновой вектор направлен под заданным углом к направлению вектора магнитной индукции. Отдельно изучены случаи вертикального и горизонтального направлений вектора магнитной индукции. Показано, что присутствие магнитного поля расширяет область существования волновых движений.

Розглядається вплив в'язкості на рух електропровідної, стратифікованої рідини при наявності зовнішнього магнітного поля. Припускається, що виконуються наближення Бусінеска і магнітогідродинамічне наближення. Отримано рівняння, що описує розвиток малих збурень швидкості, на основі якого визначено області існування хвильових і аперіодичних типів рухів. У просторі хвильових чисел побудована діаграма типів рухів, знайдені характерні точки діаграми. Розглянуто випадок, коли хвильовий вектор є направленим під заданим кутом до напрямку вектора магнітної індукції. Окремо вивчено випадки вертикального і горизонтального напрямків вектора магнітної індукції. Показано, що наявність магнітного поля розширює область існування хвильових рухів.

Effect of viscosity on motion of electrical conductive, stratified fluid with the presence of external magnetic field is studied. It is assumed that the Boussinesq approximation and magnetohydrodynamics approximation are valid. The equation describing the development of small perturbations of velocity, is found. On the base of the equation the regions of the existences of wave and aperiodic regimes of motion are determined. The diagram of the types of motion is constructed in the space of wave numbers. The characteristic points of the diagram are found. The case when wave vector is directed under given angle in respect to vector of magnetic induction is considered. Separately, the cases when vector of magnetic induction is directed vertically and horizontally are analyzed too. It is shown that the presence of magnetic field results in the expanding of the region of the existing of wave motion.

### ВВЕДЕНИЕ

Стратификация жидкости является причиной появления специфического вида волновых движений – внутренних гравитационных волн. Изучению их характеристик, особенностей генерации различными видами возмущений и распространения посвящено большое количество работ. Результаты исследований обобщены в монографиях [1–3] и др. Диссипативные эффекты, связанные в первую очередь с влиянием вязкости, приводят к затуханию волновых процессов. В то же время, они служат причиной возникновения аперiodических режимов движения. Учет этих эффектов показал [4, 5], что в стратифицированной жидкости наряду с внутренними волнами также существуют аперiodические движения (интрузионная мода [5]), которые обуславливают формирование слоистых структур. Эти структуры, являющиеся характерной особенностью стратифицированной среды, регистрируются, например, в гидрофизических измерениях в морях и океанах [6]. Диагности-

ческая диаграмма типов движений стратифицированной вязкой жидкости в пространстве волновых чисел построена в работе [7]. Найдены граничные значения вертикального и горизонтального значений волновых чисел, соответствующих размерам рассматриваемого возмущения, при превышении которых развитие возмущений происходит аперiodически. Учет эффектов температуропроводности жидкости приводит к расширению области, соответствующей волновому режиму движения. Скорости затухания внутренних волн и слоистых структур невелики и они обладают большим временем жизни.

Следует отметить, что в устойчиво стратифицированной жидкости существуют также долгоживущие квази-плоские движения с вертикальной структурой [8], у которых вертикальная завихренность генерируется вертикальной дивергенцией и переносится в горизонтальном направлении.

Диагностические диаграммы для случая вращающейся стратифицированной жидкости построены в работах [9, 10]. В них выделены зоны, соответствующие гироскопическим, внутренним,

внутренне-гироскопическим волнам и аperiodическим движениям.

Наличие магнитного поля существенно образом изменяет характер движения электропроводящей жидкости. Здесь можно упомянуть о влиянии магнитного поля на поверхностные гравитационные волны [11, 12], на конвекцию Рэлея-Бенара [13], на движение жидкости в пограничном слое и в каналах [14, 15] и др. Магнитное поле является также причиной возникновения магнитогидродинамических волн (волн Альвена), а в случае сжимаемой жидкости – магнитоакустических волн. Обобщение результатов многочисленных исследований, посвященных изучению этих волн, представлено в монографиях [16–19] и др. Рассмотрены случаи идеально проводящей жидкости и жидкости конечной проводимости. В последнем случае диссипация энергии движения обусловлена не только вязкими эффектами, но джоулевыми потерями. В частности, показано, что затухание магнитогидродинамических волн определяется суммой указанных эффектов [20]. Влияние диссипативных факторов, таких как вязкость и конечная проводимость, на распространение альфвеновских волн в стратифицированной атмосфере, что может быть приложено к проблеме нагрева солнечной атмосферы, изучено в [21]. В работах [22, 23] особое внимание уделено неоднородности магнитного поля и ее влиянию на альфвеновские волны в стратифицированной среде.

В настоящей работе рассматриваются движения вязкой, несжимаемой, электропроводящей жидкости при наличии устойчивой стратификации и однородного магнитного поля. Предполагается, что справедливо приближение Буссинеска. В работе в магнитогидродинамическом приближении получены общие уравнения, описывающие поведение малых возмущений скорости и плотности. В пространстве волновых чисел построены характеристические диаграммы, классифицирующие наличие различных типов движений в зависимости от пространственных масштабов возмущений и параметров среды.

