УДК 519.85

О. О. Ємець, д-р фіз.-мат. наук,
О. О. Черненко, канд. фіз.-мат. наук
Полтавський університет економіки і торгівлі, м. Полтава

ОПТИМІЗАЦІЯ ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ЗА ДОДАТКОВИХ ЛІНІЙНИХ ОБМЕЖЕНЬ НА ДИСКРЕТНІЙ МНОЖИНІ

У статті пропонується точний комбінаторний метод розв'язування задачі дискретної оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі та додатковими лінійними обмеженнями. Побудовано алгоритм методу гілок та меж для розв'язування такої задачі.

Ключові слова: *метод гілок та меж, дробово-лінійна функція, дискретна оптимізація.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Багато задач дослідження операцій [1—11] (наприклад, планування та керування у виробництві, розподіл ресурсів та ін.) описуються математичними моделями дискретного програмування. Крім того, якщо мова йде про екстремальні задачі, цільова функція може бути дробово-лінійною. Враховуючи це, актуальними залишаються розробка методів та алгоритмів розв'язування задач з дробово-лінійною цільовою функцією та проблема пошуку більш ефективних алгоритмів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Побудовано методи та алгоритми розв'язування дискретних задач оптимізації з лінійною функцією цілі (див., наприклад, [1; 2; 8—11]). Розробці методів розв'язування задач з дробово-лінійною цільовою функцією, в тому числі на комбінаторних множинах, присвячено роботи [3—6].

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. В літературі не зустрічаються постановки задач дискретної оптимізації з дробово-лінійною цільовою функцією, нічого не відомо про методи розв'язування таких задач.

Мета даної статті — запропонувати постановку задачі оптимізації дробово-лінійної цільової функції за додаткових лінійних обмежень на дискретній множині; поширити метод гілок та меж, що ґрунтується на ідеях Ленда та Дойга, для їх розв'язування.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням отриманих наукових результатів. Розглянемо задачу вигляду: знайти упорядковану пару $\left\langle f\left(x^*\right),\ x^*\right\rangle$, таку що

$$f(x^*) = \max_{x \in R^n} f(x) = \max_{x \in R^n} \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} g_j x_j + g_0}, \quad x^* = \arg\max_{x \in R^n} f(x) \tag{1}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \forall i \in J_m ; \tag{2}$$

$$x_j \in D^j = \left\{ d_{j1}, d_{j2}, ..., d_{jm_j} \right\}, \ \forall j \in J_n , \tag{3}$$

де $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n \right)$, $x_j \ge 0 \ \ \forall j \in J_n$, c_j, g_j, a_{ij}, b_i — дійсні константи $\forall i \in J_m$, $\forall j \in J_n$. J_k позначає множину перших k натуральних чисел $\left\{ 1, 2, ..., k \right\}$.

Нехай елементи множини D^j упорядковані за зростанням:

$$0 \le d_{j1} < d_{j2} < ... < d_{jm_j} .$$

Задача (1)—(3) може бути розв'язана шляхом переходу до релаксованої задачі: умову (3) послабимо, замінивши її

$$x_j \le d_{jm_j} \ \ \forall j \in J_n . \tag{4}$$

Застосовуючи до задачі (1), (2), (4) відображення ψ :

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} g_j x_j + g_0}, \ y_j = x_j y_0 \ \ \forall j \in J_n, \ x \in R^n , \tag{5}$$

перейдемо до задачі з лінійною функцією цілі: знайти

$$F(y^*) = \max_{y \in R^{n+1}} F(y) = \max_{y \in R^{n+1}} \sum_{j=0}^{n} c_j y_j , \ y^* = \arg\max_{y \in R^{n+1}} F(y) \tag{6}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 \le 0 , \ \forall i \in J_m , \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} g_j y_j + g_0 y_0 = 1, \tag{8}$$

$$y_j \le d_{jm_j} y_0 \quad \ \forall j \in J_n , \tag{9}$$

де $y = (y_0, y_1, ..., y_n) \in R^{n+1}$, $y_j \ge 0$, $\forall j \in J_n^0 = J_n \cup \left\{ 0 \right\}$.

