3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
4. Бейко И. В. Обобщенная L — проблема моментов и метод ее решения / И. В. Бейко, В. А. Гнатюк, В. В. Мойко // Укр. мат. журн. — 1978. — 30, № 2. — С. 147—154.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ/ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 742 с.
6. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
7. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения / Е. Г. Гольштейн. — М. : Наука, 1971. — 352 с.

We prove some existence theorems of extreme elements for the problem of the best in the sense of convex continuous functions uniform approximation of continuous compact-valued mapping by the set of continuous single-valued mappings.

Key words: *the best in the sense of convex continuous functions uniform approximation, theorem existence, extreme element, compact-valued mapping.*

Отримано: 05.04.2011

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ЛІПШІЦЕВОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ

У статті встановлено критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірна апроксимація, скінченновимірний підпростір.*

Вступ. Проблеми відновлення функціональних залежностей, які не означені точно, приводять до задачі найкращої у деякому розумінні апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень.

У праці [1] розглянуто, зокрема, задачу найкращої у розумінні норми рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Більш загальною є задача найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень, яка розглядається у цій роботі.

Постановка задачі. Нехай S — метричний компакт, s — його елементи, X — лінійний над полем комплексних чисел сепарабельний нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою: $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність усіх непорожніх компактів простору X, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$ та які неперервні на S у розумінні метрики Хаусдорфа на $K(X)$, V — скінченновимірний підпростір простору $C(S,X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S,X)$, $i=\overline{1,n}$, p — задана на X дійснозначна ліпшіцева функція з константою Ліпшіця l.

Задачею найкращої у розумінні функції p рівномірної апроксимації відображення $a \in C(S,K(X))$ підпростором V неперервних однозначних відображень будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\big(y-g(s)\big). \tag{1}$$

Відображення $g^* \in V$ таке, що

$$\alpha_a^*(V) = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\big(y-g^*(s)\big),$$

будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Отримані критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (1) слугуватимуть відправним пунктом для побудови чисельних методів відшукання величини (1) та її екстремального елемента.

Мета роботи. Встановити критерії екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Допоміжні твердження. Нехай X^* — простір, спряжений з X, X_R — дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором X, тобто простір X розглядуваний лише над полем дійсних чисел, X_R^* — простір, спряжений з X_R.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом функції p в точці $x_0 \in X$, якщо

$$p(x) - p(x_0) \geq \varphi(x - x_0), x \in X.$$

Множину субградієнтів функції p в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial p(x_0)$.

Оскільки p є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial p(x_0)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [2, с. 327]).

Для $x_0 \in X$ будемо позначати

$$\partial_C p(x_0) = \left\{ f : f \in X^*, \operatorname{Re} f \in \partial p(x_0) \right\}.$$

Для $g^* \in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right),$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s : s \in S, \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right) = \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$a_s^{g^*} = \left\{ y : y \in a(s), p\left(y - g^*(s)\right) = \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right) = \alpha_a^{g^*} \right\}, \ s \in S_a^{g^*},$$

$$C_a^{g^*} = \left\{ g : g \in C(S, X), \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right) < \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right) = \alpha_a^{g^*} \right\}.$$

Будемо вважати, що обмеження $g \in V$ в задачі відшукання величини (1) є істотним, тобто

$$\alpha_a^* < \alpha_a^*(V),$$

де $\alpha_a^* = \inf_{g \in C(S,X)} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g(s)\right)$.

Зрозуміло, що тоді $C_a^{g^*}$ не є порожньою множиною.

Покладемо далі

$$L\left(g^*\right) = \bigcup_{s \in S_a^{g^*}} \bigcup_{y \in a_s^{g^*}} \bigcup_{f \in \partial_C p\left(y - g^*(s)\right)} \left(\operatorname{Re} f\left(g_1(s)\right), \ldots, \operatorname{Re} f\left(g_n(s)\right) \right).$$

Твердження 1. Множина $L\left(g^*\right)$ є компактом простору R^n .

Доведення. Для кожного $s \in S_a^{g^*}, y \in a_s^{g^*}, f \in \partial_C p\left(y - g^*(s)\right)$ маємо, що

$$\left\|\left(\operatorname{Re} f\left(g_1(s)\right), ..., \operatorname{Re} f\left(g_n(s)\right)\right)\right\| =$$

$$= \sqrt{\left(\operatorname{Re} f\left(g_1(s)\right)\right)^2 + ... + \left(\operatorname{Re} f\left(g_n(s)\right)\right)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\|f\|^2 \|g_1(s)\|^2 + ... + \|f\|^2 \|g_n(s)\|^2} \leq l\sqrt{\|g_1\|^2 + ... + \|g_n\|^2},$$

оскільки $\|f\| \leq l$ для всіх $f \in \bigcup\limits_{x \in X} \partial_C p(x)$ (див. [3]).

