

УДК 532 + 533.2

## К ДИНАМИКЕ ГРАНУЛИРОВАННЫХ СРЕД В НАКЛОННЫХ ЛОТКАХ

И. И. ИЕВЛЕВ

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина, Харьков

Получено 04.03.2003 ◊ Пересмотрено 15.07.2003

Исследуется динамика потока гранулированной среды в наклонном лотке на основе модели сталкивающихся частиц Оствальда де Уайеля. Поставлена краевая задача для плоского стационарного движения гранулированной среды. Сформулировано граничное условие проскальзывания на твердой стенке. Рассмотрены две задачи: движение гранулированной среды в наклонном лотке при наличии свободной поверхности и аналог течения Пуазейля между твердыми параллельными наклонными стенками. Разработан алгоритм численного решения этих задач. Приведены результаты численного счета в виде графиков для распределения объемной плотности твердых частиц и скорости их движения.

Досліджується потік гранульованого середовища в нахиленому лотку на основі моделі Оствальда де Уайєля частинок, які стикаються. Поставлена крайова задача для плоского стаціонарного руху гранульованого середовища. Сформульована гранична умова прослизання на твердій стінці. Розглянуті дві задачі: рух гранульованого середовища в нахиленому лотку за наявності вільної поверхні і аналог течії Пуазейля між твердими паралельними нахиленими стінками. Розроблено алгоритм чисельного розв'язання цих задач. Наведено результати чисельного розрахунку об'ємної густини твердих частинок і їх швидкості.

In this work explores a stream dynamics of the granular continuum in sloping tray on the Ostwald de Uayel's model of the colliding particles. The boundary problem for the stationary plane motion of granular continuum in sloping tray is formulated. The boundary condition of slipping is formulated. Two problems are considered: the motion of the granular continuum with a free surface in sloping tray and the Puazeil flow. Algorithm of the numerical solving is developed. Results of the calculations are presented on the graphs of the volume density distribution of the particles and velocity field.

### ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются две задачи динамики гранулированной среды в наклонном плоском лотке: поток со свободной поверхностью и поток между двумя параллельными твердыми стенками. Цель работы – определение характеристик потока и выяснение влияния на них эмпирических постоянных, входящих в реологические соотношения. Задачи динамики таких сред находятся в постоянном поле зрения исследователей механики гетерогенных сред и представляют интерес как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения приложений [1, 18]. Гранулированная (или сыпучая) среда является дисперсной системой, дисперсная составляющая которой состоит из достаточно крупных твердых частиц, а несущая среда представляет среду с малой вязкостью и плотностью. Типичные представители таких сред – зерно, сухой рыхлый песок, различные измельченные руды, уголь, сухой раздробленный грунт и т.д. Влиянием несущей фазы на динамику потока можно пренебречь, а взаимодействие частиц твердой фазы проявляется при их столкновении. Эксперименты говорят о том, что характер взаимодействия твердых частиц между собой су-

щественно зависит от характера движения среды [13]. Различают три режима движения. Первый – малоинтенсивное движение, когда твердые частицы близко расположены друг к другу, их относительное перемещение затруднено, послойное движение среды возможно при достижении определенной величины касательных напряжений. Этот режим описывается теорией предельного равновесия [14]. Второй – частицы за счет более интенсивных соударений удаляются друг от друга, появляется свобода перемещения одного слоя относительно другого, среда ведет себя подобно вязкопластическому телу. Третий, соответствует “быстрому” движению среды, когда частицы совершают хаотическое движение подобно частицам газа [9]. Этот режим движения гранулированной среды может быть вызван как быстрым сдвиговым перемещением, так и воздействием вибраций. В последнем случае поток описывается осредненным полем скоростей, а влияние вибраций учитывается посредством зависимости феноменологических коэффициентов (таких как коэффициенты вязкости, теплопроводности и пр.) от амплитудно-частотных характеристик этих вибраций [5, 8, 13, 15]. Необходимость теоретического описания технологических процессов для гранулированных сред привели к появлению большого количества работ, ис-