## 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим влияние магнитного поля на развитие малых возмущений в стратифицированной среде. Основные предположения, которые использованы в работе, следующие [14]: током смещения пренебрегаем; полагаем, что конвекционный ток мал по сравнению с током проводимости; пренебрегаем эффектом Холла, ионным скольжением, а

также влиянием электростатической силы по сравнению с силой Лоренца. Эти предположения хорошо оправдываются для слабых магнитных полей. В этом случае циклотронное вращение практически не проявляется на фоне хаотических процессов столкновения в среде, т. е.  $R_c \gg l$ , где  $R_c$  – циклотронный радиус, а  $l$  – длина свободного пробега. При таких условиях проводимость среды  $\sigma_0$  можно рассматривать как скалярную величину [18].

Воспользуемся системой микроскопических уравнений Максвелла, пренебрегая токами намагничивания [14]:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3)$$

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = q_0, \quad (4)$$

$$\vec{J} = \sigma_0 (\vec{E} + [\vec{v} \times \vec{B}]). \quad (5)$$

Здесь  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – вектора напряженности электрического и магнитного поля, соответственно;  $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$  – вектор индукции электрического и магнитного полей соответственно;  $\vec{J}$  – вектор плотности тока;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды;  $\sigma_0$  – электропроводность жидкости;  $q_0$  – распределение плотности свободных зарядов;  $\vec{v}$  – вектор скорости жидкости;  $\epsilon_0$  – постоянная, равная  $9 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $\mu_0$  – постоянная, равная  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/А<sup>2</sup>.

Подставляя зависимость (5), выражающую закон Ома, в закон Ампера (2), получаем

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \sigma_0 \vec{E} + \sigma_0 [\vec{v} \times \vec{B}].$$

Применяя к этому уравнению операцию ротора и учитывая, что  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ , получаем

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \chi_M \Delta \vec{B}, \quad (6)$$

где  $\chi_M = 1/\sigma_0 \mu_0$  – коэффициент диффузии магнитного поля. В уравнении (6) первое слагаемое в правой части отвечает за вмерзженность магнитного поля, второе – за диффузию его силовых линий.

Введем характерные масштабы скорости  $U$ , длины  $L$ , величины магнитной индукции  $B_{ch}$ . Тогда уравнение индукции (6) в безразмерной форме примет вид

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] + \operatorname{Re}_M \Delta \vec{B}. \quad (7)$$

Здесь  $Re_M$  – магнитное число Рейнольдса,  $Re_M = 1/UL\sigma_0\mu_0$ .

Перейдем теперь к гидродинамической части уравнений движения. Будем считать, что изменения плотности происходят в вертикальном направлении и они невелики. Представим выражение для плотности в виде суммы невозмущенного значения и возмущения  $\rho^* = \rho_s(z) + \rho$ . Тогда возмущениями плотности в инерционных членах уравнения Навье-Стокса пренебрегаем, но учитываем изменения плотности в членах, связанных с изменениями давления и внешней силы. В результате получаем уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности в приближении Буссинеска, которые для случая температурно-стратифицированной среды имеют вид [2, 24]

$$\rho_s \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p' + \rho \vec{g} + [\vec{J} \times \vec{B}] + \eta \Delta \vec{v}, \quad (8)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (9)$$

Здесь в уравнение движения добавлена пондеромоторная сила  $\vec{f} = [\vec{J} \times \vec{B}]$ , появление которой обусловлено движением электропроводной жидкости в магнитном поле. Выражение для вектора плотности тока находим из закона Ома (5), при этом, как отмечалось выше, электростатической объемной силой пренебрегаем по сравнению с силой Лоренца [14]. Считаем также, что  $\rho_s(z)$  мало отличается от постоянного значения  $\rho_0$  [2]. В результате получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \rho \vec{g} + \chi_M [\operatorname{rot} \vec{B} \times \vec{B}] + \nu \Delta \vec{v}, \quad (10)$$

где  $p'$  – отклонение давления от гидростатического состояния;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости. К этому уравнению необходимо добавить уравнение переноса температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \chi_T \Delta T, \quad (11)$$

где  $T$  – температура среды;  $\chi_T$  – температуропроводность, и уравнение состояния, которое будем использовать в линеаризованной форме:

$$\rho^* = \rho_0 (1 - \alpha_T (T - T_0)) \quad (12)$$

(здесь  $T_0$  – характерное значение температуры,  $\alpha_T$  – коэффициент термического расширения жидкости).

Выберем систему координат так, чтобы ось  $z$  была направлена вертикально вверх, а оси  $x$  и  $y$  составили вместе с ней правостороннюю прямоугольную систему. Тогда в этой системе координат  $\vec{g} = (0, 0, -g)$ , а  $\vec{v} = (u, v, w)$ .

Пусть  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$  (здесь  $\vec{B}_0$  – постоянное магнитное поле,  $\vec{b}$  – его возмущение),  $T^* = T_s + T$ , (здесь  $T_s(z)$  – средний профиль температуры по глубине,  $T$  – его возмущение). Отметим, что представление магнитной индукции в виде суммы основной величины и малого возмущения эквивалентно разложению по малому магнитному числу Рейнольдса. Из линеаризованного уравнения состояния следует, что

$$\rho = -\rho_0 \alpha_T T.$$

В результате для малых возмущений, пренебрегая членами высшего порядка малости, уравнения индукции (7), движения (10), переноса температуры (11) и несжимаемости (9) примут следующий вид (в размерной форме):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{b}}{\partial t} &= [\nabla \times [\vec{v} \times \vec{B}_0]] + \chi_M \Delta \vec{b}, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\rho \vec{g}}{\rho_0} + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} [\operatorname{rot} \vec{b} \times \vec{B}_0] + \nu \Delta \vec{v}, \quad (13) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\rho_0 N^2}{g} w + \chi_T \Delta \rho, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \end{aligned}$$

где  $N^2 = -g/\rho_0 d\rho_s/dz$  – частота Вайселя-Брента. Рассматривается случай устойчивой стратификации, полагается, что  $N^2 = \operatorname{const} > 0$ .

