УДК 517.91:532.26

Т. М. Пилипюк, викладач
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ ФУР'Є — ЛЕЖАНДРА — БЕССЕЛЯ НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ ІЗ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Коші) запроваджено гібридне інтегральне перетворення типу Фур'є — Лежандра — Бесселя на полярній осі з двома точками спряження в припущенні, що спектральний параметр бере участь і в крайових умовах і в умовах спряження.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, ядро Коші, функції впливу, спектральна функція, інтегральне зображення, основна тотожність.*

Аналіз та ціль статті. Вивчення фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі. Одним із ефективних методів побудови аналітичних розв'язків таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень, започаткованих в роботі Я. С. Уфлянда [1]. Основні положення гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в роботі [2]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП із спектральним параметром в крайових умовах та умовах спряження.

Основна частина. Запровадимо на множині

$$I_2^+ = \{r: \quad r \in (0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,\infty)\}$$

інтегральне перетворення, породжене гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)} = \theta(r)\theta(R_1-r)a_1^2\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_1)\times \\ \times\theta(R_2-r)a_2^2\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_2)a_3^2 B_{\upsilon,\alpha}, \tag{1}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [3].

У рівності (1) бере участь диференціальний оператор Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [4],

$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ — диференціальний оператор Лежандра [5] та диференціальний оператор Бесселя $B_{\upsilon,\alpha} = \dfrac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r^{-1}\dfrac{d}{dr} - (\upsilon^2-\alpha^2)r^{-2}$ [6]; $\upsilon \ge \alpha \ge -1/2$, $a_j > 0$, $j = \overline{1,3}$, $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$.

Означення. За область визначення ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ приймемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ з такими властивостями: 1) вектор-функція $f(r) = \{g_1''(r); \Lambda_{(\mu)}[g_2(r)]; B_{\upsilon,\alpha}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+; 2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{11}^0\right) g_1(r)\Big|_{r=0} = 0,\ \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma} g_3(r)\right] = 0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^k\right) g_k(r) - \left(\tilde{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j2}^k\right) g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = 0,\quad j,k = 1,2. \tag{3}$$

У рівностях (2), (3) беруть участь величини

$$\tilde{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k - \delta_{jm}^k(\beta^2+\gamma^2),\ \tilde{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k - \gamma_{jm}^k(\beta^2+\gamma^2);\ \gamma^2 \ge 0.$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\alpha_{jm}^k \ge 0,\ \beta_{jm}^k \ge 0,\ \delta_{jm}^k \ge 0,\ \gamma_{jm}^k \ge 0,\ c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k,$$

$$c_{11,k}\cdot c_{21,k} > 0,\ c_{j2,k} = \delta_{2j}^k\gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k\gamma_{2j}^k = 0;$$

$$\alpha_{1j}^k\gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k\gamma_{1j}^k = \beta_{1j}^k\delta_{2j}^k - \beta_{2j}^k\delta_{1j}^k;\ j,m,k = 1,2;\ \alpha_{11}^0 \le 0,\ \beta_{11}^0 \ge 0,$$

$$\left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \ne 0,\ \delta_{11}^0 \ge 0,\ \gamma_{11}^0 \ge 0.$$

Визначимо числа

$$\tilde{a}_{11}^k = \tilde{\alpha}_{11}^k\tilde{\alpha}_{22}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k\tilde{\alpha}_{12}^k,\ \tilde{a}_{21}^k = \tilde{\beta}_{11}^k\tilde{\alpha}_{22}^k - \tilde{\beta}_{21}^k\tilde{\alpha}_{12}^k,$$

$$\tilde{a}_{12}^k = \tilde{\alpha}_{11}^k\tilde{\beta}_{22}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k\tilde{\beta}_{12}^k,\ \tilde{a}_{22}^k = \tilde{\beta}_{11}^k\tilde{\beta}_{22}^k - \tilde{\beta}_{21}^k\tilde{\beta}_{12}^k.$$

Безпосередньо встановлюємо рівності:

1) $\tilde{\alpha}_{11}^k\tilde{\beta}_{21}^k - \tilde{\alpha}_{21}^k\tilde{\beta}_{11}^k = -c_{11,k}$, 2) $\tilde{a}_{22}^k\tilde{a}_{11}^k - \tilde{a}_{12}^k\tilde{a}_{21}^k = c_{11,k}\cdot c_{21,k}$.

Будь-які дві функції $u(r) \in G$ та $v(r) \in G$ зв'язані умовами спряження (2):

$$\tilde{\alpha}_{j1}^k u_k'(R_k) + \tilde{\beta}_{j1}^k u_k(R_k) = \tilde{\alpha}_{j2}^k u_{k+1}'(R_k) + \tilde{\beta}_{j2}^k u_{k+1}(R_k), \tag{4}$$

$$\tilde{\alpha}_{j1}^k v_k'(R_k) + \tilde{\beta}_{j1}^k v_k(R_k) = \tilde{\alpha}_{j2}^k v_{k+1}'(R_k) + \tilde{\beta}_{j2}^k v_{k+1}(R_k). \tag{5}$$

Із алгебраїчної системи (4) знаходимо співвідношення:

$$u_k(R_k) = -\frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}_{21}^k u'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}_{22}^k u_{k+1}(R_k)\right],$$

$$u'_k(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}_{11}^k u'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}_{12}^k u_{k+1}(R_k)\right]. \tag{6}$$

Із алгебраїчної системи (5) знаходимо співвідношення:

$$v_k(R_k) = -\frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}_{21}^k v'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}_{22}^k v_{k+1}(R_k)\right],$$

$$v'_k(R_k) = \frac{1}{c_{11,k}}\left[\tilde{a}_{11}^k v'_{k+1}(R_k) + \tilde{a}_{12}^k v_{k+1}(R_k)\right]. \tag{7}$$

Наявність співвідношень (6), (7) дозволяє встановити базову тотожність:

$$u_k(R_k)v'_k(R_k) - u'_k(R_k)v_k(R_k) =$$
$$= \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}[u_{k+1}(R_k)v'_{k+1}(R_k) - u'_{k+1}(R_k)v_{k+1}(R_k)]. \tag{8}$$

Введемо до розгляду величини

$$\sigma_1 = \frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\frac{shR_1}{shR_2}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{a_1^2},\ \sigma_2 = \frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2}\frac{1}{a_2^2},\ \sigma_3 = \frac{1}{a_3^2},$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r)\theta(R_1 - r)\sigma_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 shr + \theta(r - R_2)\sigma_3 r^{2\alpha+1}$$

та скалярний добуток

$$\big(u(r), v(r)\big) = \int_0^\infty u(r)v(r)\sigma(r)dr \equiv \int_0^{R_1} u_1(r)v_1(r)\sigma_1 dr +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} u_2(r)v_2(r)\sigma_2 shrdr + \int_{R_2}^\infty u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr. \tag{9}$$

Покажемо, що ГДО $M_{\nu,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений.