Зауважимо, що $f(x^*) = F(y^*)$, де $f(x^*)$ — оптимальний розв'язок задачі (1)—(3), а $F(y^*)$ — задачі (6)—(9).

Для розв'язування задачі (1)—(3) пропонується наступний алгоритм методу гілок та меж (МГМ), основна ідея якого основана на алгоритмі Ленд та Дойг [10]. В алгоритмі описані конкретні правила розбиття вихідної множини, способи обчислення оцінок та знаходження планів, виходячи зі специфіки задачі (1)—(3).

Алгоритм розв'язування задачі (1)—(3).

Позначимо κ — номер ітерації.

$\kappa = 0$ — ітерація.

0.1. Визначити множину $D^{(0)}$, що задається умовами (2), (4).

0.2. Знайти оптимальний план $x^{(0)}$ задачі (1), (2), (4):

0.2.1. До задачі (1), (2), (4) застосувати перетворення (5), результат — задача (6)—(9).

0.2.2. Розв'язати лінійну задачу (6)—(9).

0.2.3. Якщо (6)—(9) не має розв'язку, то не має розв'язку (1)—(3), інакше нехай $x^{(0)} = y^{(0)}\left(y_0'\right)^{-1}$ — екстремаль (1), (2), (4), де y_0' — перша компонента точки $y^{(0)}$.

0.3. Обчислити оцінку $\xi\left(D^{(0)}\right) = f\left(x^{(0)}\right)$.

0.4. Якщо $x^{(0)} = \left(x_1', ..., x_n'\right)$ задовольняє (3), то $\left\langle f(\bar{x}^{(0)}), \bar{x}^{(0)} \right\rangle$ — розв'язок задачі (1)—(3), інакше перейти на наступну ітерацію.

$\kappa = 1$ — ітерація.

1.1. Визначити найменший індекс j компоненти x_j' точки $\bar{x}^{(0)}$, такої що $x_j' \notin D^j$.

1.2. Записати два обмеження, що відтинають $\bar{x}^{(0)}$:

$$x_j \le d^1_{jm_j}, \tag{10}$$

$$x_j \ge d^2_{jm_j}, \tag{11}$$

$$d^1_{jm_j} = \max\left\{d_{jm_j} \,\middle|\, d_{jm_j} \in D^j,\ d_{jm_j} < x_j',\ \left(x_1', ..., x_{j-1}', d_{jm_j}\right) \in D^j \right\},$$

$$d^2_{jm_j} = \min\left\{d_{jm_j} \,\middle|\, d_{jm_j} \in D^j,\ d_{jm_j} > x_j',\ \left(x_1', ..., x_{j-1}', d_{jm_j}\right) \in D^j \right\}.$$

Розбити множину $D^{(0)}$ на дві підмножини $D_1^{(1)}$ та $D_2^{(1)}$, т. що

$$D_1^{(1)} = \left\{ x \middle| x \in D^{(0)}, x_j \le d_{jm_j}^1 \right\},\ D_2^{(1)} = \left\{ x \middle| x \in D^{(0)}, x_j \ge d_{jm_j}^2 \right\}.$$

1.3. Знайти оптимальний план $x_1^{(1)}$ на множині $D_1^{(1)}$ (задача (1), (2), (4), (10)):

1.3.1. До задачі (1), (2), (4), (10) застосувати перетворення (5), результат — задача (6)—(9) та

$$y_j \le d_{jm_j}^1 y_0. \tag{12}$$

1.3.2. Розв'язати лінійну задачу (6)—(9), (12).