пользующих эмпирические зависимости при построении реологических соотношений [5, 7, 13, 15]. С точки зрения реологии гранулированные среды являются разновидностью гетерогенных сред, для которых хорошо развиты общие методы построения математической модели [16]. Трудности возникают при решении конкретных задач, когда требуется уточнить реологические соотношения и выбрать соответствующие эмпирические константы [17, 18]. Получение конкретных значений констант требует проведения тонких и дорогостоящих экспериментов. Поэтому представляет интерес любое решение задачи динамики гранулированных сред, позволяющее определить как, хотя бы качественно, влияет на динамику потока тот или иной параметр, входящий в реологические соотношения.

### 1. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

В настоящей работе рассматривается быстрое движение гранулированной среды как потока сталкивающихся твердых частиц. В этом случае применима модель среды Оствальда-де Уаеля, для которой коэффициент сдвиговой вязкости  $\mu$  зависит от тензора скоростей деформаций следующим образом:

$$\mu = m \left| \sqrt{\frac{1}{2} \hat{V} : \hat{V}} \right|^{n-1}. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{V}$  – тензор скоростей деформаций;  $\hat{V} : \hat{V} = V_{ij} V_{ji}$  (по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3),  $V_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций;  $m, n$  – эмпирические постоянные.

В работах Гудвина, Коуина, Сэвиджа строится теоретическая модель гранулированной среды, которая дает объяснение экспериментам, проведенным Бэгнолдом [10–12]. Согласно этой теории, тензор напряжений представляется в виде суммы двух слагаемых – “равновесной” составляющей  $\hat{T}^{(0)}$  и диссипативной  $\hat{T}^{(1)}$ . Среда считается изотропной, а зависимость  $\hat{T}^{(1)}$  от  $\hat{V}$  нелинейной:

$$\hat{T}^{(1)} = a_0 \hat{\delta} + a_1 \hat{V} \quad (2)$$

где  $a_0, a_1$  – величины, зависящие от объемной плотности твердой фазы  $\nu$  и инвариантов  $I_1, I_2, I_3$  тензора скоростей деформаций. Для “равновесной” составляющей тензора напряжений  $\hat{T}^{(0)}$  несвязной гранулированной среды Сэвидж предложил следующее соотношение [12]:

$$\hat{T}^{(0)} = -p \hat{\delta} - 2\alpha \nabla \nu \otimes \nabla \nu, \quad (3)$$

где

$$p = \alpha \left( \frac{1}{b} - 1 \right) |\nabla \nu|^2 \quad (4)$$

играет роль давления;  $\alpha, b$  – эмпирические величины, не зависящие от  $\nabla \nu$ , но, в общем случае, являющиеся функциями  $\nu$ . Если ввести некую абстрактную сыпучую среду, имеющую внутренний угол трения  $\varphi$  такой, что  $b = \sin \theta$ , и находящуюся в равновесии, то напряженное состояние, определяемое соотношениями (3), (4), соответствует кулоновскому условию течения [12]. Это соображение является аргументом в пользу выбора соотношений (3), (4) как основополагающих для быстрых движений гранулированной среды. Здесь еще остается свобода выбора зависимости  $b$  от  $\nu$ . Эксперименты Бэгнолда с суспензиями показали, что  $b$  уменьшается с уменьшением  $\nu$  и обращается в нуль, начиная с некоторого значения, равного  $\nu_0$ . Как частный случай предлагается следующая зависимость [12]:

$$b = k(\nu - \nu_0) \quad (\nu \geq \nu_0), \quad (5)$$

где  $k, \nu_0$  – некоторые константы,  $k \sim 1, 0 < \nu_0 < 1$ .

