УДК 519.85

О. С. Пічугіна, канд. фіз.-мат. наук
Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка, м. Полтава

ОПУКЛЕ ПРОДОВЖЕННЯ КУБІЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ У РОЗВ'ЯЗАННІ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

Представлено два методи побудови опуклого продовження кубічного многочлена на переставленнях — один метод аналітичний, другий — ітераційний, який є модифікацією метода Стояна-Яковлева побудови опуклих продовжень многочленів на вершинно розташованих множинах. Продемонстровано переваги аналітичного методу — можливість записати шукане опукле продовження в явному вигляді, використовуючи коефіцієнти вихідної функції й мультимножину, з якої формуються переставлення, а також суттєве зменшення кількості доданків у результуючому виразі порівняно з ітераційним методом. Побудова опуклих продовжень многочленів дозволяє використовувати апарат опуклого програмування для розв'язування практичних задач, що формулюються в вигляді оптимізаційних із поліноміальною цільовою функцією на переставленнях.

Ключові слова: *евклідова комбінаторна множина, множина переставлень, мультимножина, комбінаторна оптимізація, нелінійна оптимізація, многочлен, опукле продовження.*

Вступ. Розглянемо задачу нелінійної оптимізації на множині комбінаторної природи. Актуальність цієї проблеми пояснюється тим, що абсолютна більшість практичних задач, що зводяться до оптимізації на комбінаторній множині об'єктів, відноситься до нелінійних. Поряд із відомим методом меж та гілок, одним із підходів до розв'язання таких задач є занурення евклідових комбінаторних множин (ЕКМ) у евклідів арифметичний простір [1] і зведення комбінаторної проблеми до розв'язання серії неперервних задач на відповідних многогранниках. Задачі, для яких це можливо, — лінійні задачі і вузький клас нелінійних опуклих задач. Отож актуальним є виділення класів задач оптимізації, певні перетворення з якими на базі використання комбінаторних властивостей множин, дозволяють перейти до розгляду опуклої цільової функції. Так у [2; 3] доведено, що оптимізація довільного поліному на вершинно розташованих множинах може бути зведена до оптимізації опуклого поліному, який називається його опуклим продовженням (ОП), і відповідно застосувати при оптимізації властивості опуклих функції на многогранниках. Раніше було розглянуто множини переставлень [2; 3; 4], розміщень $A_n^{n-1}(G)$ із множини G [3], розміщень із повтореннями $\overline{A}_2^n(G)$ [3], поліпереставлень [5; 6]. Початковий конструктивний алгоритм побудови ОП поліному [2; 3] вдосконалювався в напрямку зменшення кількості складових у результативному ОП, при цьому досліджувалися і безпосередньо властивості функції, що формується ітераційно, так і її властивості на конкретних комбінаторних множинах [5—7]. Було дано оцінки кількості арифметичних операцій і впорядковано три підходи формування ОП по кількості арифметичних операції в результуючому розкладанні [5]. У [3; 4] наведено ряд практичних задач, що зводяться до оптимизації квадратичних і кубічних поліномів. Виявляється, що для цих двох класів ОП можуть бути виписані в явному вигляді. Саме розв'язанню цієї проблеми на загальній множині переставлень присвячено пропоновану статтю.

Постановка задачі. Нехай $E = E_{nk}\left(G\right) \subset R^n (0 \le \mathrm{g}_1 \le \ldots \le \mathrm{g}_\mathrm{n})$ — ЕКМ упорядкованих n-вибірок із мультимножини $G = \left\{g_i\right\}_{i \in J_n}$, k елементів якої різні ($J_n = \{1, \ldots, n\}$) — загальна множина переставлень з G [1], $f(x)$ — кубічний поліном, визначений на E. Задача — побудувати опукле продовження функції $f(x)$ на ЕКМ E, тобто знайти таку функцію $F(x)$, яка була б опуклою і збігалася з $f(x)$ на E: $F(x)$ — опукла, $F(x) \underset{E}{=} f(x)$.

Представимо кубічний поліном $f(x)$ у формі:

$$f(x) = P_3(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = \sum_{l=1}^{3} f_l(x), \; x \in R^n, \tag{1}$$

де

$$f_1(x) = \sum_{k,i,j=1}^{n} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j, \; \sum_{k,i,j=1}^{n} \left|a_{kij}\right| \neq 0, \tag{2}$$

$$f_2(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j, \tag{3}$$

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i. \tag{4}$$

Уведемо позначення:

$$a_i^{'} = a_{iii}, \; i \in J_n, \tag{5}$$

$$a_{ij}^{"} = a_{iij}, \; i \neq j, \; i, j \in J_n, \tag{6}$$

$$A'^{-} = \sum_{a_i^{'}<0} \left| a_i^{'} \right| = \sum_{a_{iii}<0} \left| a_{iii} \right|, \; A'^{+} = \sum_{a_i^{'}>0} \left| a_i^{'} \right| = \sum_{a_{iii}>0} \left| a_{iii} \right|, \tag{7}$$

$$A' = A'^{-} + A'^{+}, \tag{8}$$

$$A'' = \sum_{i \neq j} \left| a_{ij}^{"} \right| = \sum_{i \neq j} \left| a_{iij} \right|, \tag{9}$$

$$A''' = \sum_{\substack{k \neq i \neq j \\ k \neq j}} \left| a_{kij} \right|, \tag{10}$$

$$A = \sum_{k,i,j=1}^{n} \left| a_{kij} \right| = A' + A'' + A''', \tag{11}$$

$$B'^{-} = \sum_{b_{ii}<0} \left| b_{ii} \right| = -\sum_{b_{ii}<0} b_{ii}, \tag{12}$$

$$B'' = \sum_{i \neq j} \left| b_{ij} \right|, \tag{13}$$

$$S^{(r)} = \sum_{i=1}^{n} g_i^r. \tag{14}$$

Позначимо через $F_l^j(x)$ опукле продовження j-го доданку $f_l^j(x)$ $\left(j \in J_3 \right)$, виділеного в функції f_l вигляду (2)—(4).