1.3.3. Якщо (6)—(9), (12) не має розв'язку, перейти на крок 1.4, інакше нехай $x_1^{(1)} = y_1^{(1)} \left(y_0^{'} \right)^{-1}$ — екстремаль (1), (2), (4), (10), де $y_0^{'}$ — перша координата точки $y_1^{(1)}$.

1.4. Знайти оптимальний план $x_2^{(1)}$ на множині $D_2^{(1)}$ (задача (1), (2), (4), (11)):

1.4.1. До задачі (1), (2), (4), (11) застосувати перетворення (5), результат — задача (6)—(9) і

$$y_j \ge d_{jm_j}^2 y_0. \tag{13}$$

1.4.2. Розв'язати лінійну задачу (6)—(9), (13).

1.4.3. Якщо (6)—(9), (13) не має розв'язку, перейти на крок 1.5, інакше нехай $x_2^{(1)} = y_2^{(1)} \left(y_0^{'} \right)^{-1}$ — екстремаль (1), (2), (4), (11), де $y_0^{'}$ — перша координата точки $y_2^{(1)}$.

1.5. Якщо жодна із задач вигляду (6)—(9), (12) та (6)—(9), (13) розв'язку не має, то задача (1)—(3) теж розв'язку не має. Інакше обчислити оцінки $\xi\left(D_1^{(1)}\right) = f\left(x_1^{(1)}\right)$, $\xi\left(D_2^{(1)}\right) = f\left(x_2^{(1)}\right)$.

1.6. Якщо $\exists\, x_i^{(1)}, i = \overline{1,2}$, що задовольняє (3), і $\xi\left(D_i^{(1)}\right) = \max\left\{\xi\left(D_1^{(1)}\right), \xi\left(D_2^{(1)}\right)\right\}$, то $\left\langle f\left(\overline{x}_i^{(1)}\right), \overline{x}_i^{(1)} \right\rangle$ — розв'язок задачі (1)—(3), інакше перейти на наступну ітерацію.

Нехай вже проведено κ ітерацій ($\kappa = \overline{0, k-1}$), однак не знайдено оптимальний розв'язок.

$\kappa = k$ — ітерація.

k.1. Вибрати найбільш перспективну підмножину

$$\xi\left(D_v^{(k-1)}\right)=\max_i\left\{\xi\left(D_i^{(k-1)}\right)\right\}=\max_{D_i}\left\{f\left(x_i^{(k-1)}\right)\right\}.$$

Визначити найменший індекс j компоненти $x_j^{'}$ точки $x^{(k-1)}$, такої що $x_j^{'}\notin D^j$.

k.2. Розбити множину $D_v^{(k-1)}$ на підмножини $D_{v_1}^{(k)}$ та $D_{v_2}^{(k)}$, т. що

$$D_{v_1}^{(k)}=\left\{x\left|x\in D_v^{(k-1)},x_j\le d_{jm_j}^1\right.\right\},\ D_{v_2}^{(k)}=\left\{x\left|x\in D_v^{(k-1)},x_j\ge d_{jm_j}^2\right.\right\}.$$

k.3. Знайти оптимальний план $x_{v,1}^{(k)}$ на $D_{v_1}^{(k)}$ (задача (1), (2), (4), (10)).

k.4. Знайти оптимальний план $x_{v,2}^{(k)}$ на $D_{v_2}^{(k)}$ (задача (1), (2), (4), (11)).

k.5. Якщо жодна із задач вигляду (1), (2), (4), (10) та (1), (2), (4), (11) розв'язку не має, то вибрати для подальшого розбиття іншу множину з оптимальним планом, знайденим на (k–1)-ій ітерації (крок (k–1).6). Інакше – обчислити оцінки $\xi\left(D_{v_1}^{(k)}\right)=f\left(x_{v,1}^{(k)}\right)$, $\xi\left(D_{v_2}^{(k)}\right)=f\left(x_{v,2}^{(k)}\right)$.

k.6. Якщо $\exists\, x_{v,i}^{(k)},\ i=\overline{1,2}$, що задовольняє (3), і $\xi\left(D_{v_i}^{(k)}\right)=$ $=\max\left\{\xi\left(D_{v_1}^{(k)}\right),\xi\left(D_{v_2}^{(k)}\right)\right\}$, то $\left\langle f\left(\overline{x}_{v,i}^{(k)}\right),\overline{x}_{v,i}^{(k)}\right\rangle$ — розв'язок задачі (1)—(3), інакше перейти на наступну (k+1)-у ітерацію.