При линеаризации считалось, что малы не только амплитуды параметров возмущений, но их градиенты близки к окружающим, что справедливо, например, для финальной стадии развития турбулентности в стратифицированной среде.

Введем операторы  $G_1 = \partial/\partial t - \nu \Delta$ ,  $G_2 = \partial/\partial t - \chi_T \Delta$ ,  $G_3 = \partial/\partial t - \chi_M \Delta$ , тогда в операторном виде систему (13) можно переписать следующим образом:

$$G_1 \vec{v} = -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{\rho \vec{g}}{\rho_0} + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} [\operatorname{rot} \vec{b} \times \vec{B}_0], \quad (14)$$

$$G_2 \rho = \frac{\rho_0 N^2}{g} w, \quad (15)$$

$$G_3 \vec{b} = \operatorname{rot}[\vec{v} \times \vec{B}_0], \quad (16)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (17)$$

Применяя оператор  $\text{rot}$  к уравнению (14), избавляемся от слагаемого, содержащего давление. Затем действуем операторами  $G_2$  и  $G_3$  на полученное уравнение, используем уравнения (15) и (16) и после применения операции  $\text{rot}$  получаем

$$G_1 G_2 G_3 \text{rot rot } \vec{v} = N^2 G_3 \text{rot rot } \left( w \frac{\vec{g}}{g} \right) + \frac{1}{\mu_0 \rho_0} G_2 \text{rot rot } \left[ \text{rot rot} [\vec{v} \times \vec{B}_0] \times \vec{B}_0 \right]. \quad (18)$$

Рассмотрим слагаемые, находящиеся в правой части этого уравнения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \text{rot rot } \left( w \frac{\vec{g}}{g} \right) = -\nabla \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\vec{g}}{g} \Delta w. \\ 2) \quad & \text{rot rot } \left[ \text{rot rot} [\vec{v} \times \vec{B}_0] \times \vec{B}_0 \right] = -(B_0 \cdot \nabla)^2 \Delta \vec{v}. \end{aligned}$$

Подробный вывод приведен в Приложении. Таким образом, окончательно получаем

$$G_1 G_2 G_3 \Delta \vec{v} = N^2 G_3 \left( \nabla \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\vec{g}}{g} \Delta w \right) + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla)^2}{\mu_0 \rho_0} G_2 \Delta \vec{v}. \quad (19)$$

Отметим, что это уравнение совпадает с уравнением, приведенным в работе [25], в которой изучались волновые движения невязкой, нетеплопроводной, идеально проводящей жидкости при наличии вращения, магнитного поля и стратификации, если принять угловую скорость вращения равной нулю.

Для вертикальной составляющей скорости  $W$  получаем

$$G_1 G_2 G_3 \Delta w + N^2 G_3 \Delta_h w - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla)^2}{\mu_0 \rho_0} G_2 \Delta w = 0, \quad (20)$$

где  $\Delta_h$  – горизонтальный аналог оператора Лапласа.

Аналогичное выражение можно получить для возмущений плотности:

$$G_1 G_2 G_3 \Delta \rho + N^2 G_3 \Delta_h \rho - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla)^2}{\mu_0 \rho_0} G_2 \Delta \rho = 0. \quad (21)$$

Видно, что это уравнение совпадает с уравнением для вертикальной компоненты скорости. Интересно отметить, что аналогичная ситуация наблюдается и при рассмотрении развития возмущений вязкой, теплопроводной жидкости при наличии стратификации [4].

## 2. АНАЛИЗ ДИАГРАММЫ ДВИЖЕНИЙ

Будем рассматривать процессы, происходящие при отсутствии тепловой и магнитной диффузии. Полагая  $\chi_T = 0$  и  $\chi_M = 0$  в уравнении, описывающем поведение вертикальной компоненты скорости (20), получаем

$$G_1 \tilde{G}_2 \Delta w + N^2 \Delta_h w - \frac{(\vec{B}_0 \cdot \nabla)^2}{\mu_0 \rho_0} \Delta w = 0, \quad (22)$$

где оператор  $\tilde{G}_2 = \partial / \partial t$ .

Решение этого уравнения ищем в виде  $w = W(t) \exp(i\vec{k}\vec{r})$ , тогда получаем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} + \nu k^2 \right) W + \\ & + \frac{N^2 m^2}{k^2} W + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2}{\mu_0 \rho_0} W = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $m = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$  – горизонтальное волновое число. Вводя безразмерное время  $\tau = \nu k^2 t$ , находим

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} + \frac{dW}{d\tau} + \left( \frac{N^2 m^2}{\nu^2 k^6} + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2}{\mu_0 \rho_0 \nu^2 k^4} \right) W = 0. \quad (24)$$

Отметим, что при  $\vec{B}_0 = 0$  это уравнение совпадает с аналогичным уравнением, приведенным в [4, 5].