Дійсно, за рівністю (9) для $u \in G$ та $v \in G$ маємо, що

$$\left(M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[u], v\right) = \int_0^{R_1}\left(a_1^2\frac{d^2}{dr^2}u_1(r)\right)v_1(r)\sigma_1 dr +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}\left(a_2^2\Lambda_{(\mu)}[u_2]\right)v_2(r)\sigma_2 shrdr + \tag{10}$$
$$+\int_{R_2}^{\infty}\left(a_3^2 B_{\upsilon,\alpha}[u_3(r)]\right)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr.$$

Проінтегрувавши в рівності (10) під знаками інтегралів два рази частинами, одержимо:

$$\left(M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[u],v\right)=\sigma_1 a_1^2\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_0^{R_1}+$$

$$+\sigma_2 a_2^2 shr\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{R_1}^{R_2}+ \tag{11}$$

$$+\sigma_3 a_3^2 r^{2\alpha+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{R_2}^{\infty}+\left(u,M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[v]\right).$$

Якщо $\tilde{\alpha}_{11}^0\neq 0$, то

$$-\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\Bigg|_{r=0}=-\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{du_1}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0 u_1\right)\Bigg|_{r=0}\frac{v_1(0)}{\tilde{\alpha}_{11}^0}+\frac{u_1(0)}{\tilde{\alpha}_{11}^0}\times$$

$$\times\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{dv_1}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0 v_1\right)=-\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1}0\cdot v_1(0)+\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1}0\cdot u_1(0)=0.$$

В силу базової тотожності (8) маємо:

$$\left[a_1^2\sigma_1\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)+\sigma_2 a_2^2 shr\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_1}=$$

$$=\left(a_1^2\sigma_1\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\sigma_2 shR_1\right)\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_1}=0,$$

тому що внаслідок вибору чисел σ_1, σ_2

$$a_1^2\sigma_1\cdot\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-a_2^2\sigma_2 shR_1=$$

$$\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\cdot\frac{shR_1}{shR_2}R_2^{2\alpha+1}\frac{c_{21,1}}{c_{11,1}}-\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2}shR_1\equiv 0,$$

$$\left[a_2^2\sigma_2 shR_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)-\sigma_3 a_3^2 R_2^{2\alpha+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_2}=$$

$$=\left(a_2^2\sigma_2 shR_2\frac{c_{21,2}}{c_{11,2}}-a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha+1}\right)\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_2}=0,$$

тому що внаслідок структури σ_2, σ_3

$$a_2^2\sigma_2 shR_2-a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha+1}=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\cdot\frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2}\times$$

$$\times shR_2 \frac{c_{21,2}}{c_{11,2}} - R_2^{2\alpha+1} = R_2^{2\alpha+1}(1-1) = 0.$$

В силу умови обмеження існує таке число γ, що

$$\lim_{r\to\infty} r^{\gamma}\left[r^{2\alpha+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3 - u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right] = 0 .$$

Таким чином, рівність (11) набуває вигляду

$$\left(M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[u], v(r)\right) = \left(u(r), M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[v(r)]\right). \tag{12}$$

Рівність (12) показує, що ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений [7]. Звідси випливає, що спектр ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ дійсний. Оскільки ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ на множині I_2^+ має одну особливу точку $r=\infty$, то його спектр неперервний. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0,\infty)$. Йому відповідає дійсна спектральна вектор-функція

$$V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) +$$

$$+\theta(r-R_1)\theta(R_2 - r)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) + \theta(r-R_2)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta).$$

При цьому функції $V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовільняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2\right)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,\ r \in (0,R_1)\ ,\\
&\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,\ r \in (R_1,R_2)\ ,\\
&\left(B_{\upsilon,\alpha} + b_3^2\right)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = 0,\ r \in (R_2,\infty)\ ,
\end{aligned} \tag{13}$$

крайові умови (2) та умови спряження (3); $b_j^2 = a_j^{-2}(\beta^2 + k_j^2)$, $k_j^2 \ge 0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $\left(\frac{d^2}{dr^2} + b_1^2\right)v = 0$ складають тригонометричні функції $v_1 = \cos b_1 r$ та $v_2 = \sin b_1 r$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $\left(\Lambda_{(\mu)} + b_2^2\right)v = 0$ складають дві дійсні функції $A_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння $\left(B_{\upsilon,\alpha} + b_3^2\right)v = 0$ складають звичайні функції Бесселя $J_{\upsilon,\alpha}(b_3 r)$ та $N_{\upsilon,\alpha}(b_3 r)$ [6].

Якщо в силу лінійності задачі (13) покласти

$$V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 \cos b_1 r + B_1 \sin b_1 r \,,$$

$$V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 A_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr) + B_2 B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr)\,, \qquad (14)$$

$$V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 J_{\upsilon,\alpha}(b_3 r) + B_3 N_{\upsilon,\alpha}(b_3 r)\,,$$

то крайова умова в точці $r=0$ й умови спряження в точках R_1, R_2 для визначення шести величин $A_j, B_j \quad (j=\overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$\tilde{\alpha}_{11}^{0} b_1 B_1 + \tilde{\beta}_{11}^{0} A_1 = 0, \qquad (15)$$

$$v_{j1}^{11}\left(b_1 R_1\right) A_1 + v_{j1}^{12}\left(b_1 R_1\right) B_1 -$$

$$-Y_{-1/2+ib_2;j2}^{(\mu),11}\left(chR_1\right) A_2 - Y_{-1/2+ib_2;j2}^{(\mu),12}\left(chR_1\right) B_2 = 0,\; j=1,2,$$

$$Y_{-1/2+ib_2;j1}^{(\mu),21}\left(chR_2\right) A_2 + Y_{-1/2+ib_2;j1}^{(\mu),22}\left(chR_2\right) B_2 -$$

$$-u_{\upsilon,\alpha;j2}^{21}\left(b_3 R_2\right) A_3 - u_{\upsilon,\alpha;j2}^{22}\left(b_3 R_2\right) B_3 = 0.$$