Твердження. Алгоритм МГМ, застосовний до задачі (1)—(3), знаходить її оптимальний розв'язок.

Доведення. Враховуючи спосіб галуження — для подальшого розбиття вибирають множину D_i з найбільшою оцінкою, тобто з найбільшим значенням цільової функції (крок k.1 алгоритму), та правила відсікання (за кроком k.2 алгоритму відсікаються тільки ті множини D_i, які не містять точок, що задовольняють (4)), маємо, що $\max\left\{\max\limits_{x\in D_i}f\left(x\right)\right\}=f\left(x^*\right)$. Для ітерацій $\kappa>1$ у випадку, якщо вибрана область D_i не містить точок з цілочисловими координатами, використовуємо для подальшого галуження множину з меншою оцінкою, знайденою на попередній ітерації (крок k.2 алгоритму).

Твердження доведено.

Висновки з даного дослідження. Отже, в роботі побудовано алгоритм методу гілок та меж для розв'язування задач оптимізації дробово-лінійної цільової функції за додаткових лінійних обмежень на дискретній множині.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямі. Доцільно в подальшому запрограмувати запропонований метод та провести оцінку ефективності алгоритму.

Список використаних джерел:

1. Сергиенко И. В. Приближенные методы решения дискретных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, Т. Т. Лебедева, В. А. Рощин. — К. : Наук. думка, 1980. — 266 с.
2. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.
3. Ємець О. О. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями / О. О. Ємець, Л. М. Колєчкіна. — К. : Наук. думка, 2005. — 117 с.
4. Емец О. А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях / О. А. Емец, О. А. Черненко. — К. : Наук. думка, 2011. — 154 с.
5. Емец О. А. Оптимизация на полиперестановках / О. А. Емец, Н. Г. Романова. — К. : Наук. думка, 2010. — 105 с.
6. Лінійні умовні задачі комбінаторної оптимізації на переставленнях та їх розв'язування / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Т. О. Парфьонова, Т. В. Чілікіна // Штучний інтелект. — 2011. — № 2. — С. 131–135.
7. Ємець О. О. Транспортні задачі комбінаторного типу: властивості, розв'язування, узагальнення : монографія / О. О. Ємець, Т. О. Парфьонова. — Полтава : ПУЕТ, 2011. — 174 с.
8. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ю. Ю. Финкельштейн. — М. : Наука, 1969. — 368 с.
9. Корбут А. А. Метод ветвей и границ: обзор теории, алгоритмов, программ и приложений / А. А. Корбут, И. Х. Сигал, Ю. Ю. Финкельштейн // Math. Operationsch und Statist., Ser. Optimiz. — 1977. — № 2. — P. 253–280.
10. Land A. H. An autmatic method of solving discrete programming problems / A. H. Land, A. G. Doig // Econometrica. — 1960. — V. 28. — P. 497–520.
11. Линейное и нелинейное программирование / И. Н. Ляшенко, Е. А. Карагодова, Н. В. Черникова. Н. З. Шор. — К. : Вища школа, 1975. — 372 с.

In the article is consider the exact combinatorics method of solving of problem discrete optimization with a linear-fractional objective function and additional linear limitations. The algorithm of branch and bound method is built for the solving of such task.

Key words: *branch and bound method, linear-fractional function, discrete optimization.*

Отримано: 21.03.2012