### 2. ПЛОСКИЙ ПОТОК В НАКЛОННОЙ ЛОТКЕ

Обозначим через  $\gamma$  плотность твердой фазы ( $\gamma = \text{const}$ ). Тогда плотность среды будет  $\rho = \gamma \nu$ . При наличии поля сил тяжести с интенсивностью  $\mathbf{g}$  уравнения неразрывности и движения имеют вид

$$\frac{d\nu}{dt} + \nu \text{div} \mathbf{v} = 0, \quad (6)$$

$$\gamma \nu \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{div} \hat{T} + \gamma \nu \mathbf{g}. \quad (7)$$

Для замыкания системы уравнений необходимо указать зависимости  $a_0, a_1$  от  $\nu$ .

Будем рассматривать стационарное плоское движение среды вдоль оси  $Ox$ , наклоненной под углом  $\theta$  к горизонту (рис. 1). Положим, что  $\mathbf{v} = (u(y), 0, 0)$ ,  $\nu = \nu(y)$ .

В данном случае уравнение (6) выполняется автоматически, левая часть уравнения (7) обращается в нуль, а соотношение (2) приобретает вид [12]

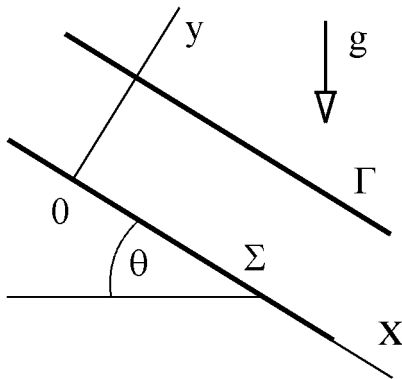


Рис. 1. Схема наклонного лотка

$$\hat{T}^{(1)} = 4\mu_0 I_2 \hat{\delta} + 4\mu_1 |I_2|^{1/2} \hat{V}, \quad (8)$$

где  $\mu_0, \mu_1$  зависят от  $\nu$ . Последнее соотношение соответствует модели Оствальда-де Уаеля, если положить  $\mu_0 = 0$ , а в выражении (1) принять  $m = 2\sqrt{2}\mu_1, n = 2$ . Зависимость  $\mu_1$  от  $\nu$  устанавливается эмпирическим соотношением [17]

$$\mu_1 = m_0 \frac{\nu}{(\nu_b - \nu)}. \quad (9)$$

Здесь  $\nu_b$  – объемная плотность твердой фазы при плотной упаковке;  $m_0$  – константа. Обозначим для краткости

$$\begin{aligned} \Phi &= \alpha \left( \frac{1}{k(\nu - \nu_0)} - 1 \right), \\ \Psi &= \alpha \left( \frac{1}{k(\nu - \nu_0)} + 1 \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Ненулевые составляющие тензора напряжений в данном случае будут

$$\begin{aligned} T_{xx} = T_{zz} &= -\alpha \Phi \left( \frac{d\nu}{dy} \right)^2, \\ T_{xy} = T_{yx} &= \frac{m_0}{2\sqrt{2}} \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}, \\ T_{yy} &= -\alpha \Psi \left( \frac{d\nu}{dy} \right)^2, \end{aligned} \quad (11)$$

а уравнения движения в проекциях на оси координат  $Ox, Oy$  представляются в виде

$$0 = \frac{dT_{yx}}{dy} + \gamma \nu g \sin \theta, \quad 0 = \frac{dT_{yy}}{dy} - \gamma \nu g \cos \theta. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (12) имеют первый интеграл

$$T_{yx} + \operatorname{tg} \theta T_{yy} = \text{const}. \quad (13)$$

На границе  $\Sigma$ , представляющей собой твердую стенку, имеет место проскальзывание, скорость прилегающего к  $\Sigma$  слоя зависит от многих факторов и для своего определения требует, как правило, установления эмпирических закономерностей [18]. Здесь воспользуемся следующими соображениями. Движущаяся по трубе жидкость испытывает силу сопротивления вязкого трения, а шероховатость стенок и наличие на них выступов приводят к дополнительному сопротивлению (сопротивление давлению), величина которого зависит от скорости движения жидкости [19]. В нашем случае будем считать сопротивление давления пропорциональным скорости. Тогда граничное условие на твердой стенке окончательно можно записать в виде