У побудові ОП квадратного поліному

$$f_{23}(x) = f_2(x) + f_3(x) \tag{15}$$

на $E_{nk}\left(G\right)$ використаємо:

а) властивість переставлень:

$$\forall \; x \in E = E_{nk}\left(G\right) \; \sum_{i=1}^{n} x_i^r = S^{(r)}, \tag{16}$$

де $S^{(r)}$ визначено з (14), зокрема,

$$\begin{gathered} -x_i^r = \sum_{i' \neq i} x_{i'}^r - S^{(r)}; \; -x_i^r - x_j^r = \sum_{i' \neq i,j} x_{i'}^r - S^{(r)}, \; i \neq j; \\ -x_k^r - x_i^r - x_j^r = \sum_{i' \neq k,i,j} x_{i'}^r - S^{(r)}, \; k \neq i \neq j, \; k \neq j; \end{gathered} \tag{17}$$

б) властивість добутку двох функцій:

$$\pm f'(x)\cdot f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\left[\left(f'(x)\pm f''(x)\right)^2-f'^2(x)-f''^2(x)\right]. \quad (18)$$

Твердження 1. Функція вигляду

$$F_{23}(x)=f_{23}(x)+B\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2-B\cdot S^{(2)}\,, \quad (19)$$

де
$$B=B'^{-}+\frac{B''}{2}\,, \quad (20)$$

є ОП функції $f_{23}(x)$ вигляду (15) на $E_{nk}(G)$.

Доведення. ОП достатньо будувати для першого доданку — КФ $f_2(x)$, адже другий доданок — ЛФ $f_3(x)$ — є опуклою функцією. Представимо $f_2(x)$ сумою <u>чистих</u> доданків (квадратів із додатними коефіцієнтами, квадратів із від'ємними коефіцієнтами) та <u>мішаних</u> доданків (доданків вигляду $b_{ij}(x)=b_{ij}\cdot x_i\cdot x_j$, $i\neq j$):

$$f_2(x)=\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}>0}}^{n}b_{ii}\cdot x_i^2-\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|\cdot x_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{i\neq j}\left|b_{ij}\right|\cdot f_{ij}=$$
$$=f_2^1(x)+f_2^2(x)+f_2^3(x)=\sum_{j=1}^{3}f_2^j(x), \quad (21)$$

де
$$f_{ij}=\begin{cases}f_{ij}^{+}=x_i\cdot x_j,\ b_{ij}>0\\ f_{ij}^{-}=-x_i\cdot x_j,\ \mathrm{b}_{ij}<0\end{cases},\ i\neq j,\ i,j\in J_n\,. \quad (22)$$

Доданок $f_2^1(x)$ у (21), очевидно, опукла функція як сума квадратів змінних із додатними коефіцієнтами, отже,

$$F_2^1(x)=f_2^1(x)\,. \quad (23)$$

Для другого $f_2^2(x)$ і третього $f_2^3(x)$ доданків виразу (21) будуємо ОП. У побудові ОП $F_2^2(x)$ функції $f_2^2(x)$ використаємо властивість переставлень (17) і позначення (12):

$$f_2^2(x)=-\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|x_i^2=\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|\left(-x_i^2\right)\underset{E}{=}\sum_{\substack{i=1\\ a_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|\left(\sum_{i'\neq i}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)=\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|\times$$
$$\times\sum_{i'\neq i}x_{i'}^2-S^{(2)}\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|=\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|\left(\sum_{i'=1}^{n}x_{i'}^2-x_i^2\right)-S^{(2)}\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|=-\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}\left|b_{ii}\right|x_i^2+ \quad (24)$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}|b_{ii}|\sum_{i'=1}^{n}x_{i'}^{2}-S^{(2)}\sum_{\substack{i=1\\ b_{ii}<0}}^{n}|b_{ii}|=f_2^2(x)+B^{\prime -}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-B^{\prime -}S^{(2)}=F_2^2(x).$$

У (24) ми скористалися умовою (17), яка справджується лише в точках E, отже, в правій частині (24) продовження $f_2^2(x)$, яке є, очевидно, опуклим, адже $B^{\prime -}\cdot\sum\limits_{i'\neq i}x_{i'}^2-B^{\prime -}\cdot S^{(2)}=B^{\prime -}\cdot\sum\limits_{i'\neq i}x_{i'}^2-const$ — опукла.