Звідси випливає обмеженість множини $L\left(g^*\right)$.

Переконаємося у замкненості цієї множини. Нехай $\left(a_1^*, ..., a_n^*\right)$ є граничною точкою $L\left(g^*\right)$. Тоді існують послідовность $\left\{s_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{y_k\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ такі, що $s_k \in S_a^{g^*}$, $y_k \in a_{s_k}^{g^*}$, $f_k \in \partial_C p\left(y_k - g^*\left(s_k\right)\right)$ і

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{Re} f_k\left(g_i\left(s_k\right)\right) = a_i^*, i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Оскільки S — метричний компакт, а X — сепарабельний нормований простір та $\left\|\operatorname{Re} f_k\right\| \leq l$, $k = 1, 2, ...$, то з послідовностей $\left\{s_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ та $\left\{\operatorname{Re} f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ можна вибрати відповідно підпослідовності $\left\{s_{k_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ та $\left\{\operatorname{Re} f_{k_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ такі, що підпослідовність $\left\{s_{k_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ сильно збігається до $s^* \in S$, а підпослідовність $\left\{\operatorname{Re} f_{k_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ слабко збігається до $\varphi^* \in X_R^*$.

Внаслідок (2)

$$\lim_{m \to \infty} \operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s_{k_m}\right)\right) = a_i^*, i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

З іншого боку, для всіх $i \in \{1, ..., n\}$

$$\left|\operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s_{k_m}\right)\right) - \varphi^*\left(g_i\left(s^*\right)\right)\right| \leq l\left\|g_i\left(s_{k_m}\right) - g_i\left(s^*\right)\right\| +$$

$$+\left|\operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s^*\right)\right) - \varphi^*\left(g_i\left(s^*\right)\right)\right|.$$

Враховуючи неперервність відображень $g_i, i=\overline{1,n}$, слабку збіжність послідовності $\left\{\operatorname{Re} f_{k_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ до φ^*, звідси робимо висновок, що

$$\lim_{m\to\infty} \operatorname{Re} f_{k_m}\left(g_i\left(s_{k_m}\right)\right)=\varphi^*\left(g_i\left(s^*\right)\right), i=\overline{1,n}. \tag{4}$$

З (3), (4) одержимо, що

$$\left(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*\right)=\left(\varphi^*\left(g_1\left(s^*\right)\right), \ldots, \varphi^*\left(g_n\left(s^*\right)\right)\right). \tag{5}$$

Оскільки $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$, то для околу $O_r\left(0\right)$ нуля простору X радіуса $\frac{1}{r}$ існує окіл $B_r\left(s^*\right)$ точки s^* такий, що $a\left(s\right) \subset a\left(s^*\right)+O_r\left(0\right)$ для всіх $s \in B_r\left(s^*\right)$. Внаслідок того, що $\lim\limits_{m\to\infty} s_{k_m}=s^*$, існує підпослідовність $\left\{s_{k_{m_r}}\right\}_{r=1}^{\infty}$ послідовності $\left\{s_{k_m}\right\}_{m=1}^{\infty}$ така, що $s_{k_{m_r}} \in B_r\left(s^*\right), r=1,2,\ldots$. Тоді $a\left(s_{k_{m_r}}\right) \subset a\left(s^*\right)+O_r\left(0\right)$. Тому $y_{k_{m_r}}=\widehat{y}_r+z_r$, де $\widehat{y}_r \in a\left(s^*\right)$, а $\left\|z_r\right\|<\frac{1}{r}$. Враховуючи, що елементи $\widehat{y}_r$, $r=1,2,\ldots$, належать компакту $a\left(s^*\right)$, з послідовності $\left\{\widehat{y}_r\right\}_{r=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну до $y^* \in a\left(s^*\right)$ підпослідовність. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що уже $\lim\limits_{r\to\infty} \widehat{y}_r=y^*$. З рівності $y_{k_{m_r}}=\widehat{y}_r+z_r$ отримаємо, що

$$\lim_{r\to\infty} y_{k_{m_r}}=\lim_{r\to\infty} \widehat{y}_r+\lim_{r\to\infty} z_r=y^*+0=y^*. \tag{6}$$