У системі (15) беруть участь функції:

$$v_{j1}^{11}(b_1 R_1) = \left(\tilde{\alpha}_{j1}^{1}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^{1}\right)\cos b_1 r\Big|_{r=R_1} = -\tilde{\alpha}_{j1}^{1} b_1 \sin b_1 R_1 + \tilde{\beta}_{j1}^{1}\cos b_1 R_1\,,$$

$$v_{j1}^{12}(b_1 R_1) = \left(\tilde{\alpha}_{j1}^{1}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{j1}^{1}\right)\sin b_1 r\Big|_{r=R_1} = \tilde{\alpha}_{j1}^{1} b_1 \cos b_1 R_1 + \tilde{\beta}_{j1}^{1}\sin b_1 R_1\,,$$

$$Y_{-1/2+ib_2;jk}^{(\mu),m1}(chR_m) = \left(\tilde{\alpha}_{jk}^{m}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^{m}\right) A_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m}\,,$$

$$Y_{-1/2+ib_2;jk}^{(\mu),m2}(chR_m) = \left(\tilde{\alpha}_{jk}^{m}\frac{d}{dr} + \tilde{\beta}_{jk}^{m}\right) B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m}\,,$$

$$u_{\upsilon,\alpha;j2}^{21}(b_3 R_2) = \left(\tilde{\alpha}_{j2}^{2}\frac{\upsilon-\alpha}{R_2} + \tilde{\beta}_{j2}^{2}\right) J_{\upsilon,\alpha}(b_3 R_2) - \tilde{\alpha}_{j2}^{2} b_3^2 R_2 J_{\upsilon+1,\alpha+1}(b_3 R_2)\,,$$

$$u_{\upsilon,\alpha;j2}^{22}(b_3 R_2) = \left(\tilde{\alpha}_{j2}^{2}\frac{\upsilon-\alpha}{R_2} + \tilde{\beta}_{j2}^{2}\right) N_{\upsilon,\alpha}(b_3 R_2) - \tilde{\alpha}_{j2}^{2} b_3^2 R_2 N_{\upsilon+1,\alpha+1}(b_3 R_2)\,.$$

Зауважимо, що алгебраїчна система (15) сумісна [7]. Покладемо $A_1 = \tilde{\alpha}_{11}^{0} b_1 A_0$, $B_1 = -\tilde{\beta}_{11}^{0} A_0$. Перше рівняння системи стає тотожністю. Для знаходження A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$Y_{-1/2+ib_2;j2}^{(\mu),11}\left(chR_1\right) A_2 + Y_{-1/2+ib_2;j2}^{(\mu),12}\left(chR_1\right) B_2 = A_0 \delta_{j1}(\beta), \quad j=1,2. \qquad (16)$$

Тут прийнято, що $\delta_{j1}(\beta)=\tilde{\alpha}_{11}^0 b_1 v_{j1}^{11}\left(b_1 R_1\right)-\tilde{\beta}_{11}^0 v_{j1}^{12}\left(b_1 R_1\right)$, A_0 — підлягає визначенню.

Визначник алгебраїчної системи (16)

$$q_{(\mu)}(\beta)\equiv Y_{-1/2+ib_2;12}^{(\mu),11}Y_{-1/2+ib_2;22}^{(\mu),12}-Y_{-1/2+ib_2;22}^{(\mu),11}Y_{-1/2+ib_2;12}^{(\mu),12}=\frac{c_{21,1}}{shR_1}\cdot\frac{1}{S_{(\mu)}(b_2)}\neq 0,$$

$$S_{(\mu)}(b_2)=\frac{\pi^3 2^{\mu_1-\mu_2}\gamma_{(\mu)}(b_2)\left[sh\left(2\pi b_2\right)\right]^{-1}}{\left|\Gamma(1/2+ib_2+\upsilon^+)\right|^2\left|\Gamma(1/2+ib_2+\upsilon^-)\right|^2},\ \upsilon^{\pm}=\frac{1}{2}\left(\mu_1\pm\mu_2\right),$$

$$\gamma_{(\mu)}(b_2)=\frac{\cos\mu_1\pi\quad sh\left(2\pi b_2\right)}{\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi\quad ch\left(2\pi b_2\right)}.$$

Алгебраїчна система (16) має єдиний розв'язок [7]

$$\begin{aligned}A_2&=-A_0 q_{(\mu)}^{-1}\left[\delta_{21}(\beta)Y_{-1/2+ib_2;12}^{(\mu),12}\left(chR_1\right)-\delta_{11}(\beta)Y_{-1/2+ib_2;22}^{(\mu),12}\left(chR_1\right)\right],\\ B_2&=A_0 q_{(\mu)}^{-1}\left[\delta_{21}(\beta)Y_{-1/2+ib_2;12}^{(\mu),11}\left(chR_1\right)-\delta_{11}(\beta)Y_{-1/2+ib_2;22}^{(\mu),11}\left(chR_1\right)\right].\end{aligned}\tag{17}$$

При відомих A_2, B_2 розглянемо алгебраїчну систему стосовно A_3, B_3:

$$u_{\upsilon,\alpha;j2}^{21}\left(b_3R_2\right)A_3+u_{\upsilon,\alpha;j2}^{22}\left(b_3R_2\right)B_3=A_0 q_{(\mu)}^{-1}a_{(\mu);j}(\beta).\tag{18}$$

В алгебраїчній системі (18) прийняті позначення:

$$\delta_{(\mu);kj}(\beta)=Y_{-1/2+ib_2;k2}^{(\mu),11}\left(chR_1\right)Y_{-1/2+ib_2;j1}^{(\mu),22}\left(chR_2\right)-$$

$$-Y_{-1/2+ib_2;k2}^{(\mu),12}\left(chR_1\right)Y_{-1/2+ib_2;j1}^{(\mu),21}\left(chR_2\right),$$

$$a_{(\mu);j}(\beta)=\delta_{21}(\beta)\delta_{(\mu);1j}(\beta)-\delta_{11}(\beta)\delta_{(\mu);2j}(\beta);\quad j,k=1,2.$$

Визначник алгебраїчної системи (18)

$$q_{\upsilon,\alpha}(\beta)\equiv u_{\upsilon,\alpha;12}^{21}\left(b_3R_2\right)u_{\upsilon,\alpha;22}^{22}\left(b_3R_2\right)-$$

$$-u_{\upsilon,\alpha;22}^{21}\left(b_3R_2\right)u_{\upsilon,\alpha;12}^{22}\left(b_3R_2\right)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21,2}}{b_3^{2\alpha}R_2^{2\alpha+1}}\neq 0.$$

Алгебраїчна система (18) має єдиний розв'язок [7]:

$$A_3=-\omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta),\ \ B_3=\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta),\ \ A_0=q_{(\mu)}(\beta)q_{\upsilon,\alpha}(\beta);\tag{19}$$

$$\omega_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta)=a_{(\mu);2}(\beta)u_{\upsilon,\alpha;12}^{2j}\left(b_3R_2\right)-a_{(\mu);1}(\beta)u_{\upsilon,\alpha;22}^{2j}\left(b_3R_2\right),\quad j=1,2.$$

Підставивши визначені величини A_j, B_j згідно формул (17) та (19) у рівності (14), одержуємо функції $V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$:

$$V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 b_1\cos b_1 r-\tilde{\beta}_{11}^0\sin b_1 r\right)q_{(\mu)}(\beta)q_{\upsilon,\alpha}(\beta),$$

$$V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=q_{\upsilon,\alpha}(\beta)\Big[\delta_{21}(\beta)f_{-1/2+ib_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1,chr\right)-$$

$$-\delta_{11}(\beta)f_{-1/2+ib_2;22}^{(\mu),1}\left(chR_1,chr\right)\Big],$$

$$V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)N_{\upsilon,\alpha}(b_3r)-\omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)J_{\upsilon,\alpha}(b_3r); \qquad (20)$$

$$f_{-1/2+ib_2;j2}^{(\mu),1}\left(chR_1,chr\right)=Y_{-1/2+ib_2;j2}^{(\mu),11}\left(chR_1\right)B_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr)-$$

$$-Y_{-1/2+ib_2;j2}^{(\mu),12}\left(chR_1\right)A_{-1/2+ib_2}^{(\mu)}(chr).$$

Отже, спектральна функція $V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)$ визначена.