Перед побудовою ОП $F_2^3(x)$ функції $f_2^3(x)$ будуємо ОП для функції (22), що її формують, використовуючи при цьому (17), (18):

$$\begin{aligned}f_{ij}=f_{ij}^{\pm}=\pm x_i\cdot x_j=\frac{1}{2}\left(\left(x_i\pm x_j\right)^2-x_i^2-x_j^2\right)\underset{E}{=}\\=\frac{1}{2}\left(\left(x_i\pm x_j\right)^2+\left(\sum_{i'\neq i,j}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)\right)=F_{ij}.\end{aligned}\qquad(25)$$

Як видно, побудовані продовження F_{ij} функцій f_{ij} — опуклі функції як сума опуклих, $\left(x_i\pm x_j\right)^2$ опукла як квадрат лінійної функції, $\sum\limits_{i'\neq i,j}x_{i'}^2$ — як сума квадратів змінних.

Спростимо вираз F_{ij} у (25):

$$\begin{aligned}F_{ij}=\frac{1}{2}\left(\left(x_i\pm x_j\right)^2+\left(\sum_{i'\neq i,j}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)\right)=\\=\frac{1}{2}\left(\pm 2\cdot x_i\cdot x_j-S^{(2)}+\left(\sum_{i'\neq i,j}x_{i'}^2+x_i^2+x_j^2\right)\right)=\\=\pm x_i\cdot x_j+\frac{1}{2}\sum_{i'=1}^{n}x_{i'}^2-\frac{S^{(2)}}{2}=f_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i'=1}^{n}x_{i'}^2-\frac{S^{(2)}}{2}.\end{aligned}\qquad(26)$$

Як видно, ОП (26) виразу (22) відрізняється від f_{ij} константою $\frac{S^{(2)}}{2}$ і коефіцієнтами при квадратах змінних.

Використовуючи (26) і позначення (13), запишемо шукане ОП $F_2^3(x)$ функції $f_2^3(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{i\neq j}\left|b_{ij}\right|\cdot f_{ij}$:

$$F_2^3(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \left| b_{ij} \right| \cdot F_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \left| b_{ij} \right| \cdot \left(f_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - \frac{S^{(2)}}{2} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \left| b_{ij} \right| \cdot f_{ij} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \left| b_{ij} \right| \left(\frac{1}{2} \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - \frac{S^{(2)}}{2} \right) = f_2^3(x) + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \frac{\left| b_{ij} \right|}{2} - \tag{27}$$

$$-S^{(2)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \frac{\left| b_{ij} \right|}{2} = f_2^3(x) + \frac{B''}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{B''}{2} \cdot S^{(2)}.$$

Об’єднуємо (21), (23), (24), (27):

$$F_2(x) = F_2^1(x) + F_2^2(x) + F_2^3(x) = f_2^1(x) + f_2^2(x) + f_2^3(x) + \left(B' + \frac{B''}{2} \right) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (B' + \frac{B''}{2}) S^{(2)} = f_2(x) + \left(B' + \frac{B''}{2} \right) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(B' + \frac{B''}{2} \right) S^{(2)}. \tag{28}$$

Тоді з урахуванням (28) і позначень (20) ОП $F23(x)$ квадратного поліному (15) запишеться так:

$$F_{23}(x) = F_2(x) + f_3(x) = f_{23}(x) + B \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - B \cdot S^{(2)}. \tag{29}$$

Одержано ОП функції (15) у формі виразу (19), отже, твердження 1 доведено.

Твердження 2. Функція вигляду

$$F_1(x) = f_1(x) + \sum_{i=1} x_i^4 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') + \sum_{i=1} x_i^2 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') + \sum_{i=1} x_i^3 \times$$

$$\times \left(A' + \frac{A'''}{6} \right) - \left(\frac{1}{2}(A'' + A''') \cdot \left(S^{(4)} + S^{(2)} \right) + \left(A' + \frac{A'''}{6} \right) \cdot S^{(3)} \right) \tag{30}$$

є ОП кубічного поліному $f_1(x)$ вигляду (2) на $E_{nk}(G)$.

Доведення. Розіб'ємо (2) на доданки і використаємо позначення (5), (6), вважатимемо при цьому, що $k \le i \le j$:

$$f_1(x) = \sum_{k,i,j=1}^{n} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j = \sum_{k=i=j} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{k=i \neq j} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j +$$

$$+ \sum_{\substack{k \neq i \neq j \\ k \neq j}} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{iii} \cdot x_i^3 + \sum_{i \neq j} a_{iij} \cdot x_i^2 \cdot x_j + \sum_{\substack{k \neq i \neq j \\ k \neq j}} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j = \tag{31}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^{'} \cdot x_i^3 + \sum_{i \neq j} a_{ij}^{''} \cdot x_i^2 \cdot x_j + \sum_{\substack{k \neq i \neq j \\ k \neq j}} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j = f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) = \sum_{j=1}^{3} f_1^j(x).$$

Отже, ми виділили в (2) <u>чисті</u> доданки (що містять куб однієї змінної):

$$f_1^1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{'} \cdot x_i^3 \ ; \qquad (32)$$

<u>напівмішані</u> доданки (що містять дві змінні, причому одна — в квадраті):

$$f_1^2(x) = \sum_{i \neq j} a_{ij}^{''} \cdot x_i^2 \cdot x_j \ ; \qquad (33)$$

<u>мішані</u> доданки (що містять три змінні):

$$f_1^3(x) = \sum_{\substack{k \neq i \neq j \\ k \neq j}} a_{kij} \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j \ . \qquad (34)$$