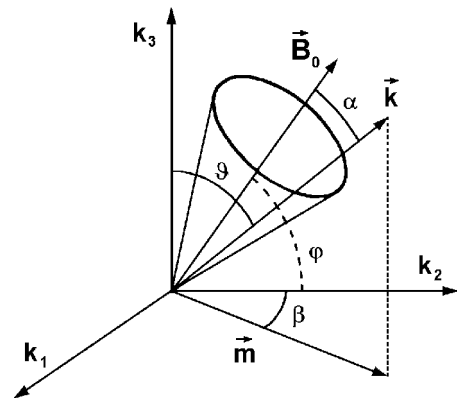


Рис. 1. Векторы  $B_0$  и  $k$  в пространстве  $(k_1, k_2, k_3)$

На рис. 1 показано расположение векторов  $\vec{B}_0$  и  $\vec{k}$  в пространстве  $(k_1, k_2, k_3)$ . Угол  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{B}_0$  и  $\vec{k}$ ;  $\vartheta$  – угол между  $\vec{k}$  и осью  $z$ ;  $\phi$  – угол между  $\vec{B}_0$  и осью  $y$ ;  $\vec{m}$  – проекция вектора  $\vec{k}$  на плоскость  $(k_1, k_2)$ ;  $\beta$  – угол между  $\vec{m}$  и осью  $y$ .

Система координат выбрана так, что вектор  $\vec{B}_0$  находится в плоскости  $(y, z)$ , ось  $z$  – направлена вертикально вверх, ось  $x$  – направлена перпендикулярно к осям  $y$  и  $z$ .

Решение уравнения (24) ищем в виде  $\exp(\lambda\tau)$ , откуда

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{N^2 m^2}{\nu^2 k^6} + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2}{\mu_0 \rho_0 \nu^2 k^4} = 0. \quad (25)$$

Находим решение

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left( \frac{N^2 m^2}{\nu^2 k^6} + \frac{(B_0 \cdot \vec{k})^2}{\mu_0 \rho_0 \nu^2 k^4} \right)}. \quad (26)$$

Отсюда следует, что движение носит волновой характер, если дискриминант под корнем отрицательный, и аperiодический, если дискриминант положительный, т. е. граница существования волн определяется уравнением

$$1 = 4 \left( \frac{N^2 m^2}{\nu^2 k^6} + \frac{(B_0 \cdot \vec{k})^2}{\mu_0 \rho_0 \nu^2 k^4} \right). \quad (27)$$

Рассмотрим это уравнение. Введем характерный масштаб длины  $L$  и представим уравнение в следующей безразмерной форме:

$$m^2 = \frac{\nu^2}{4N^2 L^4} k^6 - \frac{B_0^2 \cos^2 \alpha}{\mu_0 \rho_0 N^2 L^2} k^4. \quad (28)$$

Введя обозначения  $k^2 = p$ ,  $m^2 = q$ ,  $k_3^2 = r$ , ( $p = q + r$ ,  $q \leq p$ ),  $a = \nu^2 / 4N^2 L^4 > 0$ ,  $b = B_0^2 \cos^2 \alpha / \mu_0 \rho_0 N^2 L^2 > 0$ , получим

$$q = ap^3 - bp^2. \quad (29)$$

На рис. 2 изображен график функции (29). Вертикальной штриховкой обозначена область волновых движений при наличии магнитного поля, двойной штриховкой – область волновых движений в отсутствие магнитного поля, т. е. когда  $b = 0$ . Границы раздела между волновыми движениями и неволновыми при отсутствии магнитного поля нигде не пересекаются с аналогичной границей при наличии поля (действительно, единственная точка пересечения  $q = p = 0$ ). Откуда можно сделать вывод, что область волновых движений в отсутствие магнитного поля лежит целиком внутри области волновых движений при наличии поля и является ее подобластью.

Точка пересечения  $p_{cr}^+$  кривой (29) с осью  $p$  определяется выражением  $p_{cr}^+ = b/a = 4B_0^2 \cos^2 \alpha L^2 / \mu_0 \rho_0 \nu^2$ . Откуда получаем первую характерную точку на диаграмме движений  $(k_3^2)_{cr} = p_{cr}^+$ .

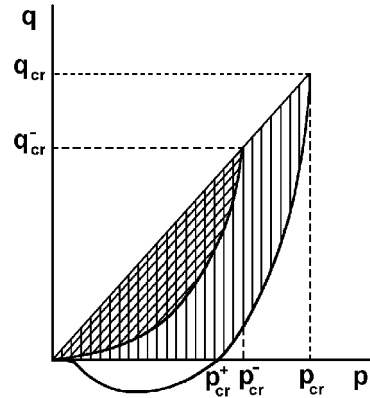


Рис. 2. Диаграмма движений в пространстве  $(q, p)$

Из условия  $q \leq p$  можно найти вторую критическую точку  $q_{cr} = p_{cr}$ . Из уравнения (29) получаем

$$aq_{cr}^3 - bq_{cr}^2 - q_{cr} = 0,$$

откуда (в размерном виде)

$$m_{cr}^2 = \frac{2B_0^2 \cos^2 \alpha}{\mu_0 \rho_0 \nu^2} + 2\sqrt{\left( \frac{B_0^2 \cos^2 \alpha}{\mu_0 \rho_0 \nu^2} \right)^2 + \frac{N^2}{\nu^2}}. \quad (30)$$