$$|T_{yx}| = f_{\Sigma} |T_{yy}| + D_{\Sigma} |u|, \quad (14)$$

где  $f_{\Sigma}$  – коэффициент трения скольжения;  $D_{\Sigma}$  – коэффициент сопротивления для поверхности  $\Sigma$ .

На свободной поверхности  $\Gamma$  потока выполняются условия отсутствия напряжений

$$T_{yx} = 0, \quad T_{yy} = 0. \quad (15)$$

### 3. ПОТОК СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассмотрим поток постоянной толщины  $h$  со свободной поверхностью  $\Gamma$ . Примем в качестве характерных величин глубину  $h$ , ускорение свободного падения  $g$  и плотность твердой фазы  $\gamma$ . Тогда соответствующую краевую задачу в безразмерных переменных можно сформулировать в виде

$$\frac{d}{dy} \left( \Psi \left( \frac{d\nu}{dy} \right)^2 \right) + \frac{\cos \theta}{\text{Eu}} \nu = 0, \quad (16)$$

$$0 < y < 1,$$

$$\frac{d}{dy} \left( \frac{1}{M(y)} \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \right) + \text{Re} \sin \theta \nu = 0, \quad (17)$$

$$0 < y < 1,$$

$$\frac{d\nu}{dy} = 0, \quad y = 1, \quad (18)$$

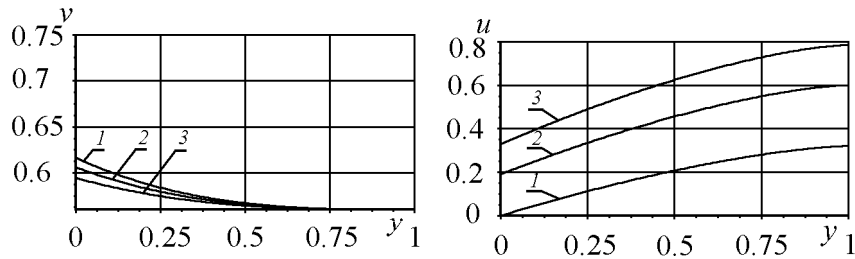


Рис. 2. Поток со свободной поверхностью,  
 $Re_{\Sigma} = 1.0; Re = 1.0; Eu = 1.0;$   
 1 -  $\theta^{\circ} = 24^{\circ}$ ; 2 -  $\theta^{\circ} = 42^{\circ}$ ; 3 -  $\theta^{\circ} = 56^{\circ}$

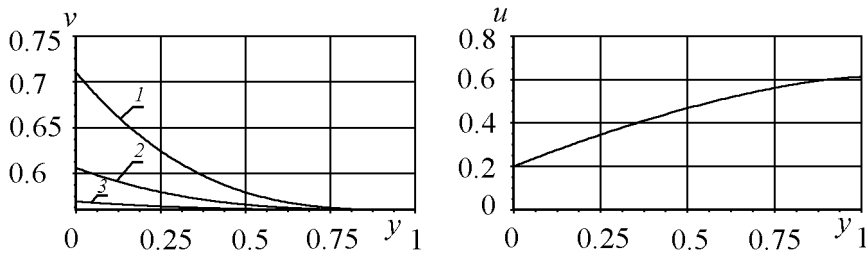


Рис. 3. Поток со свободной поверхностью,  
 $\theta^{\circ} = 42^{\circ}; Re_{\Sigma} = 1.0; Re = 1.0;$   
 1 -  $Eu = 0.3$ ; 2 -  $Eu = 1.0$ ; 3 -  $Eu = 5.0$