Із використанням (17) і позначень (7) будуємо ОП функції (32):

$$f_1^1(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^{'} \cdot x_i^3 = \sum_{a_i^{'}>0} a_i^{'} \cdot x_i^3 + \sum_{a_i^{'}<0} a_i^{'} \cdot x_i^3 = \sum_{a_i^{'}>0} a_i^{'} \cdot x_i^3 + \sum_{a_i^{'}<0} \left|a_i^{'}\right| \cdot \left(-x_i^3\right) \underset{E}{=}$$

$$\underset{E}{=} \sum_{a_i^{'}>0} a_i^{'} \cdot x_i^3 + \sum_{a_i^{'}<0} \left|a_i^{'}\right| \cdot \left(\sum_{i' \neq i} x_{i'}^3 - S^{(3)} \right) = \sum_{a_i^{'}>0} a_i^{'} \cdot x_i^3 + \sum_{a_i^{'}<0} \left|a_i^{'}\right| \times$$

$$\times \left(\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^3 - x_i^3 - S^{(3)} \right) = \left(\sum_{a_i^{'}>0} a_i^{'} \cdot x_i^3 + \sum_{a_i^{'}<0} \left|a_i^{'}\right| \cdot (-x_i^3) \right) + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^3 \cdot \sum_{a_i^{'}<0} \left|a_i^{'}\right| - \qquad (35)$$

$$-S^{(3)} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left|a_i^{'}\right| = f_1^1(x) + A^{'-} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - S^{(3)} \cdot A^{'-} = F_1^1(x).$$

Із використанням (17), (18) і позначень (9) будуємо ОП функції (33):

$$f_1^2(x) = \sum_{i \neq j} a_{ij}^{''} \cdot x_i^2 \cdot x_j = \sum_{i \neq j} \frac{\left|a_{ij}^{''}\right|}{2} \cdot \left(\left(x_i^2 \pm x_j\right)^2 - x_i^4 - x_j^2 \right) \underset{E}{=}$$

$$\underset{E}{=} \sum_{i \neq j} \frac{\left|a_{ij}^{''}\right|}{2} \cdot \left(\left(x_i^2 \pm x_j\right)^2 + \left(\sum_{i' \neq i} x_{i'}^4 - S^{(4)} \right) + \left(\sum_{i' \neq j} x_{i'}^2 - S^{(2)} \right) \right) =$$

$$= \sum_{i \neq j} \frac{\left|a_{ij}^{''}\right|}{2} \cdot \left(\pm 2 \cdot x_i^2 \cdot x_j + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^4 + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - S^{(4)} - S^{(2)} \right) =$$

$$= \sum_{i \neq j} \pm \left|a_{ij}^{''}\right| \cdot x_i^2 \cdot x_j + \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^4 + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - S^{(4)} - S^{(2)} \right) \cdot \sum_{i \neq j} \left|a_{ij}^{''}\right| = \qquad (36)$$

$$= \sum_{i \neq j} a_{ij}^{''} \cdot x_i^2 \cdot x_j + \frac{A^{''}}{2} \cdot \left(\sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^4 + \sum_{i'=1}^{n} x_{i'}^2 - S^{(4)} - S^{(2)} \right) =$$

$$= f_1^2(x) + \frac{A''}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - S^{(4)} - S^{(2)} \right) = F_1^2(x).$$

У побудові ОП функції (34) використаємо:

$$\begin{gathered} \left(x_k + x_i \pm x_j \right)^3 = x_k^3 + x_i^3 \pm x_j^3 + 3 \cdot (x_k^2 \cdot x_i \pm x_k^2 \cdot x_j + x_i^2 \cdot x_k \pm \\ \pm x_i^2 \cdot x_j + x_j^2 \cdot x_k + x_j^2 \cdot x_i) \pm 6 \cdot x_k \cdot x_i \cdot x_j . \end{gathered} \tag{37}$$

Уведемо позначення:

$$g_{kij} = \begin{cases} g_{kij}^{+} = x_k \cdot x_i \cdot x_j ; \\ g_{kij}^{-} = -x_k \cdot x_i \cdot x_j . \end{cases} \tag{38}$$

Із використанням (37) функції (38) представимо наступною комбінацією:

$$\begin{gathered} g_{kij} = \pm x_k \cdot x_i \cdot x_j = -\frac{1}{6}\left(x_k^3 + x_i^3 \pm x_j^3 \right) + \frac{1}{6}\left(x_k + x_i \pm x_j \right)^3 - \\ -\frac{1}{2}\left(x_k^2 \cdot x_i \pm x_k^2 \cdot x_j + x_i^2 \cdot x_k \pm x_i^2 \cdot x_j + x_j^2 \cdot x_k + x_j^2 \cdot x_i \right). \end{gathered} \tag{39}$$