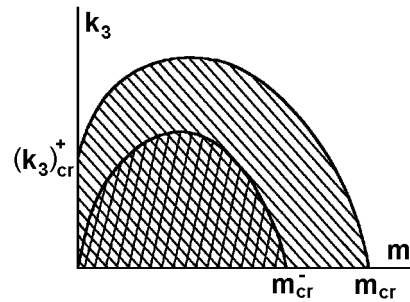


Рис. 3. Диаграмма движений в пространстве  $(m, k_3)$ . Двойная штриховка соответствует  $B_0 = 0$

На рис. 3 схематически изображены диаграммы движений в пространстве  $(m, k_3)$ . Одинарной штриховкой – область волновых движений при наличии магнитного поля, а двойной штриховкой обозначена область существования волновых движений при отсутствии магнитного поля.

Из рис. 2 и 3 видно, что при  $m > m_{cr} = \sqrt{q_{cr}}$  волновых движений в среде не возникает. В отсутствие магнитного поля  $p_{cr}^- = q_{cr}^- = 2N/\nu$ . Другими словами,  $m > m_{cr}^- = \sqrt{q_{cr}^-}$  волновые движения в стратифицированной среде отсутствуют

(см. [4, 5]). Граница раздела между волновыми и апериодическими движениями в этом случае может быть найдена из решения уравнения (27), полагая в нем  $B_0 = 0$ :

$$k_3^2 = \left( \frac{2Nm}{\nu} \right)^{2/3} - m^2. \quad (31)$$

Присутствие магнитного поля расширяет область существования волновых движений в данном случае.

Анализ показывает, что в зависимости от соотношения параметров, связанных с  $B_0$  и  $N$ , граница раздела волновых и апериодических движений на диаграмме движений в пространстве  $(m, k_3)$  при наличии магнитного поля и стратификации может иметь или не иметь максимум. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Преобразование  $(q, r)$  в  $(m, k_3)$  при  $m > 0$  и  $k_3 > 0$  – взаимно-однозначное, т.е. если функция  $k_3(m)$  имеет максимум, то и функция  $r(q)$  имеет максимум, и наоборот.

Найдем критерий существования максимума в переменных  $(q, r)$ . Запишем уравнение (29) в следующем виде:

$$q = a(q+r)^3 - b(q+r)^2. \quad (32)$$

Находим производную

$$\frac{dr}{dq} = \frac{1}{3ap^2 - 2bp} - 1. \quad (33)$$

При  $p = p_{cr}^+ = b/a$  знаменатель этого выражения равен  $b^2/a$ . В рассматриваемой области (см. рис. 2)  $p > p_{cr}^+$ . Тогда  $p$  растет с ростом  $q$ , т.е. производная  $dr/dq$  падает с ростом  $q$ . Отсюда следует, что  $dr/dq < a/b^2 - 1$ . Условие существования максимума имеет вид  $dr/dq = 0$ . Тогда максимум существует, если  $b^2/a < 1$  или

$$\frac{B_0^2 \cos^2 \alpha}{\mu_0 \rho_0} \frac{1}{N\nu} < \frac{1}{2}.$$

Введем в рассмотрение скорость распространения волн Альфвена [14]  $V_a = B_0/\sqrt{\mu_0 \rho_0}$ , характерный вязкий масштаб скорости стратифицированной жидкости [5]  $V_\nu = \sqrt{N\nu}$  и их отношение  $R = V_a/V_\nu$ . Отметим, что уравнение (28), определяющее границу между волновым и апериодическим режимами, в этом случае может быть представлено в виде

$$m^2 = \frac{k^6}{4} - R^2 \cos^2 \alpha k^4. \quad (34)$$

Условие существования максимума будет

$$R^2 \cos^2 \alpha < 0.5. \quad (35)$$

Положение максимума определяется условием  $dr/dq = 0$ . Получаем

$$\begin{aligned} p_{max} &= \frac{b + s_b}{3a}, \\ q_{max} = m_{max}^2 &= \frac{3as_b - 2b^2 s_b - 2b^3}{27a^2}, \\ r_{max} = k_{max}^2 &= \frac{2(b^2 + 3a)s_b + 9ba + 2b^3}{27a^2}, \end{aligned}$$

где  $s_b = \sqrt{b^2 + 3a}$ .

Таким образом, при наличии магнитного поля граница существования волновых движений расширяется. При этом, как известно [5], при отсутствии магнитного поля, когда  $m = 0$ , т.е. при бесконечных горизонтальных масштабах, волновых движений не возникает при любых вертикальных масштабах возмущений. В присутствии магнитного поля, однако, волновые движения исчезают только начиная с  $k_3 = (k_3)_{cr}^+$ . Если ввести в качестве характерного масштаба длины вязкий масштаб стратифицированной жидкости [5]  $L_\nu = \sqrt{\nu/N}$ , то  $(k_3)_{cr} = 2R \cos \alpha$ . Другими словами, при бесконечном горизонтальном масштабе и при вертикальных размерах  $h > h_{cr} = 2\pi/(k_3)_{cr}$  волновые движения существуют и эти движения есть по сути альфвеновские волны. В то же время, при горизонтальных размерах меньше  $L_{cr} = 2\pi/m_{cr}$  и при бесконечном вертикальном масштабе волновые движения перестают существовать. Указанный критический горизонтальный масштаб уменьшается с появлением магнитного поля.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Для численного построения вышеуказанных диаграмм будем использовать в качестве характерного масштаба длины вязкий масштаб стратифицированной жидкости  $L_\nu$ . Тогда уравнение (28) может быть представлено в виде