Введемо до розгляду спектральну щільність

$$\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)=\beta b_3^{2\alpha}\left(\left[\omega_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta)\right]^2\right)^{-1}. \qquad (21)$$

Наявність спектральної вектор-функції $V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)$, вагової функції $\sigma(r)$ та спектральної щільності $\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)$ дає можливість запровадити пряме $H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ та обернене $H_{\upsilon,\alpha}^{-(\mu)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$, визначеного рівністю (1) [2]:

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]=\int_0^\infty g(r)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta), \qquad (22)$$

$$H_{\upsilon,\alpha}^{-(\mu)}[\tilde{g}(\beta)]=\int_0^\infty \tilde{g}(\beta)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\equiv g(r), \qquad (23)$$

де $g(r)\in G$ (область визначення ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$).

Математичним обґрунтуванням формул (22), (23) є твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо функція

$$f(r)=\left[\theta(r)\theta\left(R_1-r\right)\cdot 1+\theta\left(r-R_1\right)\theta(R_2-r)\sqrt{shr}+\theta\left(r-R_2\right)r^{\alpha+1/2}\right]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь-якого $r\in I_2^+$ справджується інтегральне зображення

$$g(r)=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty g(\rho)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\right)V_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta. \qquad (24)$$

Доведення теореми виконаємо методом дельта-подібної послідовності — ядро Коші: фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для сепаратної системи рівнянь з частинними похідними параболічного типу [8], породженої ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$.

Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2^+ = \left\{(t,r): t \in (0,\infty); r \in I_2^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [8]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = 0, \quad r \in \left(0, R_1\right),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2] = 0, \quad r \in \left(R_1, R_2\right), \tag{25}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\upsilon,\alpha}[u_3] = 0, \quad r \in \left(R_2, \infty\right),$$

з початковими умовами

$$u_1(t,r)\big|_{t=0} = g_1(r),\ r \in (0,R_1);\ u_2(t,r)\big|_{t=0} = g_2(r), r \in (R_1,R_2); \tag{26}$$

$$u_3(t,r)\big|_{t=0} = g_3(r),\ r \in (R_2,\infty);$$

крайовими умовами

$$\left(L_{11}^0[u_1]\right)\Big|_{r=0} = 0,\ \lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma} u_3(t,r)\right] = 0 \tag{27}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k\left[u_k(t,r)\right] - L_{j2}^k\left[u_{k+1}(t,r)\right]\right)\Big|_{r=R_k} = 0;\ j,k = 1,2\,. \tag{28}$$

У рівностях (27), (28) беруть участь диференціальні оператори

$$L_{jk}^m = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t},\ m = 0,1,2;\ j,k = 1,2\,.$$

Припустимо, що вектор-функція $u(t,r) = \left\{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\right\}$ є оригіналом Лапласа стосовно t [9]. У зображенні за Лапласом параболічній задачі (25)—(28) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Фур'є, Лежандра та Бесселя для модифікованих функцій

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_1^2\right)u_1^*(p,r) = -a_1^{-2} g_1(r)\,,$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2\right)u_2^*(p,r) = -a_2^{-2} g_2(r)\,, \tag{29}$$

$$\left(B_{\upsilon,\alpha} - q_3^2\right)u_3^*(p,r) = -a_3^{-2} g_3(r)$$

з крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0 \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^0\right)u_1^*\big|_{r=0} = \psi_{11}^0 \equiv \delta_{11}^0 g_1'(0) + \gamma_{11}^0 g_1(0);\ \lim_{r\to\infty}\left(r^{\gamma} u_3^*(p,r)\right) = 0 \tag{30}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\bar{\alpha}_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j1}^{k}\right)u_{k}^{*}(p,r)-\left(\bar{\alpha}_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\bar{\beta}_{j2}^{k}\right)u_{k+1}^{*}(p,r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\psi_{jk}\,,\quad(31)$$

$$\psi_{jk}=\delta_{j1}^{k}g_{k}'(R_k)+\gamma_{j1}^{k}g_{k}(R_k)-\left[\delta_{j2}^{k}g_{k+1}'\left(R_k\right)+\gamma_{j2}^{k}g_{k+1}\left(R_k\right)\right].$$

Можна вважати, що початкові функції $g_j(r)$ такі, що $\psi_{11}^{0}=0$ та $\psi_{jk}=0$. Якщо це не так, то переходимо до нових початкових даних

$$\begin{aligned}\bar{g}_1&=g_1(r)-(a_1r+b_1)\,,\\ \bar{g}_2&=g_2(r)-(a_2r+b_2)\,,\\ \bar{g}_3&=g_3(r)-b_3\end{aligned}\qquad(32)$$

і числа a_1,a_2, b_1,b_2,b_3 знайдемо із алгебраїчної системи

$$\left.\begin{aligned}&\delta_{11}^{0}a_1+\gamma_{11}^{0}b_1=\psi_{11}^{0}\\ &\left(\gamma_{j1}^{k}R_k+\delta_{j1}^{k}\right)a_k+\gamma_{j1}^{k}b_k-\left[\left(\gamma_{j2}^{k}R_k+\delta_{j2}^{k}\right)a_{k+1}+\gamma_{j2}^{k}b_{k+1}\right]=\psi_{jk}\,,\ a_3=0\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