При побудові ОП функції g_{kij}^{+} використаємо (17), (18), (39):

$$g_{kij}^{+} = x_k \cdot x_i \cdot x_j = \frac{1}{6}\left(-x_k^3 - x_i^3 - x_j^3 \right) + \frac{1}{6}\left(x_k + x_i + x_j \right)^3 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-x_k^2 \cdot x_i - x_k^2 \cdot x_j - x_i^2 \cdot x_k - x_i^2 \cdot x_j - x_j^2 \cdot x_k - x_j^2 \cdot x_i \right) \underset{E}{=}$$

$$\underset{E}{=} \frac{1}{6}\left(\sum_{i' \neq k,i,j} x_{i'}^3 - S^{(3)} + \left(x_k + x_i + x_j \right)^3 \right) + \frac{1}{4}\left(\left(\left(x_k^2 - x_i \right)^2 - x_k^4 - x_i^2 \right) + \right.$$

$$+ \left(\left(x_k^2 - x_j \right)^2 - x_k^4 - x_j^2 \right) + \left(\left(x_i^2 - x_k \right)^2 - x_i^4 - x_k^2 \right) +$$

$$+ \left(\left(x_i^2 - x_j \right)^2 - x_i^4 - x_j^2 \right) + \left(\left(x_j^2 - x_k \right)^2 - x_j^4 - x_k^2 \right) +$$

$$\left. + \left(\left(x_j^2 - x_i \right)^2 - x_j^4 - x_i^2 \right) \right) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i' \neq k,i,j} x_{i'}^3 - S^{(3)} + \left(x_k + x_i + x_j \right)^3 \right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\left(x_k^2 - x_i \right)^2 + \left(x_k^2 - x_j \right)^2 + \left(x_i^2 - x_k \right)^2 + \left(x_i^2 - x_j \right)^2 + \left(x_j^2 - x_k \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(x_j^2 - x_i \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\left(-x_k^4 - x_i^4 - x_j^4 \right) + \frac{1}{2}\left(-x_k^2 - x_i^2 - x_j^2 \right) =$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^3 - S^{(3)} + \left(x_k + x_i + x_j\right)^3\right) + \frac{1}{4}\left(\left(x_k^2 - x_i\right)^2 + \left(x_k^2 - x_j\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(x_i^2 - x_k\right)^2 + \left(x_i^2 - x_j\right)^2 + \left(x_j^2 - x_k\right)^2 + \left(x_j^2 - x_i\right)^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^4 - S^{(4)} + \sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^2 - S^{(2)}\right) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^3 - S^{(3)} + x_k^3 + x_i^3 + \right.$$

$$+x_j^3 + 3\cdot\left(x_k^2\cdot x_i + x_k^2\cdot x_j + x_i^2\cdot x_k + x_i^2\cdot x_j + x_j^2\cdot x_k + x_j^2\cdot x_i\right) +$$

$$\left. +6\cdot x_k\cdot x_i\cdot x_j\right) + \frac{1}{4}\left(\left(x_k^4 + x_i^2 - 2x_k^2\cdot x_i\right) + \left(x_k^4 + x_j^2 - 2x_k^2\cdot x_j\right) + \right.$$

$$+\left(x_i^4 + x_k^2 - 2x_i^2\cdot x_k\right) + \left(x_i^4 + x_j^2 - 2x_i^2\cdot x_j\right) + \left(x_j^4 + x_k^2 - 2x_j^2\cdot x_k\right) +$$

$$\left. +\left(x_j^4 + x_i^2 - 2x_j^2\cdot x_i\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^4 - S^{(4)} + \sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^2 - S^{(2)}\right) =$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^3 - S^{(3)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^2 - S^{(2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^4 - S^{(4)}\right) + x_k\cdot x_i\cdot x_j.$$

Отже, ОП функції g_{kij}^+ має вигляд:

$$G_{kij}^+ = g_{kij}^+ + \frac{1}{6}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^3 - S^{(3)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^2 - S^{(2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^4 - S^{(4)}\right). \quad (40)$$

Аналогічно і ОП G_{kij}^- функції g_{kij}^- матиме вигляд:

$$g_{kij}^- = -x_k\cdot x_i\cdot x_j = \frac{1}{6}\left(-x_k^3 - x_i^3 + x_j^3\right) + \frac{1}{6}\left(x_k + x_i - x_j\right)^3 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(-x_k^2\cdot x_i + x_k^2\cdot x_j - x_i^2\cdot x_k + x_i^2\cdot x_j - x_j^2\cdot x_k - x_j^2\cdot x_i\right) \underset{E}{=}$$

$$\underset{E}{=}\frac{1}{6}\left(\sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^3 - S^{(3)} + \left(x_k + x_i - x_j\right)^3\right) + \frac{1}{4}\left(\left(\left(x_k^2 - x_i\right)^2 - x_k^4 - x_i^2\right) + \right.$$

$$+\left(\left(x_k^2 + x_j\right)^2 - x_k^4 - x_j^2\right) + \left(\left(x_i^2 - x_k\right)^2 - x_i^4 - x_k^2\right) +$$

$$+\left(\left(x_i^2 + x_j\right)^2 - x_i^4 - x_j^2\right) + \left(\left(x_j^2 - x_k\right)^2 - x_j^4 - x_k^2\right) +$$

$$\left. +\left(\left(x_j^2 - x_i\right)^2 - x_j^4 - x_i^2\right)\right) = \frac{1}{6}\left(\sum_{i'\neq k,i,j} x_{i'}^3 + 2x_j^3 - S^{(3)} + \left(x_k + x_i - x_j\right)^3\right) +$$