$$\frac{k^6}{4} = m^2 + R^2 k^4 \cos^2 \alpha. \quad (36)$$

Будем рассматривать случай  $\cos \alpha = \text{const}$ , т.е. все волновые вектора лежат на конусе, ось которого направлена вдоль магнитного поля и угол между осью и образующей равен  $\alpha$ . Учитывая, что  $m = k \sin \vartheta$  и  $k_3 = k \cos \vartheta$ , уравнение (36) будет

$$k^4 - 4R^2 k^2 \cos^2 \alpha - 4 \sin^2 \vartheta = 0. \quad (37)$$

Его решение имеет вид

$$k = \sqrt{2 \left( R^2 \cos^2 \alpha + \sqrt{R^4 \cos^4 \alpha + \sin^2 \vartheta} \right)}. \quad (38)$$

Таким образом, получено параметрическое уравнение рассматриваемых диаграмм.

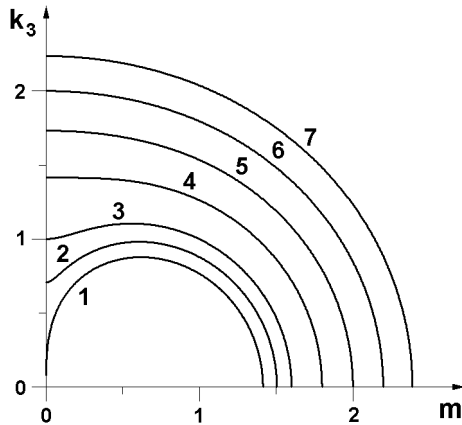


Рис. 4. Диаграмма движений при  $\cos \alpha = 1/2$ :  
 1 -  $R = 0$ ; 2 -  $R = 0.71$ ; 3 -  $R = 1$ ; 4 -  $R = 1.41$ ;  
 5 -  $R = 1.73$ ; 6 -  $R = 2.0$ ; 7 -  $R = 2.24$

На рис. 4 представлены результаты расчета семейства диаграмм для различных значений  $R$ , которое характеризует отношение скоростей альфвеновских волн и вязких скоростей стратифицированной жидкости.

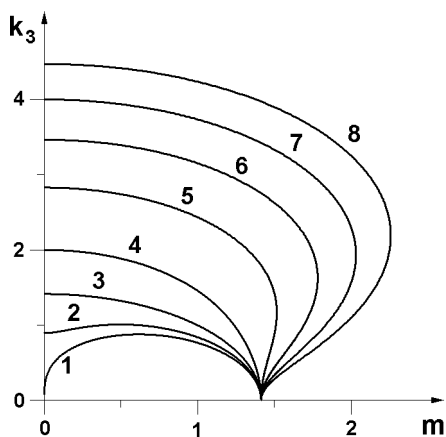


Рис. 5. Диаграмма движений при  $\varphi = 90^\circ$ :  
 1 -  $R = 0$ ; 2 -  $R = 0.44$ ; 3 -  $R = 0.71$ ; 4 -  $R = 1.5$ ;  
 5 -  $R = 1.41$ ; 6 -  $R = 1.73$ ; 7 -  $R = 2.08$ ; 8 -  $R = 2.24$

Здесь справедливы все полученные ранее выводы относительно критических значений волновых

чисел, о наличии или отсутствии максимума кривых, о влиянии магнитного поля на диаграмму движений и др. Отметим только, что по мере роста величины  $R$  влияние магнитного поля становится доминирующим и форма границы между волновым и аperiodическим режимами становится близкой к четверти окружности, которая описывается уравнением (см.(28))

$$k_3 = \sqrt{4 \frac{B_0^2 \cos^2 \alpha L^2}{\mu_0 \rho_0 \nu^2} - m^2}.$$

Условие  $\cos \alpha = \text{const}$  накладывает определенные ограничения на расположение волновых векторов относительно направления магнитного поля. Рассмотрим некоторые частные случаи со снятым ограничением, т.е.  $\cos \alpha \neq \text{const}$ . Нетрудно заметить, что

$$\cos \alpha = \sin \vartheta \cos \beta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \vartheta. \quad (39)$$

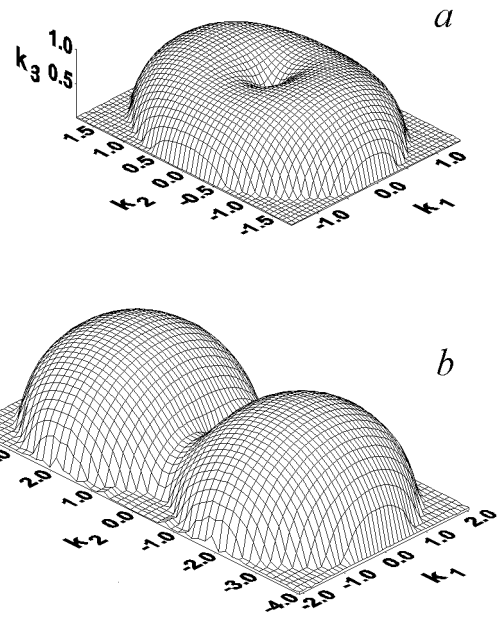


Рис. 6. Диаграмма движений при  $\varphi = 0^\circ$ :  
 а - соответствует значению  $R = 0.5$ ,  
 б - соответствует  $R = 4$