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad y = 1, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 - \frac{Re}{Re_{\Sigma}} u &= \\ = f_{\Sigma} Eu Re \Psi \left( \frac{dv}{dy} \right)^2, & \tag{20} \\ y = 0. \end{aligned}$$

Здесь  $Eu = \alpha \gamma^{-1} g^{-1} h^{-3}$  - число Эйлера;  $Re = 2\sqrt{2} \gamma h^2 m_0^{-1}$  - число Рейнольдса;  $M(y) = (\nu_b - \nu)/\nu$ ;  $Re_{\Sigma} = D_{\Sigma}^{-1} \gamma \sqrt{gh}$  - безразмерный параметр.

На свободной поверхности, в силу отсутствия внутреннего трения, выполняется условие

$$\nu = \nu_0, \quad y = 1. \tag{21}$$

Уравнение (16) совместно с условиями (18), (21), представляет задачу Коши, которая может быть решена независимо от  $u$ . При этом надо учесть, что функция  $\Psi$  имеет особенность при  $y \rightarrow 1$ . Условие ограниченности решения задачи (16), (18), (21) на всем отрезке  $[0, 1]$  приводит к асимптотическому выражению для  $\nu$  при  $y \rightarrow 1$ :

$$\nu = \nu_0 \left( 1 + \frac{k \cos \theta}{9 Eu} (1 - y)^3 \right),$$

которое может быть использовано при численном решении задачи Коши.

Нахождение скорости  $u(y)$  сводится к численному интегрированию соотношения (17) и определению двух произвольных постоянных из граничных условий (19), (20). Введем обозначение

$$W(y) = \int_0^y \nu(z) dz.$$

Тогда распределение скорости можно записать в виде

$$u(y) = C_0 + \int_0^y \sqrt{Re \sin \theta [W(1) - W(z)]} dz, \tag{22}$$

где  $C_0$  - константа,

$$C_0 = Re_{\Sigma} \cos \theta (tg \theta - f_{\Sigma}) W(1). \tag{23}$$

Очевидно, что  $C_0$  представляет собой скорость скольжения частиц по твердой стенке  $u(0)$  и по своему физическому смыслу не может быть отрицательной. Это приводит к следующему ограничению на угол наклона лотка:  $tg \theta \geq f_{\Sigma}$ .

Результаты вычислений приведены в виде графиков на рис. 2, 3, где слева изображены распределения для  $\nu(y)$ , а справа - для  $u(y)$ .

Расчеты были проведены для следующих значений параметров:  $\nu_0 = 0.56$ ,  $\nu_b = 0.79$ ,  $f_\Sigma = 0.45$ ,  $k = 1$ .

Остальные значения параметров приведены в подписях к рисункам.

#### 4. ПОТОК МЕЖДУ ДВУМЯ ТВЕРДЫМИ СТЕНКАМИ

Рассмотрим теперь поток между двумя твердыми параллельными стенками  $\Sigma$  и  $\Gamma$ , наклоненными к горизонту под углом  $\theta$  (см.рис.1).

Характер проскальзывания гранулированной среды по нижней и верхней стенкам может быть различным. Поэтому, помимо параметров  $f_\Sigma$ ,  $Re_\Sigma$ , введем аналогичные параметры  $f_\Gamma$ ,  $Re_\Gamma$ , характеризующие верхнюю твердую стенку  $\Gamma$ . Будем считать, что известны давление  $P_0$  на верхней стенке и средняя объемная плотность дисперсной среды  $\nu_{cp}$ . Соответствующие соотношения в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\int_0^1 \nu(y) dy = \nu_{cp}, \quad (24)$$

$$\Psi \left( \frac{d\nu}{dy} \right)^2 = p_0, \quad y = 1 \quad (25)$$

где  $Re_\Gamma = D_\Gamma^{-1} \gamma \sqrt{gh}$ ;  $D_\Gamma$  - коэффициент сопротивления для поверхности  $\Gamma$ ;  $p_0 = h^2 P_0 \alpha^{-1}$  - безразмерный параметр ("давление" на  $\Gamma$ ).