$$+\frac{1}{4}\left(\left(x_k^2-x_i\right)^2+\left(x_k^2+x_j\right)^2+\left(x_i^2-x_k\right)^2+\left(x_i^2+x_j\right)^2+\left(x_j^2-x_k\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(x_j^2-x_i\right)^2\right)+\frac{1}{2}\left(-x_k^4-x_i^4-x_j^4\right)+\frac{1}{2}\left(-x_k^2-x_i^2-x_j^2\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{i'\neq k,i,j}x_{i'}^3+2x_j^3-S^{(3)}+\left(x_k+x_i-x_j\right)^3\right)+\frac{1}{4}\left(\left(x_k^2-x_i\right)^2+\left(x_k^2+x_j\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(x_i^2-x_k\right)^2+\left(x_i^2+x_j\right)^2+\left(x_j^2-x_k\right)^2+\left(x_j^2-x_i\right)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'\neq k,i,j}x_{i'}^4-S^{(4)}+\sum_{i'\neq k,i,j}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)=\frac{1}{6}\left(\sum_{i'\neq k,i,j}x_{i'}^3+2x_j^3-S^{(3)}+x_k^3+x_i^3-\right.$$

$$-x_j^3+3\cdot(x_k^2\cdot x_i-x_k^2\cdot x_j+x_i^2\cdot x_k-x_i^2\cdot x_j+x_j^2\cdot x_k+x_j^2\cdot x_i)-$$

$$\left.-6\cdot x_k\cdot x_i\cdot x_j\right)+\frac{1}{4}\left(\left(x_k^4+x_i^2-2x_k^2\cdot x_i\right)+\left(x_k^4+x_j^2-2x_k^2\cdot x_j\right)+\right.$$

$$+\left(x_i^4+x_k^2-2x_i^2\cdot x_k\right)+\left(x_i^4+x_j^2-2x_i^2\cdot x_j\right)+\left(x_j^4+x_k^2-2x_j^2\cdot x_k\right)+$$

$$\left.+\left(x_j^4+x_i^2-2x_j^2\cdot x_i\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'\neq k,i,j}x_{i'}^4-S^{(4)}+\sum_{i'\neq k,i,j}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^3-S^{(3)}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^4-S^{(4)}\right)-x_k\cdot x_i\cdot x_j.$$

Отже,

$$G_{kij}^{-}=g_{kij}^{-}+\frac{1}{6}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^3-S^{(3)}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^4-S^{(4)}\right).\quad(41)$$

Об'єднуємо (40), (41):

$$g_{kij}=g_{kij}^{\pm}=\pm x_k\cdot x_i\cdot x_j\underset{E}{=}g_{kij}+\frac{1}{6}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^3-S^{(3)}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^2-S^{(2)}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1}x_{i'}^4-S^{(4)}\right)=G_{kij}.\quad(42)$$

ОП функції (34) із урахуванням (10), (38), (42) таке:

$$f_1^3(x)=\sum_{\substack{k\neq i\neq j\\ k\neq j}}a_{kij}\cdot x_k\cdot x_i\cdot x_j=\sum_{\substack{k\neq i\neq j\\ k\neq j}}\left|a_{kij}\right|\cdot\pm x_k\cdot x_i\cdot x_j=$$

$$= \sum_{\substack{k\neq i\neq j\\ k\neq j}} \left|a_{kij}\right| \cdot g_{kij} \underset{E}{=} \sum_{\substack{k\neq i\neq j\\ k\neq j}} \left|a_{kij}\right| \cdot G_{kij} \underset{E}{=} \sum_{\substack{k\neq i\neq j\\ k\neq j}} \left|a_{kij}\right| \times$$

$$\times\left(g_{kij} + \frac{1}{6}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^3 - S^{(3)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^2 - S^{(2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^4 - S^{(4)}\right)\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k\neq i\neq j\\ k\neq j}} \left|a_{kij}\right| \left(\frac{1}{6}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^3 - S^{(3)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^2 - S^{(2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i'=1} x_{i'}^4 - S^{(4)}\right)\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k\neq i\neq j\\ k\neq j}} \left|a_{kij}\right| \cdot g_{kij} = f_1^3(x) + A''' \cdot \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1} x_i^4 + \frac{1}{6}\sum_{i=1} x_i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1} x_i^2 \right) -$$

$$- A''' \cdot \left(\frac{1}{2} S^{(4)} + \frac{1}{6} S^{(3)} + \frac{1}{2} S^{(2)} \right) = F_1^3(x). \qquad (43)$$

Об'єднуємо результати (35), (36), (43) і записуємо ОП $F_1\ (x)$ функції $f_1\ (x)$ вигляду (2):

$$F_1\ (x) = F_1^1(x) + F_1^2(x) + F_1^3(x) = \left(f_1^1(x) + A^{\prime -} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - S^{(3)} \cdot A^{\prime -} \right) +$$

$$+ \left(f_1^2(x) + \frac{A''}{2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - S^{(4)} - S^{(2)} \right)\right) + \Big(f_1^3(x) + A''' \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1} x_i^4 + \frac{1}{6}\sum_{i=1} x_i^3 + \frac{1}{2}\sum_{i=1} x_i^2 \right) - A''' \cdot \left(\frac{1}{2} S^{(4)} + \frac{1}{6} S^{(3)} + \frac{1}{2} S^{(2)} \right)\Big) =$$