Рассмотрим случай, когда  $\varphi = 90^\circ$ , т. е. вектор магнитной индукции направлен вдоль оси  $z$ . Тогда, как следует из соотношения (39),  $\cos \alpha$  не зависит от азимутального угла  $\beta$  и  $\cos \alpha = \cos \vartheta$ . Тогда выражение (38) можно представить в виде

$$k = \sqrt{2 \left( R^2 \cos^2 \vartheta + \sqrt{R^4 \cos^4 \vartheta + \sin^2 \vartheta} \right)}. \quad (40)$$

Опять получаем параметрическое уравнение, которое решаем численно. Результаты расчета диаграмм движений для различных значений  $R$  представлены на рис. 5.

Рассмотрим теперь случай  $\varphi = 0$ , т. е. вектор магнитной индукции  $\vec{B}_0$  направлен горизонтально вдоль оси  $y$ .

Из соотношения между углами (39) следует, что  $\cos \alpha = \sin \vartheta \cos \beta$ . Тогда уравнение (38) примет вид

$$k^2 = 2 \left( R^2 c_s^2 + \sqrt{R^4 c_s^4 + \sin^2 \vartheta} \right), \quad (41)$$

где  $c_s = \sin \vartheta \cos \beta$ , и оно является по сути уравнением поверхности, разделяющей область волновых и апериодических движений, в полярных координатах в пространстве волновых чисел.

Построенная трехмерная диаграмма в виде поверхности раздела для  $R = 0.5$  изображена на рис. 6, а и для  $R = 4$  на рис. 6, б. Видно, что по мере роста влияния магнитного поля по сравнению с эффектами стратификации (увеличение значения  $R$ ) форма поверхности раздела между волновым и апериодическим режимами существенно образом изменяется. Она теряет форму близкую к симметричной, вытягивается вдоль оси  $k_2$ , одновременно увеличиваясь в размерах.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе получено уравнение, описывающее поведение малых возмущений скорости вязкой, электропроводной, стратифицированной жидкости, находящейся в поле гравитационных сил при наличии внешнего магнитного поля. Использованы приближения Буссинеска и магнитогидродинамическое приближение.

В пространстве волновых чисел построена диаграмма типов движений для различных значений напряженности магнитного поля и частоты плавленности. Найдено выражение, характеризующее границу раздела между волновым и апериодическим режимами движения. Показано, что вид этой кривой определяется отношением скорости распространения волн Альфвена и вязким масштабом скорости стратифицированной жидкости. Эта кривая, описывающая упомянутую границу, может иметь максимум в зависимости от параметров среды и размеров возмущений. Найдено условие существования указанного максимума.

Продемонстрировано, что наличие магнитного поля приводит к расширению зоны волновых движений жидкости. Данные диаграммы могут слу-

жить для диагностики существования того или иного вида движения в зависимости от масштабов возмущений и параметров среды.

#### 5. ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим выражение

$$\vec{S} = \text{rot} \left( \text{rot} [\text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0 \right).$$

Введем в рассмотрение антисимметричный тензор третьего ранга  $\epsilon_{ijk}$  [26]. Тогда векторное произведение двух векторов можно записать в виде

$$[\vec{A} \times \vec{B}] = \vec{F}, \quad F_i = \epsilon_{ijk} A^j B^k.$$

Произведение  $\epsilon_{ijk}$  и  $\epsilon_{ilm}$  будет

$$\epsilon_{ijk} \cdot \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl},$$

где  $\delta$  – символ Кронекера [26]. Используя представление векторного произведения с применением тензора  $\epsilon_{abc}$ , запишем искомое выражение в виде

$$\begin{aligned} S^\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left( \text{rot} [\text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}_0)] \times \vec{B}_0 \right)^\gamma = \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \epsilon_{\gamma\delta\nu} \frac{\partial}{\partial x_\delta} [\text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}_0)]^\nu \times \vec{B}_0^\nu = \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\delta\nu} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \epsilon_{\nu\lambda\tau} [\text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}_0)]^\lambda B^\tau = \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\delta\nu} \epsilon_{\nu\lambda\tau} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} B^\tau \epsilon_{\lambda ab} \frac{\partial}{\partial x_a} (\text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}_0])^b = \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\delta\nu} \epsilon_{\nu\lambda\tau} \epsilon_{\lambda ab} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_a} \times \\ &\quad \times B^\tau \epsilon_{bcd} \frac{\partial}{\partial x_c} [\vec{v} \times \vec{B}_0]^d = \\ &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\gamma\delta\nu} \epsilon_{\nu\lambda\tau} \epsilon_{\lambda ab} \epsilon_{bcd} B^\tau \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} \epsilon_{dkl} v^k B^l. \end{aligned}$$

Осуществляя свертку индексов, получаем

$$\begin{aligned} S^\alpha &= (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\delta}) (\delta_{\tau a} \delta_{\nu b} - \delta_{\tau b} \delta_{\nu a}) \times \\ &\quad \times (\delta_{bk} \delta_{cl} - \delta_{bl} \delta_{ck}) B^\tau B^l \times \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} v^k = \\ &= (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\delta}) (\delta_{\tau a} \delta_{\nu b} - \delta_{\tau b} \delta_{\nu a}) \times \\ &\quad \times \left( B^\tau B^c \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} v^b - \right. \\ &\quad \left. - B^\tau B^b \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} v^c \right). \end{aligned}$$