Переконаємося далі у справедливості рівності

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(y_{k_{m_r}}-g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right)=\varphi^*\left(y^*-g^*\left(s^*\right)\right). \tag{7}$$

Для цього використаємо такі співвідношення

$$\left|\operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(y_{k_{m_r}}-g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right)-\varphi^*\left(y^*-g^*\left(s^*\right)\right)\right| \le$$

$$\le l\left\|\left(g^*\left(s^*\right)-g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right)+\left(y_{k_{m_r}}-y^*\right)\right\|+\left|\operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(y^*-g^*\left(s^*\right)\right)-\varphi^*\left(y^*-g^*\left(s^*\right)\right)\right|.$$

Оскільки $g^* \in C\left(S, X\right)$, $\lim\limits_{r\to\infty} s_{k_{m_r}}=s^*$, має місце співвідношення (6) і послідовність $\operatorname{Re} f_{k_{m_r}} \xrightarrow[r\to\infty]{сл.} \varphi^*$, то права частина цієї нерівності прямує до нуля при $r \to \infty$. Отже, (7) має місце.

З огляду на те, що

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*(s)\right) =$$
$$= \max_{y \in a\left(s_{k_{m_r}}\right)} p\left(y - g^*\left(s_{k_{l_m}}\right)\right) = p\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) \tag{8}$$

та $g^* \in C(S, X)$, $\lim\limits_{r \to \infty} s_{k_{m_r}} = s^*$, має місце рівність (6), з (8) одержимо, що

$$\alpha_a^{g^*} = p\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right).$$

Звідси випливає, що $s^* \in S_a^{g^*}$, $y^* \in a_{s^*}^{g^*}$.

Переконаємося, що $\varphi^* \in \partial p\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)$. Дійсно маємо для $x \in X$

$$p(x) - p\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right) \geq \operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\left(x - \left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right)\right),$$

оскільки $\operatorname{Re} f_{k_{m_r}} \in \partial p\left(y_{k_{m_r}} - g^*\left(s_{k_{m_r}}\right)\right)$.

Перейшовши в цій нерівності до границі при $r \to \infty$, одержимо, що для всіх $x \in X$

$$p(x) - p\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right) \geq \varphi^*(x) - \varphi^*\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right).$$

При цьому ми використали те, що послідовність $\left\{\operatorname{Re} f_{k_{m_r}}\right\}_{r=1}^{\infty}$ слабко збігається до φ^* та має місце рівність (7).

Тому $\varphi^* \in \partial p\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)$. Нехай f^* — функціонал простору X^*, для якого $f^*(x) = \varphi^*(x) - i\varphi^*(ix), x \in X$.

Тоді $f^* \in \partial_C p\left(y^* - g^*\left(s^*\right)\right)$, $\operatorname{Re} f^* = \varphi^*$, $s^* \in S_a^{g^*}$, $y^* \in a_{s^*}^{g^*}$ і відповідно до (5)

$$\left(a_1^*, \ldots, a_n^*\right) = \left(\operatorname{Re} f^*\left(g_1(s)\right), \ldots, \operatorname{Re} f^*\left(g_n(s)\right)\right).$$

Звідси випливає, що $\left(a_1^*, \ldots, a_n^*\right) \in L\left(g^*\right)$.

Отже, $L\left(g^*\right)$ є обмеженою замкненою множиною простору R^n. Тому $L\left(g^*\right)$ — компакт цього простору.

Твердження доведено.

Основні результати.

Теорема 1. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного

$g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a^{g^*}$, $y_g \in a_{s_g}^{g^*}$, $f_g \in \partial_C p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що $\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \le 0$.

Теорема 2. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб $0 \in coL\left(g^*\right)$, де $coL\left(g^*\right)$ — опукла оболонка $L\left(g^*\right)$.

Доведення. Необхідність. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (1). Згідно з теоремою 1 не існує елемента $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \in V$ такого, що для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in \partial_C p\left(y - g^*\left(s\right)\right)$

$\operatorname{Re} f\left(g\left(s\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f\left(g_i\left(s\right)\right) > 0$.