$$= f_1^1(x) + f_1^2(x) + f_1^3(x) + \sum_{i=1} x_i^4 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') + \sum_{i=1} x_i^2 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') +$$

$$+ \sum_{i=1} x_i^3 \cdot \left(A^{\prime -} + \frac{A'''}{6} \right) - \left(\frac{1}{2}(A'' + A''') \cdot \left(S^{(4)} + S^{(2)} \right) + \left(A^{\prime -} + \frac{A'''}{6} \right) \cdot S^{(3)} \right) =$$

$$= f_1\ (x) + \sum_{i=1} x_i^4 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') + \sum_{i=1} x_i^2 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') + \sum_{i=1} x_i^3 \cdot \left(A^{\prime -} + \frac{A'''}{6} \right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2}(A'' + A''') \cdot (S^{(4)} + S^{(2)}) + \left(A^{\prime -} + \frac{A'''}{6} \right) \cdot S^{(3)} \right).$$

Одержано ОП у формі поліному (30), отже, твердження 2 доведено.

Об'єднуємо результати тверджень 1, 2 і записуємо ОП довільного кубічного поліному $f(x)$ вигляду (1):

$$
\begin{aligned}
F(x) &= F_1(x) + F_{23}(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \sum_{i=1} x_i^4 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') + \\
&+ \sum_{i=1} x_i^2 \cdot \frac{1}{2}(A'' + A''') + \sum_{i=1} x_i^3 \cdot \left(A' + \frac{A'''}{6} \right) - \left(\frac{1}{2}(A'' + A''') \cdot \left(S^{(4)} + S^{(2)} \right) + \right. \\
&\left. + \left(A' + \frac{A'''}{6} \right) \cdot S^{(3)} \right) + \left(B' + \frac{B''}{2} \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(B' + \frac{B''}{2} \right) \cdot S^{(2)} = f(x) + \\
&+ \sum_{i=1} x_i^4 \cdot \frac{A'' + A'''}{2} + \sum_{i=1} x_i^3 \cdot \left(A' + \frac{A'''}{6} \right) + \sum_{i=1} x_i^2 \cdot \left(\frac{A'' + A''' + B''}{2} + B' \right) - \\
&- S^{(4)} \cdot \frac{A'' + A'''}{2} - S^{(3)} \cdot \left(A' + \frac{A'''}{6} \right) - S^{(2)} \cdot \left(\frac{A'' + A''' + B''}{2} + B' \right).
\end{aligned}
\tag{44}
$$

У позначеннях

$$
C = \frac{A'' + A'''}{2},\; C' = A' + \frac{A'''}{6},\; C'' = \frac{A'' + A''' + B''}{2} + B' = C + B' + \frac{B''}{2} \tag{45}
$$

ОП (44) набуває остаточного вигляду:

$$
F(x) = C \cdot \sum_{i=1} x_i^4 + C' \cdot \sum_{i=1} x_i^3 + C'' \cdot \sum_{i=1} x_i^2 - C \cdot S^{(4)} - C' \cdot S^{(3)} - C'' \cdot S^{(2)} . \tag{46}
$$

Спосіб 2 побудови ОП (1) полягає в ітераційному використанні (18) для відокремлення множників із подальшим використанням (17) [3—7]. Так ОП кубічної функції (39) має вигляд:

$$
\begin{aligned}
g_{kij} &= \pm\left(x_k \cdot x_i\right) \cdot x_j = \frac{1}{2}\left(\left(x_k \cdot x_i \pm x_j\right)^2 - x_k^2 \cdot x_i^2 - x_j^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\left(\left(x_k + x_i\right)^2 - x_k^2 - x_i^2 \right) \pm x_j \right)^2 + \frac{1}{2}\left(\left(x_k^2 - x_i^2\right)^2 - x_k^4 - x_i^4 \right) - x_j^2 \right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\left(\left(x_k + x_i\right)^2 - S^{(2)} + \sum_{i' \neq k,i} x_{i'}^2 \right) \pm x_j \right)^2 + \right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\left(\left(x_k^2 - x_i^2\right)^2 - S^{(4)} + \sum_{i' \neq k,i} x_{i'}^4 \right) - S^{(2)} + \sum_{i' \neq j} x_{i'}^2 \right) = G'_{kij} .
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &:= -x_1^3 - 2x_3^3 + 2x_5^3 + 2x_1x_2^2 - x_2x_4^2 - x_4^2x_5 - 3x_1x_2x_3 - \\
&- 4x_1x_4x_5 + 2x_2x_3x_4 - 5x_3x_4x_5 + 2x_1x_4 - x_1^2 + x_1.
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &:= 10616 - 4x_1x_4x_5 - 5x_3x_4x_5 - x_4^2x_5 + 2x_2x_3x_4 + 10x_1^2 - \\
&- 3x_1x_2x_3 - x_2x_4^2 + 2x_1x_2^2 + 2x_1x_4 + 9x_1^4 + x_1 + 9x_2^4 + 11x_2^2 + 9x_3^4 + 11x_3^2 +
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$$+9x_4^4+9x_5^4+11x_5^2+11x_4^2+\frac{16}{3}x_2^3+\frac{16}{3}x_4^3+\frac{13}{3}x_1^3+\frac{10}{3}x_3^3+\frac{22}{3}x_5^3.$$