У системі (29) $q_j=a_j^{-1}(p+\gamma_j)^{1/2}$, $u_j^{*}(p,r)=\int\limits_0^{\infty}u_j(t,r)e^{-pt}dt$, $\bar{\alpha}_{jk}^{m}=\alpha_{jk}^{m}+\delta_{jk}^{m}p$, $\bar{\beta}_{jk}^{m}=\beta_{jk}^{m}+\gamma_{jk}^{m}p$, $\operatorname{Re}q_j>0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2\big/dr^2-q_1^2\right)v=0$ утворюють гіперболічні функції $v_1=chq_1r$ та $v_2=shq_1r$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2\right)v=0$ утворюють функції $v_1=P_{-1/2+q_2}^{(\mu)}(chr)$ та $v_2=L_{-1/2+q_2}^{(\mu)}(chr)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\upsilon,\alpha}-q_3^2\right)v=0$ утворюють модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{\upsilon,\alpha}(q_3r)$ й другого роду $K_{\upsilon,\alpha}(q_3r)$ [6].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (29)—(31) методом функцій Коші [3; 4]:

$$u_1^{*}(p,r)=A_1chq_1r+B_1shq_1r+\int\limits_0^{R_1}E_1^{*}(p,r,\rho)\bar{g}_1(\rho)d\rho\,,$$

$$u_2^{*}(p,r)=A_2P_{-1/2+q_2}^{(\mu)}(chr)+B_2L_{-1/2+q_2}^{(\mu)}(chr)+\int\limits_{R_1}^{R_2}E_2^{*}(p,r,\rho)\bar{g}_2(\rho)sh\rho d\rho\,,$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 K_{\upsilon,\alpha}(q_3 r) + \int\limits_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho)\overline{g}_3(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho\,, \tag{34}$$

$$\left(\overline{g}_j(\rho) = a_j^{-2} g_j(\rho), \quad j = \overline{1,3}\right).$$

Під знаком інтегралів стоять функції Коші [3; 4]:

$$E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho+0} - E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho-0} = 0\,,$$

$$\left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho+0} - \left.\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\right|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(r)}\,, \tag{35}$$

$$\varphi_1(\rho) = 1,\ \varphi_2(\rho) = sh\rho,\ \varphi_3(\rho) = \rho^{2\alpha+1}\,.$$

Безпосередньо перевіряється, що за функції Коші можна взяти функції:

$$E_1^*(p,r,\rho) = \frac{-1}{q_1\Delta_1(q_1)}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1,r)\Phi_{11}^1\left(q_1R_1,q_1\rho\right),\ 0<r<\rho<R_1\\ \Phi_{11}^0(q_1,\rho)\Phi_{11}^1\left(q_1R_1,q_1r\right),\ 0<\rho<r<R_1\end{cases}, \tag{36}$$

$$\Delta_j(q_1) = \overline{\beta}_{11}^0 V_{j1}^{12}(q_1R_1) - \overline{\alpha}_{11}^0 q_1 V_{j1}^{11}(q_1R_1),\ j=1,2;$$

$$\Phi_{11}^0(q_1,\rho) = \overline{\alpha}_{11}^0 q_1 chq_1\rho - \overline{\beta}_{11}^0 shq_1\rho;$$

$$E_2^*(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}\left(chR_1,chR_2\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1,chr\right)F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}\left(chR_2,ch\rho\right),R_1<r<\rho<R_2\\ F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}\left(chR_1,ch\rho\right)F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}\left(chR_2,chr\right),R_1<\rho<r<R_2\end{cases}, \tag{37}$$

$$\Delta_{\upsilon_2;jk}^{(\mu)}(chR_1,chR_2) = Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);11}(chR_1)Z_{\upsilon_2;k1}^{(\mu);22}(chR_2) -$$

$$-Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);12}(chR_1)Z_{\upsilon_2;k1}^{(\mu);21}(chR_2),\nu_2 = -\frac{1}{2}+q_2;$$

$$E_3^*(p,r,\rho) = -\frac{q_3^{2\alpha}}{U_{\upsilon,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)}\times$$

$$\times\begin{cases}K_{\upsilon,\alpha}(q_3\rho)\Psi_{\upsilon,\alpha;12}^{2*}(q_3R_2,q_3r),R_2<r<\rho<\infty\\ K_{\upsilon,\alpha}(q_3r)\Psi_{\upsilon,\alpha;12}^{2*}(q_3R_2,q_3\rho),R_2<\rho<r<\infty\end{cases}. \tag{38}$$

Всі інші функції, які беруть участь у формулах (36)—(38), загальноприйняті [2; 10].

Крайова умова в точці $r=0$ та умови спряження (31) для визначення величин A_j $(j=1,2)$ й B_k $(k=\overline{1,3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему з п'яти рівнянь:

$$\bar{\beta}_{11}^{0} A_1 + \bar{\alpha}_{11}^{0} q_1 B_1 = 0,$$

$$V_{j1}^{11}(q_1R_1)A_1 + V_{j1}^{12}(q_1R_1)B_1 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);11}(chR_1)A_2 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);12}(chR_1)B_2 = \delta_{j2}G_{12}^{*},\ j = 1,2,$$

$$Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu);21}(chR_2)A_2 + Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu);22}(chR_2)B_2 - U_{\upsilon,\alpha;j2}^{22}(q_3R_2)B_3 = \delta_{j2}G_{23}^{*}. \quad (39)$$

У системі (39) беруть участь функції

$$G_{12}^{*} = -\int_{0}^{R_1} \frac{c_{11}^{*}\Phi_{11}^{0}(q_1,\rho)}{\Delta_1(q_1)} \bar{g}_1(\rho)d\rho -$$

$$-\frac{c_{21}^{*}}{shR_1} \int_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} \bar{g}_2(\rho) sh\rho d\rho,$$

$$G_{23}^{*} = \frac{c_{12}^{*}}{shR_2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} \bar{g}_2(\rho) sh\rho d\rho +$$

$$+\int_{R_2}^{\infty} \frac{K_{\upsilon,\alpha}(q_3\rho)}{U_{\upsilon,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)} \bar{g}_3(\rho)\rho^{2\alpha+1} d\rho \frac{c_{22}^{*}}{R_2^{2\alpha+1}}$$

та символ Кронекера δ_{j2} ($\delta_{12} = 0$, $\delta_{22} = 1$) [7].

Введемо до розгляду функції:

$$A_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(p) = \Delta_{\upsilon_2;j1}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)U_{\upsilon,\alpha;22}^{22}(q_3R_2) -$$

$$-\Delta_{\upsilon_2;j2}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)U_{\upsilon,\alpha;12}^{22}(q_3R_2),$$

$$B_{\upsilon_2;j}^{(\mu)}(p) = \Delta_1(q_1)\Delta_{\upsilon_2;2j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) -$$

$$-\Delta_2(q_1)\Delta_{\upsilon_2;1j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2), \quad j = 1,2,$$

$$\Theta_{(\mu);1}(r,p) = \Delta_2(q_1)F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, chr) - \Delta_1(q_1)F_{\upsilon_2;22}^{(\mu),1}(chR_1, chr),$$

$$\Theta_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,p) = U_{\upsilon,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)F_{\upsilon_2;21}^{(\mu),2}(chR_2, chr) -$$

$$-U_{\upsilon,\alpha;22}^{22}(q_3R_2)F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, chr).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (29)—(31): для $p = \sigma + is$ із $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, де σ_0 — абсциса збіжності інтегралу Лапласа, та $\operatorname{Im} p = s \in (-\infty, +\infty)$ визначник алгебраїчної системи (39)

$$\begin{aligned} \Delta_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(p) &\equiv U_{\upsilon,\alpha;22}^{22}(q_3R_2)B_{\upsilon_2;1}^{(\mu)}(p) - U_{\upsilon,\alpha;12}^{22}(q_3R_2)B_{\upsilon_2;2}^{(\mu)}(p) = \\ &= \Delta_1(q_1)A_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(p) - \Delta_2(q_1)A_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(p) \neq 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (29) функції впливу:

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;11}(p,r,\rho)=\frac{1}{q_1\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}\Phi^0_{11}(q_1,r)\Big[A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(p)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1\rho)-\\ \Phi^0_{11}(q_1,\rho)\Big[A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(p)\Phi^1_{21}(q_1R_1,q_1r)-\end{cases}$$

$$-A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(p)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1\rho)\Big],\quad 0<r<\rho<R_1,$$

$$-A^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(p)\Phi^1_{11}(q_1R_1,q_1r)\Big],\quad 0<\rho<r<R_1,$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;12}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{21}(p)}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\Phi^0_{11}(q_1,r)\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(r,p),$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;13}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{21}(p)}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\cdot\frac{\overset{*}{c}_{22}(p)}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\Phi^0_{11}(q_1,r)K_{\upsilon,\alpha}(q_3\rho),$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;21}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{11}(p)}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}P^{(\mu)}_{\upsilon_1}(ch\rho)\Theta_{\upsilon,\alpha;2}(r,p),\qquad(41)$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;22}(p,r,\rho)=\frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}\Theta_{(\mu);1}(r,p)\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(\rho,p), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Theta_{(\mu);1}(\rho,p)\Theta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(r,p), & R_1<r<\rho<R_2\end{cases},$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;23}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{22}(p)}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta_{(\mu);1}(r,p)K_{\upsilon,\alpha}(q_3\rho);$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;31}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{11}(p)\overset{*}{c}_{12}(p)}{B_{(\mu)}(q_2)shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\Phi^0_{11}(q_1,\rho)K_{\upsilon,\alpha}(q_3r),$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;32}(p,r,\rho)=\frac{\overset{*}{c}_{12}(p)}{shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\cdot\Theta_{(\mu);1}(\rho,p)K_{\upsilon,\alpha}(q_3r),$$

$$H^{(\mu)*}_{\upsilon,\alpha;33}(p,r,\rho)=\frac{q_3^{2\alpha}}{\Delta^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(p)}\begin{cases}K_{\upsilon,\alpha}(q_3\rho)\Big[B^{(\mu)}_{\upsilon_2;2}(p)\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha;12}(q_3R_2,q_3r)-\\ K_{\upsilon,\alpha}(q_3r)\Big[B^{(\mu)}_{\upsilon_2;2}(p)\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha;12}(q_3R_2,q_3\rho)-\end{cases}$$

$$-B^{(\mu)}_{\upsilon_2;1}(p)\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha;22}(q_3R_3,q_3r)\Big],\quad R_2<r<\rho<\infty$$

$$-B^{(\mu)}_{\upsilon_2;1}(p)\Psi^{2*}_{\upsilon,\alpha;22}(q_3R_2,q_3\rho)\Big],\quad R_2<\rho<r<\infty.$$

Підставивши обчислені значення A_j та B_k у формули (34), після низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (29)—(31):

$$u_j^*(p,r) = \int_0^{R_1} H_{\upsilon,\alpha;j1}^{(\mu)*}(p,r,\rho)a_1^{-2}g_1(\rho)d\rho +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} H_{\upsilon,\alpha;j2}^{(\mu)*}(p,r,\rho)a_2^{-2}g_2(\rho)sh\rho d\rho + \quad (42)$$
$$+\int_{R_2}^{\infty} H_{\upsilon,\alpha;j3}^{(\mu)*}(p,r,\rho)a_3^{-2}g_3(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho, \quad j=\overline{1,3}.$$

Повертаючись до оригіналу, маємо єдиний розв'язок параболічної крайової задачі (25)—(28):

$$u_j(t,r) = \int_0^{R_1} H_{\upsilon,\alpha;j1}^{(\mu)}(t,r,\rho)a_1^{-2}g_1(\rho)d\rho +$$
$$+\int_{R_1}^{R_2} H_{\upsilon,\alpha;j2}^{(\mu)}(t,r,\rho)a_2^{-2}g_2(\rho)sh\rho d\rho + \quad (43)$$
$$+\int_{R_2}^{\infty} H_{\upsilon,\alpha;j3}^{(\mu)}(t,r,\rho)a_3^{-2}g_3(\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho, \quad j=\overline{1,3}.$$

У рівностях (43) за означенням [9]

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}(p,r,\rho)e^{pt}d\rho, \ j,k=\overline{1,3}. \quad (44)$$

Особливими точками функцій впливу $H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_1^2$, $p=-\gamma_2^2$, $p=-\gamma_3^2$ та $p=\infty$. Метод контурного інтегралу в поєднанні з лемою Жордана й теоремою Коші [9] приводить формули (44) до «робочої форми»:

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho) =$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Im}\left[H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)*}\left(e^{i\pi}(\beta^2+\gamma^2),r,\rho\right)\right]e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\beta d\beta; \quad (45)$$
$$j,k=\overline{1,3},$$

де $\gamma^2 = \max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}$.

Виконавши зазначені у формулах (45) операції, одержуємо:

$$H_{\upsilon,\alpha;jk}^{(\mu)}(t,r,\rho) =$$
$$= \int_0^{\infty} e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)V_{\upsilon,\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta)\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\sigma_k a_k^2; \ j,k=\overline{1,3}. \quad (46)$$

Розв'язок (43) параболічної задачі (25)—(28) набуває вигляду:

$$u_j(t,r)=\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_1 d\rho\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta+$$

$$+\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_2 sh\rho d\rho\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta+ \qquad (47)$$

$$+\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}V_{\upsilon,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)\int_{R_2}^\infty g_3(\rho)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha+1} d\rho\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta;\ j=\overline{1,3}.$$

Внаслідок початкових умов (26) та властивостей ядра Коші як дельта-подібної послідовності отримуємо із (47) інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\int_0^\infty V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\int_0^{R_1} g_1(\rho)V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_1 d\rho\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\,, \qquad (48)$$

$$g_2(r)=\int_0^\infty V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_2 sh\rho d\rho\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta\,, \qquad (49)$$

$$g_3(r)=\int_0^\infty V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\int_{R_2}^\infty g_3(\rho)V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(\rho,\beta)\sigma_3\rho^{2\alpha+1} d\rho\Omega_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}(\beta)d\beta. \qquad (50)$$

Інтегральні зображення (48)—(50) рівносильні інтегральному зображенню (24). **Теорему доведено.**

Застосування запровадженого формулами (22), (23) ГІП до розв'язання відповідних задач математичної фізики неоднорідних середовищ базується на основній тотожності ГІП ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$.