Учтем, что  $\partial v^c / \partial x_c = 0$  (условие несжимаемости):

$$\begin{aligned} S^\alpha &= (\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\delta}) \times \\ &\times \left( B^a B^c \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} v^\nu - \right. \\ &\left. - B^b B^c \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_c} v^b \right) = \\ &= B^a B^c \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} v^\nu - \\ &- B^a B^c \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} v^\alpha - \\ &- B^b B^c \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x_c} v^b + \\ &+ B^b B^c \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_c} v^b = \\ &= B^a B^c \frac{\partial}{\partial x_a} \frac{\partial}{\partial x_c} \frac{\partial}{\partial x_\delta} \frac{\partial}{\partial x_\delta} v^\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{S} = -(\vec{B}_0 \cdot \nabla)^2 \Delta \vec{v}.$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\vec{D} = \text{rot} \left[ \text{rot} \left( w \frac{\vec{g}}{g} \right) \right].$$

Имеем

$$\begin{aligned} D^i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \text{rot} \left( w \frac{\vec{g}}{g} \right) \right]^k = \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \epsilon_{klm} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( w \frac{\vec{g}}{g} \right)^m = \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( w \frac{\vec{g}}{g} \right)^m = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial z} - \left( \frac{\vec{g}}{g} \right)^i \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\vec{D} = -\nabla \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\vec{g}}{g} \Delta w.$$

1. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 1, 2.- М.: Наука, 1981.- С. 365, 480.
2. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.- Л.: Гидрометеиздат, 1981.- 302 с.
3. Черкесов Л.В. Гидродинамика поверхностных и внутренних волн.- К.: Наук. думка, 1976.- 364 с.
4. Pearson H.J., Linden P.F. The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid // J. Fluid Mech.- 1983.- **134**.- P. 195-203.

5. Мадерич В.С., Никишов В.И., Стеценко А.Г. Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.- К.: Наук. думка, 1988.- 239 с.
6. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность.- Л.: Гидрометеиздат, 1981.- 320 с.
7. Мадерич В.С., Никишов В.И. Перемешивание и рестратификация в устойчиво стратифицированной жидкости // Гидромеханика.- 1996.- No. 70.- С. 69-77.
8. Riley J.J., Lelong M.-P. Fluid motion in the presence of strong stable stratification // Ann. Rev. Fluid Mech.- 2000.- **32**.- P. 613-657.
9. Пантелеев Н.А., Охотников И.Н., Слепышев А.А. Мелкомасштабная структура и динамика океана.- К.: Наук. думка, 1993.- 195 с.
10. Никишов В.И., Христюк Р.В. Анализ движений вязкой стратифицированной жидкости при наличии вращения // Прикладна гідромеханіка.- 2000.- **2 (74)**, N 4.- С. 48-57.
11. Левич В.Г., Гуревич Ю.Я. Влияние магнитного поля на поверхностные волны в проводящей жидкости // ДАН СССР.- 1962.- **143**, N 1.- С. 64-67.
12. Shercliff J.F. Anisotropic surface waves under a vertical magnetic force // J. Fluid Mech.- 1969.- **38**, N 2.- P. 353-364.
13. Антимиров М.Я., Володко И.М. Свободная тепловая магнитогидродинамическая конвекция над линейным и пристенным источником тепла в сильном магнитном поле // Магнитная гидродинамика.- 1993.- N 1.- С. 24-30.
14. Саттон Дж., Шерман А. Основы технической магнитной газодинамики.- М.: Мир, 1968.- 492 с.
15. Брановер Г.Г., Цинобер А.Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред.- М.: Наука, 1970.- 379 с.
16. Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г. Космическая электродинамика.- М.: Мир, 1967.- 260 с.
17. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики.- М.: Мир, 1967.- 320 с.
18. Половин Р.В., Демуцкий В.П. Основы магнитной гидродинамики.- М.: Энергоатомиздат, 1987.- 206 с.
19. Cabannes H. Theoretical magnetofluidynamics.- N.- Y. & L.: Academic Press, 1970.- 233 p.
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.- М.: Физматлит, 2001.- 652 с.
21. Campos L.M.D.C. Exact and approximate methods for Alfvén waves in dissipative atmospheres // Wave Motion.- 1993.- N 17.- P. 101-112.
22. Hamabata H. Nonlinear hydromagnetic waves in a thermally stratified cylindrical fluid: Exact helically symmetric solutions // Phys. of Plasmas.- 1993.- **5**, N 7.- P. 2086-2092.
23. Hamabata H. Nonlinear hydromagnetic waves in a thermally stratified spherical shell: Exact toroidal field solutions // Phys. of Plasmas.- 1994.- **6**, N 8.- P. 2574-2578.
24. Chakraborty B.B. Hydromagnetic Rayleigh-Taylor instability of a rotating stratified fluid // Phys. of Fluids.- 1982.- **25**, N 5.- P. 743-747.
25. Hide R. On hydromagnetic waves in a stratified rotating incompressible fluid // J. Fluid Mech.- 1969.- **39**, N 2.- P. 283-287.
26. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ.- М.: 1963, Физматгиз.- 411 p.