Звідси випливає, що

$$D = \left\{\alpha : \alpha = \left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \in R^n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i > 0, l = \left(l_1, ..., l_n\right) \in L\left(g^*\right)\right\} = \varnothing .$$

Тому, враховуючи компактність $L\left(g^*\right)$ (див. твердження 1), звідси робимо висновок, що $0 \in coL\left(g^*\right)$ (див., наприклад, [2, с. 90]).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай $0 \in coL\left(g^*\right)$. Тоді $D = \varnothing$ (див., наприклад, [2, с. 90]). Тому не існує вектора $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i \in V$, $\left(\alpha_1, ..., \alpha_n\right) \in R^n$, такого, що для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $y \in a_s^{g^*}$, $f \in \partial_C p\left(y - g^*\left(s\right)\right)$ виконується нерівність $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \operatorname{Re} f\left(g_i\left(s\right)\right) > 0$. Згідно з теоремою 1 g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Теорема 3. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували точки $s_j \in S_a^{g^*}$, $y_j \in a_{s_j}^{g^*}$, функціонали $f_j \in \partial_C p\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$, додатні числа $\rho_j, 1 \le j \le k \le n+1$, $\sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j \operatorname{Re} f_j\left(g\left(s_j\right)\right) = 0, \; g \in V. \qquad (9)$$

Доведення. Необхідність. Нехай g^* — екстремальний елемент для величини (1). На підставі теореми 2 $0 \in coL\left(g^*\right)$. Згідно з теоремою Каратеодорі (див., наприклад, [2, с. 76]) з цього співвідношення випливає, що існують $l_j \in L\left(g^*\right)$ та числа $\rho_j > 0, j = \overline{1,k}, 1 \le k \le n+1$, $\sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1$, такі, що

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j l_j = 0. \qquad (10)$$

За означенням множини $L\left(g^*\right)$ для кожного $j \in \{1,...,k\}$ існують $s_j \in S_a^{g^*}$, $y_j \in a_{s_j}^{g^*}$, $f_j \in \partial_C p\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$ такі, для яких

$$l_j = \left(\operatorname{Re} f_j\left(g_1\left(s_j\right)\right),...,\operatorname{Re} f_j\left(g_n\left(s_j\right)\right)\right).$$

З урахуванням (10) отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j \operatorname{Re} f_j\left(g_i\left(s_j\right)\right) = 0, \; i = \overline{1,n}. \qquad (11)$$

З (11) випливає справедливість рівності (9).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для $g^* \in V$ існують елементи $s_j \in S_a^{g^*}$, $y_j \in a_{s_j}^{g^*}$, $f_j \in \partial_C p\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$, додатні числа $\rho_j, 1 \le j \le k \le n+1$, $\sum_{j=1}^{k} \rho_j = 1$, такі, що має місце рівність (9). Переконаємося, що g^* є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки $f_j \in \partial_C p\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right)$, $j = \overline{1,k}$, то для будь-якого $g \in V$

$$p\left(y_j - g\left(s_j\right)\right) - p\left(y_j - g^*\left(s_j\right)\right) =$$

$$= p\left(y_j - g\left(s_j\right)\right) - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*\left(s\right)\right) \geq \mathrm{Re}\, f_j\left(g^*\left(s_j\right) - g\left(s_j\right)\right), j = \overline{1,k}.$$

Звідки, врахувавши (9), отримаємо, що

$$\sum_{j=1}^{k} \rho_j p\left(y_j - g\left(s_j\right)\right) - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*\left(s\right)\right)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} \rho_i \left(\mathrm{Re}\, f_j\left(g^*\left(s_j\right) - g\left(s_j\right)\right)\right) = 0 .$$

Звідси

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g^*\left(s\right)\right) \leq \sum_{j=1}^{k} \rho_i p\left(y_j - g\left(s_j\right)\right) \leq \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y - g\left(s\right)\right).$$

Це й означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Висновки. Для задачі найкращої у розумінні опуклої ліпшіцевої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень встановлено критерії екстремального елемента.

Список використаних джерел:

1. Гнатюк Ю. В. Задача найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором однозначних неперервних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Проблеми теорії наближення функції та суміжні питання : зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2004. — 1, №1. — С. 115—130.
2. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
3. Гнатюк В. А. Некоторые критерии глобальной липшицевости функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1987. — 39, №6. — С. 768—771.

In this article criterions of the extremal element for the problem of the best at sense of the convex lipschitz function uniform approximation of continuous compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps are established.

Key words: *the compact-valued maps, the best in sense of the convex lipschitz function uniform approximation, the finite dimensional space.*

Отримано: 14.03.2011