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція $f(r)=\left\{g_1''(r);\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)];B_{\upsilon,\alpha}[g_3(r)]\right\}$ неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{11}^0\right)g_1(r)\Big|_{r=0}=g_0,\ \lim_{r\to\infty}\left[r^\gamma g_3(r)\right]=0$$

та умови спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j1}^k\right)g_k(r)-\left(\tilde{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dr}+\tilde{\beta}_{j2}^k\right)g_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk},\quad j,k=1,2\,,$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$:

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}\left[M_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[g(r)]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-$$

$$-\sum_{j=1}^{3} k_j^2 \tilde{g}_j(\beta) + \sigma_1 \left(-\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1} a_1^2 V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(0,\beta) g_0 +$$
$$+\sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z_{\upsilon,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k} - Z_{\upsilon,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k} \right] \qquad (51)$$

У рівності (51) прийняті позначення:

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r) V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 dr \,,$$

$$\tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shr dr \,,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{\infty} g_3(r) V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha+1} dr \,,$$

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 : c_{11,1}, \quad d_2 = a_2^2\sigma_2 sh R_2 : c_{11,2} \,,$$

$$Z_{\upsilon,\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta) = \left(\tilde{\alpha}_{i2}^k \, d/dr + \tilde{\beta}_{i2}^k\right) V_{\upsilon,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_k} \,,\; i,k = 1,2 \,.$$

Доведення тотожності (51) проводиться стандартним способом (за відомою логічною схемою) [11].

Логічну схему застосування запровадженого формулами (22), (23) ГІП до розв'язання відповідних задач математичної фізики покажемо на типових задачах квазістатики й динаміки.

Задача квазістатики. Побудувати обмежений в області D_2^+ розв'язок параболічної системи

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} = f_1(t,r), \quad r \in (0, R_1) \,,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2] = f_2(t,r), \quad r \in (R_1, R_2) \,, \qquad (52)$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\upsilon,\alpha}[u_3] = f_3(t,r), \quad r \in (R_2, \infty)$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\left[\left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}\right] u_1(t,r)\Big|_{r=0} = g_0(t),$$
$$\lim_{r\to\infty}\left[r^{\gamma} u_3(t,r)\right] = 0 \qquad (53)$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^{k}+\delta_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}+\gamma_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k}(t,r)-\left[\left(\alpha_{j2}^{k}+\delta_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_{j2}^{k}+\gamma_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial t}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t);\quad j,k=1,2 \tag{54}$$

Розв'язання. Запишемо систему (52) й початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_1^2-a_1^2\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_1(t,r)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_2^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_2(t,r)\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\gamma_3^2-a_3^2B_{\upsilon,\alpha}\right)u_3(t,r)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}u_1(t,r)\\ u_2(t,r)\\ u_3(t,r)\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}. \tag{55}$$

Інтегральний оператор $H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}$ згідно правила (22) зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка:

$$H_{\upsilon,\alpha}^{(\mu)}[\ldots]=\left[\int_0^{R_1}\cdots V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_1 dr\int_{R_1}^{R_2}\cdots V_{\upsilon,\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_2 shrdr\right.$$
$$\left.\int_{R_2}^{\infty}\cdots V_{\upsilon,\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha+1}dr\right]. \tag{56}$$

Припустимо, що $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}=\gamma_1^2>0$. Покладемо $k_1^2=0$, $k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\geq 0$, $k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\geq 0$. Застосуємо до задачі (55) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (56). Внаслідок основної тотожності (51) одержуємо задачу Коші:

$$\left(\frac{d}{dt}+\beta^2+\gamma_1^2\right)\tilde{u}(t,\beta)=\tilde{f}(t,\beta)+a_1^2\sigma_1\left(-\tilde{\alpha}_{11}^{0}\right)^{-1}V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(0,\beta)g_0(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\upsilon,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}(t)-Z_{\upsilon,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}(t)\right],\ \ \tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0}=0. \tag{57}$$

Розв'язком задачі Коші (57) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta)=\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,\beta)d\tau+$$
$$+a_1^2\sigma_1 q_{(\mu)}(\beta)q_{\upsilon,\alpha}(\beta)\beta\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}g_0(\tau)d\tau+ \tag{58}$$

$$+\sum_{k=1}^{2} d_k \left[Z^{(\mu),k}_{\upsilon,\alpha;12}(\beta)\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}\omega_{2k}(\tau)d\tau - \right.$$

$$\left. -Z^{(\mu),k}_{\upsilon,\alpha;22}(\beta)\int_0^t e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)(t-\tau)}\omega_{1k}(\tau)d\tau \right].$$

Інтегральний оператор $H^{-(\mu)}_{\upsilon,\alpha}$ згідно правила (23) як обернений до (56) зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця:

$$H^{-(\mu)}_{\upsilon,\alpha}[\ldots] = \begin{bmatrix} \int_0^\infty \cdots V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta \\ \int_0^\infty \cdots V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;2}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta \\ \int_0^\infty \cdots V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;3}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Застосуємо операторну матрицю-стовпець (59) за правилом множення матриць до матриці-елемента $\left[\tilde{u}(t,\beta)\right]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (58). У результаті низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок параболічної задачі (52)—(54):

$$u_j(t,r) = \int_0^t \int_0^{R_1} H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j1}(t-\tau,r,\rho) f_1(\tau,\rho)\sigma_1 d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j2}(t-\tau,r,\rho)\times$$

$$\times f_2(\tau,\rho)\sigma_2 sh\rho d\rho d\tau \int_0^t \int_{R_2}^{\infty} H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j3}(t-\tau,r,\rho) f_3(\tau,\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha+1} d\rho d\tau +$$

$$+\int_0^t W^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[\int_0^t R^{(\mu),kj}_{\upsilon,\alpha;12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)d\tau - \right. \tag{60}$$

$$\left. -\int_0^t R^{(\mu),kj}_{\upsilon,\alpha;22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)d\tau \right]; \quad j=\overline{1,3}.$$

У формулах (60) беруть участь головні розв'язки параболічної крайової задачі (52)—(54):

1) породжені неоднорідністю системи (52) функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;jk}(t,r,\rho) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t} V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta) V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta; \; j,k=\overline{1,3};$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1j}(t,r)=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}a_1^2\sigma_1\beta q_{(\mu)}(\beta)q_{\upsilon,\alpha}(\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta;\ j=\overline{1,3};$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),kj}_{\upsilon,\alpha;i2}(t,r)=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma_1^2)t}Z^{(\mu),k}_{\upsilon,\alpha;i2}(\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta;$$

$$i,k=1,2;\quad j=\overline{1,3}.$$

Зауважимо, що при $\delta^k_{ij}=0$ та $\gamma^k_{ij}=0$ маємо розв'язок параболічної задачі в припущенні, що межа області D_2^+ жорстка по відношенню до відбиття хвиль.