$$FF(x):=23129-4x_1x_4x_5+2x_2x_3x_1^2+5x_3x_4x_2^2+4x_1x_4x_2^2+5x_3x_4x_1^2+$$
$$+2x_2x_3x_4^2+3x_1x_2x_4^2+3x_1x_2x_5^2-5x_3x_4x_5-10x_4^2x_5+5x_3x_4x_5^2+4x_1x_4x_3^2+$$
$$+3x_1x_2x_3^2-3x_1^2x_3+16x_2^2x_4^2+3x_1x_2^3+4x_1x_4x_5^2+2x_2x_3x_5^2+2x_2x_3x_4-\frac{2783}{2}x_1^2-$$
$$-3x_1x_2x_3+\frac{43}{2}x_2^2x_5^2+2x_1x_2^2+\frac{51}{2}x_1^2x_5^2+23x_2^2x_3^3+20x_1^2x_4^2+25x_1^2x_2^2-275x_3x_4-$$
$$-110x_2x_3-165x_1x_2+4x_1^3x_4+3x_1^3x_2+5x_3^3x_4+x_2x_5^2+x_2x_3^2+x_2x_1^2+27x_1^2x_3^2+$$
$$+18x_3^2x_4^2+\frac{47}{2}x_3^2x_5^2-218x_1x_4+\frac{47}{2}x_1^4+x_1+\frac{39}{2}x_2^4-55x_2-\frac{2341}{2}x_2^2+$$
$$+\frac{43}{2}x_3^4+165x_3-\frac{2561}{2}x_3^2+\frac{29}{2}x_4^4-110x_4+20x_5^4+495x_5-1198x_5^2-$$
$$-\frac{1791}{2}x_4^2+4x_2^3+5x_4^3+2x_1^3-2x_3^3-4x_5^3+\frac{33}{2}x_4^2x_5^2-3x_4^2x_3-9x_1^2x_5+4x_1x_4^3- \quad (50)$$
$$-9x_2^2x_5-9x_3^2x_5+2x_2^3x_3+2x_2^2x_4+2x_2x_3^3+2x_3^2x_4+$$
$$+2x_1^2x_4+2x_5^2x_4+5x_3x_4^3-3x_2^2x_3-3x_5^2x_3.$$

Приклад. Вихідний многочлен (48) містить 13 доданків, результат побудови ОП способом 1 за (46) — многочлен (49) із 25-ма доданками, результат формування ОП способом 2 — поліном (50), що містить 75 доданків.

Як видно, обидва побудовані ОП є многочленами 4-го степеня, але перший переважний, оскільки додає до вихідної функції щонайбільше $3n$ доданків. Щодо многочленів 2-го степеня, для них ОП, побудовані обома способами, будуть цілком ідентичними.

Висновок. Представлено підхід до аналітичного пошуку опуклих продовжень поліномів, заданих на вершинно розташованих комбінаторних множинах, на прикладі кубічних та квадратних поліномів і множини переставлень. Він має як теоретичну цінність, так і практичну, адже відомі постановки задач оптимізації поліномів на комбінаторних множинах є задачами квадратичної та кубічної оптимізації [3—4].

Список використаних джерел:

1. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : ІСДО, 1993. — 188 с.
2. Яковлев С. В. Теория выпуклых продолжений функций на вершинах выпуклых многогранников / С. В. Яковлев // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 7. — С. 1112—1119

3. Элементы теории геометрического проектирования / С. В. Яковлев, Н. И. Гиль, В. М. Комяк, М. В. Новожилова, Т. Е. Романова, С. В. Смеляков и др. ; под ред. В. Л. Рвачева. — К. : Наук. думка, 1995. — 241 с.
4. Стоян Ю. Г. Оптимізація квадратичних функцій на множині перестановок, відображеній у R^n / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлєв, О. В. Паршин // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1989. — № 5. — С. 73—78.
5. Валуйська О. О. Выпуклые продолжения полиномов на комбинаторных множествах и их приложения / О. О. Валуйська, О. С. Пічугіна, С. В. Яковлев // Радиоэлектроника и информатика. — 2002. — № 2. — С. 121—129.
6. Романова Н. Г. Задачі евклідової комбінаторної оптимізації на поліпереставленнях та методи їх розв'язування : дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / Н. Г. Романова. — Полтава, 2006. — 168 с.
7. Пічугіна О. С. Програмно реалізований підхід побудови опуклих продовжень порліномів на переставленнях / О. С. Пічугіна // Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Інформатика та системні науки (ІСН-2010). — 18-20 березня 2010 р. — Полтава, 2010. — С. 158—161.

Two methods of constructing convex extension of cubic polynomials on permutations are presented. One of them is analytical method and the second iterative method is a modification of Stoyan-Yakovlev’s method of constructing convex extension of polynomials given on sets located in vertices. The advantages of the analytical method, such as the method make it possible to write the convex extension in the explicit form in terms of target function coefficients and multisets elements as well as essential reducing amount of items in resulting expression compare with the iterative method, is demonstrated. Constructing convex extension of polynomials allows to use convex programming for solving practical problems, formulated as optimization problems with polynomial target function on permutations.

Key words: *Euclidean combinatorial set, the general set of permutations, multiset, combinatorial optimization, nonlinear optimization, polynomial, convex extension.*

Отримано 28.09.2010