Таким образом, поток между двумя твердыми стенками описывается краевой задачей, представленной уравнениями (16),(17), условиями (24),(25),(20) и условием

$$\frac{1}{M} \left( \frac{du}{dy} \right)^2 - \frac{Re}{Re_\Gamma} u = f_\Gamma Eu Re p_0, \quad y = 1 \quad (26)$$

на  $\Gamma$ .

Здесь, как и в предыдущем пункте, задача нахождения  $\nu$  не связана с задачей нахождения  $u$ , и может быть рассмотрена отдельно. Для ее решения воспользуемся методом "стрельбы" по параметру  $\nu_1 = \nu(1)$ . В этом случае при перебирании параметра  $\nu_1$  приходится решать задачу Коши. После определения  $\nu$  с заданной точностью переходим к нахождению скорости  $u(y)$ , удовлетворяющей уравнению (17) и условиям (20),(26). Численное решение последней задачи проводим следующим образом.

Учитывая, что производная  $\frac{du}{dy}$  меняет знак внутри интервала  $[0, 1]$ , разбьем этот интервал на два подинтервала  $[0, y_*]$   $[y_*, 1]$ , на которых знак указанной производной не меняется, так что имеет место равенство

$$\frac{du}{dy}(y_*) = 0. \quad (27)$$

Интегрируя уравнение (17) на интервале  $[0, y_*]$ , получаем решение  $u_I$ , содержащее две произвольные постоянные  $C_0, C_1$ :

$$u_I(y) = C_0 + \int_0^y \sqrt{Re \sin \theta M(z)(C_1 - W(z))} dz, \quad (28)$$

$$0 \leq y \leq y_*,$$

где  $W(y)$  - функция, введенная в п. 4. Уравнением для нахождения  $y_*$  служит соотношение, вытекающее из уравнений (17),(27):

$$W(y) = C_1 \quad (29)$$

Интегрируя уравнение (17) на интервале  $[y_*, 1]$ , получаем  $u_{II}(y)$

$$u_{II}(y) = u_I(y_*) - \quad (30)$$

$$- \int_{y_*}^y \sqrt{Re \sin \theta M(z)(W(z) - C_1)} dz, \quad y_* < y \leq 1.$$

Граничное условие (20) дает выражение для постоянной  $C_0$ :

$$C_0 = Re_\Sigma [\sin \theta C_1 - f_\Sigma Eu (p_0 + Re \sin \theta \nu_{cp})]. \quad (31)$$

А граничное условие (26) приводит к уравнению относительно  $C_1$ :

$$Re_\Gamma [\sin \theta (\nu_{cp} - C_1) - f_\Gamma Eu p_0] - u_I(y_*) + \quad (32)$$

$$+ \int_{y_*}^1 \sqrt{Re \sin \theta M(z)(W(z) - C_1)} dz = 0.$$

Для численного нахождения корня этого уравнения воспользуемся методом деления отрезка пополам. Для каждого значения  $C_1$  находим  $y_*$  из уравнения (29), определяем  $C_0$  и  $u_I(y)$  по формулам (31),(28) и вычисляем правую часть уравнения (32). После определения  $C_1$  с заданной точностью находим распределение скоростей по формулам (28),(30).