Інтегральне зображення (60) аналітичного розв'язку параболічної задачі (54)—(54) носить алгоритмічний характер, що дозволяє успішно його застосовувати як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.

Формули (60) поліпараметричні. Вибором параметрів α^m_{jk}, β^m_{jk}, δ^m_{jk}, γ^m_{jk} можна безпосередньо виділити із загальних структур будь-який практично важливий випадок (в рамках даної моделі).

Задача динаміки. Побудувати обмежений в області D_2^+ розв'язок гіперболічної системи

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}+\gamma_1^2u_1-a_1^2\frac{\partial^2u_1}{\partial r^2}=f_1(t,r),\ r\in(0,R_1)\,,\\ \frac{\partial^2u_2}{\partial t^2}+\gamma_2^2u_2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}[u_2]=f_2(t,r),\ r\in(R_1,R_2)\,,\\ \frac{\partial^2u_3}{\partial t^2}+\gamma_3^2u_3-a_3^2B_{\upsilon,\alpha}[u_3]=f_3(t,r),\ r\in(R_2,\infty)\end{gathered}\tag{61}$$

з нульовими початковими умовами, крайовими умовами

$$\begin{gathered}\left[\left(\alpha^0_{11}+\delta^0_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta^0_{11}+\gamma^0_{11}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_1\big|_{r=0}=g_0(t),\\ \lim_{r\to\infty}\left[r^\gamma u_3(t,r)\right]=0\end{gathered}\tag{62}$$

та умовами спряження

$$\left\{\left[\left(\alpha_{j1}^k+\delta_{j1}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k+\gamma_{j1}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_k(t,r)-\right.$$

$$\left.-\left[\left(\alpha_{j2}^k+\delta_{j2}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k+\gamma_{j2}^k\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_{k+1}(t,r)\right\}\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk}(t); \quad (63)$$

$$j,k=1,2.$$

Розв'язання. Запишемо систему (61) й початкові умови в матричній формі:

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_1^2-a_1^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)u_1\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_2^2-a_2^2\Lambda_{(\mu)}\right)u_2\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\gamma_3^2-a_3^2B_{\upsilon,\alpha}\right)u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t,r)\\ f_2(t,r)\\ f_3(t,r)\end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\Bigg|_{t=0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Застосуємо до задачі (64) за правилом множення матриць операторну матрицю-рядок (56). Внаслідок основної тотожності (51) в припущенні, що $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}=\gamma_1^2>0$, маємо задачу Коші:

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+\left(\beta^2+\gamma_1^2\right)\right]\tilde{u}(t,\beta)=\tilde{f}(t,\beta)+a_1^2\sigma_1\left(-\tilde{\alpha}_{11}^0\right)^{-1}V_{\upsilon,\alpha;1}^{(\mu)}(0,\beta)g_0(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\upsilon,\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{2k}(t)-Z_{\upsilon,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta)\omega_{1k}(t)\right]\equiv F(t,\beta), \quad (65)$$

$$\tilde{u}(t,\beta)\big|_{t=0}=0,\quad \frac{d\tilde{u}}{dt}\Big|_{t=0}=0. \quad (66)$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком задачі Коші (65), (66) є функція

$$\tilde{u}(t,\beta)=\int_0^t\frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,(t-\tau)}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}F(\tau,\beta)d\tau. \quad (67)$$

Визначимо головні розв'язки гіперболічної задачі (61)—(63):

1) породжені неоднорідністю системи (61) функції впливу

$$H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;jk}(t,r,\rho)=$$

$$=\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;k}(\rho,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta;$$

$$j,k=\overline{1,3};$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=0$ функції Гріна

$$W^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(t,r)=$$

$$=\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)a_1^2\sigma_1\left(-\tilde{\alpha}^0_{11}\right)^{-1}V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;1}(0,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta;$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R^{(\mu),kj}_{\upsilon,\alpha;i2}(t,r)=$$

$$d_k\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}\,t}{\sqrt{\beta^2+\gamma_1^2}}Z^{(\mu),k}_{\upsilon,\alpha;i2}(\beta)V^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(r,\beta)\Omega^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha}(\beta)d\beta,$$

$$i,k=1,2;\ j=\overline{1,3}.$$

Застосувавши до матриці-елемента $\left[\tilde{u}(t,\beta)\right]$, де функція $\tilde{u}(t,\beta)$ визначена формулою (67), за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (59), після низки елементарних перетворень отримуємо єдиний розв'язок даної гіперболічної задачі:

$$\begin{aligned}u_j(t,r)=&\int\limits_0^t\int\limits_0^{R_1}H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j1}(t-\tau,r,\rho)f_1(\tau,\rho)\sigma_1 d\rho d\tau+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j2}(t-\tau,r,\rho)f_2(\tau,\rho)\sigma_2 sh\rho d\rho d\tau+\\&+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{\infty}H^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j3}(t-\tau,r,\rho)f_3(\tau,\rho)\sigma_3\rho^{2\alpha+1}d\rho d\tau+\\&+\sum_{k=1}^2 d_k\left[\int\limits_0^t R^{(\mu),kj}_{\upsilon,\alpha;12}(t-\tau,r)\omega_{2k}(\tau)d\tau-\int\limits_0^t R^{(\mu),kj}_{\upsilon,\alpha;22}(t-\tau,r)\omega_{1k}(\tau)d\tau\right]+\\&+\int\limits_0^t W^{(\mu)}_{\upsilon,\alpha;j}(t-\tau,r)g_0(\tau)d\tau,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}\tag{68}$$

Зауваження, зроблені стосовно параболічної задачі, повторюються. Неважко змінити головні розв'язки якщо $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}=$ $=\gamma_2^2>0$ або $\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}=\gamma_3^2>0$.

Висновок. Дослідження, наведені в роботі, поповнюють список наявних ГІП й можуть бути використані для розв'язання досить широкого класу крайових задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93—106.
2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз,1959. — 468 с.
5. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 248 с.
6. Ленюк М.П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83. 3).
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
9. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
10. Ленюк М. П. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2010. — Том VII. — 424 с.
11. Ленюк М. П. Гібридне інтегральне перетворення типу Ейлера — (Фур'є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2009. — 76 с.

The method of delta-like sequences (Cauchy kernel) introduces hybrid integral transformation of Legendre — Bessel — Fourier series in polar axis with two point of interface with the assumption that the spectral parameter is involved in conjugation.

Key words: *hybrid differential operators, hybrid integral transform kernel Cauchy function of, spectral function, spectral density, the main identity.*

Отримано 21.09.10