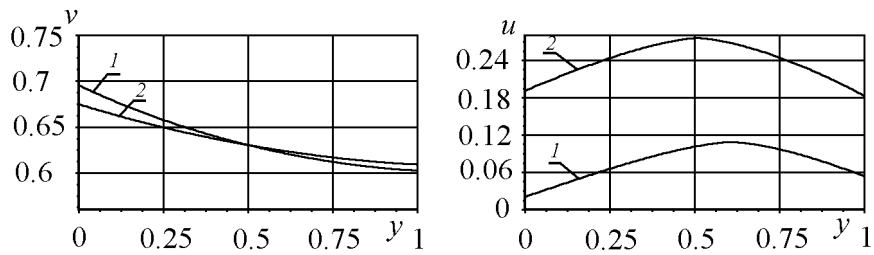


Рис. 4. Поток между твердыми стенками,  
 $Re_{\Sigma} = 1.0$ ;  $Re_{\Gamma} = 1.0$ ;  $Re = 1.0$ ;  $Eu = 2.0$ ;  $P_0 = 0.005$ ;  
 1 -  $\theta^{\circ} = 39^{\circ}$ ; 2 -  $\theta^{\circ} = 67^{\circ}$

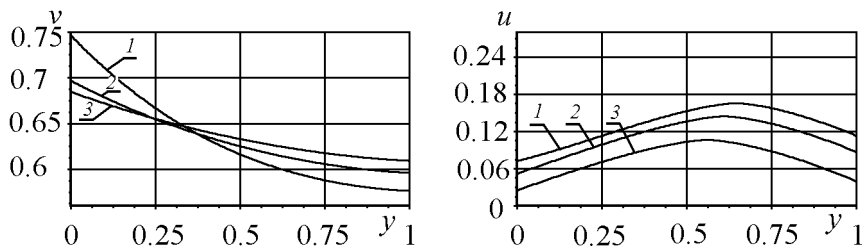


Рис. 5. Поток между твердыми стенками,  
 $\theta^{\circ} = 42^{\circ}$ ;  $Re_{\Sigma} = 1.0$ ;  $Re_{\Gamma} = 1.0$ ;  $Re = 1$ ;  $P_0 = 0.005$ ;  
 1 -  $Eu = 0.5$ ; 2 -  $Eu = 1.0$ ; 3 -  $Eu = 3.0$

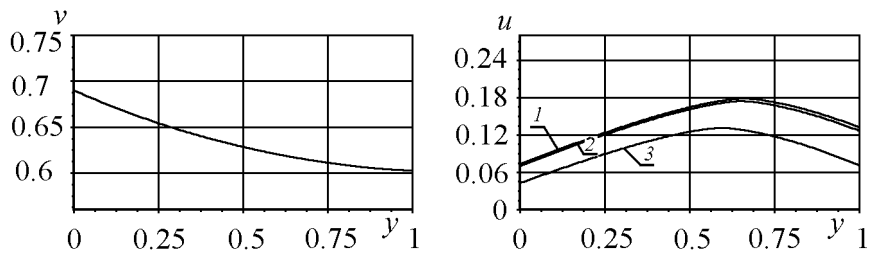


Рис. 6. Поток между твердыми стенками,  
 $\theta^{\circ} = 42^{\circ}$ ;  $Re_{\Sigma} = 1.0$ ;  $Re_{\Gamma} = 1.0$ ;  $Re = 1.0$ ;  $Eu = 2.0$ ;  
 кривые: 1 -  $P_0 = 0.005$ ; 2 -  $P_0 = 0.01$ ; 3 -  $P_0 = 0.1$

Результаты вычислений приведены на рис. 4-6. Расчеты проводились для следующих значений параметров:  $\nu_0 = 0.56$ ,  $\nu_b = 0.79$ ,  $\nu_{cp} = 0.63$ ,  $f_{\Sigma} = 0.45$ ,  $f_{\Gamma} = 0.45$ ,  $k = 1$ . Значения остальных параметров приведены в подписях к рисункам.

### ВЫВОДЫ

Для потока со свободной поверхностью распределение по глубине объемной плотности дисперсной фазы и скоростей носит монотонный характер. С увеличением глубины  $\nu$  растет, а  $u$  убывает. Увеличение числа Эйлера, связанного с давлением в слое, приводит к уменьшению градиента объемной плотности. На скорость же число Эйлера практически не влияет.

Числа  $Re$ ,  $Re_{\Sigma}$ ,  $Re_{\Gamma}$  не влияют на распределение  $\nu$ . Скорость же потока с увеличением значений этих параметров возрастает. Следует отметить, что кривизна всех кривых для  $u(y)$  не меняет знак на интервале  $[0, 1]$ , что не наблюдается при использовании других моделей сыпучей среды [12].

Аналогичная ситуация имеет место и в случае движения среды между твердыми стенками. Отличительным здесь является наличие максимума скорости внутри интервала  $0 < y < 1$ . Влияние параметра  $P_0$  на распределение  $\nu(y)$  незначительное.

В случае прилипания среды к стенкам ( $Re_{\Sigma} = Re_{\Gamma} = 0$ ) течение подобно плоскому течению Пуазейля.

1. Гомилко А.М., Шлапак Ю.В. Численное моделирование течений нелинейно-вязкой жидкости в плоской области // Прикладная гидромеханика.– 1999.– Т. 1, N 3.– С. 11-15.
2. Смірнова Т.О., Ніколенко А.М. Аналіз вязкої поведінки дисперсних систем в термінах моделі вільного об'єму // Доп. НАН України.– 1999.– N 4.– С. 91-95.
3. Соколов В.М., Коваленко А.А., Калюжный Г.С., Минин С.А. Инженерные задачи диффузии примесей в потоках.– Луганск: Восточноукр. гос. ун-т, 2001.– 168 с.
4. Накорчевский А.И., Басок Б.И. Гидродинамика и тепломассоперенос в гетерогенных системах и пульсирующих потоках.– К.: Наук. думка, 2001.– 346 с.
5. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов.– М.: Машиностроение, 1964.– 251 с.
6. Гениев Г.А. Вопросы динамики сыпучей среды.– М.: Госстройиздат, 1958.– 122 с.
7. Гортинский В.В., Демский А.Б., Борискин М.А. Процессы сепарирования на зерно-перерабатывающих предприятиях.– М.: Колос, 1980.– 304 с.
8. Цытович Н.А. Механика грунтов.– М.: Гос. издат. лит. по строительству, архитект. и стройматер., 1963.– 636 с.
9. Голованов Ю.В., Ширко И.В. Обзор современного состояния механики быстрых движений гранулированных материалов.– В кн. Механика гранулир.сред. Теория быстрых движений.– М.: Мир.- 1985.– С. 86-146.
10. Бэгнолд Р. Эксперименты со взвешенной суспензией больших твердых сфер в ньютоновской жидкости под действием сдвига.– В кн. Механика гранулир.сред. Теория быстрых движений.– М.: Мир.- 1985.– С. 44-63.
11. Гудмен М., Коун С. Две задачи о гравитационном течении гранулированных материалов.– В кн. Механика гранулир.сред. Теория быстрых движений.– М.:Мир.- 1985.– С. 64-85.
12. Сэвидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов.– В кн. Механика гранулир.сред. Теория быстрых движений.– М.:Мир.- 1985.– С. 86-146.
13. Заика П.М. Динамика вибрационных очистительных машин.– М.: Машиностроение, 1977.– 278 с.
14. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды.– М.: Наука, 1990.– 272 с.
15. Блехман И.И., Хайнман В.Я. О теории вибрационного разделения сыпучих смесей // Изв. АН СССР, Механика.– 1965.– N 5.– С. 22-30.
16. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред.– М.: Наука, 1978.– 336 с.
17. Соу С. Гидродинамика многофазных систем.– М.: Мир, 1971.– 536 с.
18. Лозовецкий В.В., Мордвинцев В.М. Расчет движения шаровой засыпки как квазиньютоновской жидкости в бункере осесимметричной геометрии// Прикл. проблемы прочности и пластичности.– Межвуз.сб. Нижегородский ун-т.– 1991.– С.111-116.
19. Константинов Ю.М. Гидравлика.– К.: Вища школа, Головное изд-во, 1988.– 398 с.