УДК 517.518.

С. О. Кирилов, канд. фіз.-мат. наук
Одеський національний морський університет, м. Одеса

ПРО ОСТАТОЧНІСТЬ ДЕЯКИХ ОЦІНОК ЩОДО ЗБІЖНОСТІ ОРТОГОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Одержано дві теореми щодо остаточності деяких коефіцієнтних оцінок для рядів за загальними ортонормованими системами.

Ключові слова: *ортогональна система, коефіцієнти Фур'є, простір Лоренца.*

Поняття S_p-системи було введено С. Б. Стєчкіним і виникло як узагальнення того факту, що аналогічними властивостями володіють лакунарні підсистеми тригонометричної системи функцій. Саме С. Б. Стєчкіним були одержані необхідні і достатні коефіцієнтні умови для збіжності майже всюди рядів за такими системами. Подальшому розвитку цих результатів присвячені роботи [1; 2]. Поняття $S(p, \Lambda)$-систем виникло як природне узагальнення поняття S_p-системи. У роботі [3] наведені коефіцієнтні умови, які зумовлюють збіжність майже всюди рядів за $S(p, \Lambda)$-системами, проте питання про остаточність цього результату залишилось відкритим. Перший параграф статті містить теорему, яка розв'язує питання про остаточність зазначених коефіцієнтних умов.

Перші оцінки норм функцій, які є сумою деякого ряду за загальними ортонормованими системами були одержані Пелі. Пізніше такі оцінки в різних функціональних просторах і для різних ортогональних систем досліджували різні автори, наприклад, див. [4—7]. Так оцінку норм функцій через їх коефіцієнти Фур'є, у випадку ортонормованої системи, норми якої у просторах Лебега не є обмеженими у сукупності було одержано у роботі [8], проте питання про остаточність такої оцінки не досліджувалось. У другому параграфі статті доведено теорему, що, в деякому сенсі, свідчить про остаточність такої оцінки.

Перейдемо до викладення основних результатів статті.

1. Остаточність коефіцієнтних оцінок для $S(p, \Lambda)$-систем

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — неспадаюча послідовність додатних чисел.

Означення. Послідовність Λ називається опуклою догори , якщо при всіх n=1,2,...

$$\Delta^2 \lambda_n = \lambda_{n+2} - 2\lambda_{n+1} + \lambda_n \le 0 .$$

Остання нерівність означає, що ламана з вершинами в точках (k, λ_k), k = 1, 2, ... являє собою графік опуклої догори функції.

Легко бачити, що в цьому випадку при всіх k = 1, 2, ...

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \le \lambda_2 - \lambda_1 \equiv C,$$

а значить,

$$\lambda_k = O(k). \tag{1}$$

Головним результатом параграфу є така теорема.

Теорема 1. Нехай $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — неспадаюча, опукла догори послідовність додатних чисел. Існує така ортонормована система на відрізку [0,1] $\{\psi_n(x)\}$, яка є $S(p, \Lambda)$-системою ($2 < p < \infty$), і при будь-якій послідовності $\{\omega_n\}$ з

$$\omega_n = \overline{\overline{o}}\left(\log^2\left(e + \lambda_n\right)\right), \tag{2}$$

знайдеться така послідовність $\{a_n\}$, що $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty$, але ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ є розбіжним на множині додатної міри.

Доведення. Визначимо послідовність $\{\nu_k\}$ так. Нехай $\nu_k = \min\left\{n \in \mathrm{N} : \lambda_n^2 \ge k\right\}$. При цьому

$$\lambda_{\nu_k}^2 = \lambda_{\nu_k - 1}^2 + \left(\lambda_{\nu_k}^2 - \lambda_{\nu_k - 1}^2\right) \le k + C.$$

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $\nu_1 = 1$ і при всіх k: $\lambda_{\nu_k}^2 \le k + 1$.

Визначимо тепер нашу систему $\{\psi_n(x)\}$ так. Покладемо

$$\psi_{\nu_k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\varphi_k(2x), x \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right), \\ 0, x \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \end{cases},$$

та якщо $n \ne \nu_k$ при всіх k=1,2,... ,то

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0, x \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right), \\ \sqrt{2} r_n(2x-1), x \in \left(\tfrac{1}{2}, 1\right), \end{cases}$$

де $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x$ — функції Радемахера, а послідовність $\{\varphi_n(x)\}$ побудована в [9, с. 299].

Очевидно, що $\{\psi_n(x)\}$ є ортогональною системою. Але, крім цього,

$$\int_0^1 \left|\psi_{\nu_k}(x)\right|^2 dx = \int_0^{1/2} 2\left|\varphi_k(2x)\right|^2 dx = \int_0^1 \left|\varphi_k(x)\right|^2 dx = 1 \ ,$$

і при $n \neq \nu_k$, при всіх $k = 1, 2, \dots$.

$$\int_0^1 \left|\psi_n(x)\right|^2 dx = \int_{1/2}^1 2\left|r_n(2x-1)\right|^2 dx = \int_0^1 \left|r_n(x)\right|^2 = 1,$$

тобто система $\{\psi_n(x)\}$ ортонормована на [0, 1].

Покажемо тепер, що $\{\psi_n(x)\}$ — $S(p, \Lambda)$-система. Для цього розглянемо поліном за цією системою $P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \psi_n(x)$.

Маємо:

$$P_N(x) = \sum_{k:\nu_k \le N} a_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x) + \sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \le N}} a_n \psi_n(x) \equiv P_N^{(1)}(x) + P_N^{(2)}(x) \ .$$

Далі,

$$\left\|P_N^{(2)}\right\|_p = \left\|\sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \le N}} a_n \psi_n(x)\right\|_p = \left(\int_0^1 \left|\sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \le N}} a_n \psi_n(x)\right|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_{1/2}^1 \left|\sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \le N}} a_n r_n(2x-1)\right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le c_p \left(\int_0^1 \left|\sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \le N}} a_n r_n(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \le c_p \left(\sum_{\substack{n \neq \nu_k \\ n \le N}} a_n^2\right)^{1/2},$$

тому, що система Радемахера є S_p-системою [10, с. 153].

Далі,

$$\left\|P_N^{(1)}\right\|_p = \left(\int_0^1 \left|\sum_{k:\nu_k \le N} a_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x)\right|^p dx\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_0^{1/2} \left| \sum_{k:\nu_k \le N} a_{\nu_k} \varphi_k(2x) \right|^p dx \right)^{1/p} \le c_p \left(\int_0^1 \left| \sum_{k:\nu_k \le N} a_{\nu_k} \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \le \quad (3)$$

$$\le c_p \left(\int_0^1 \left(\sum_{k:\nu_k \le N} a_{\nu_k}^2 \right)^{p/2} \left(\sum_{k:\nu_k \le N} \left|\varphi_k(x)\right|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} = c_p \left(\sum_{k:\nu_k \le N} 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{k:\nu_k \le N} a_{\nu_k}^2 \right)^{1/2}.$$

Із означення $\{\nu_k\}$ легко зрозуміти , що $\sum\limits_{k:\nu_k \le N} 1 \le \lambda_N^2$, значить

$$\left\|P_N^{(1)}\right\|_p \le c_p \lambda_N \left(\sum_{k:\nu_k \le N} a_{\nu_k}^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Об'єднуючи оцінки (3) і (4), одержуємо

$$\left\|P_N\right\|_p \le \left\|P_N^{(1)}\right\|_p + \left\|P_N^{(2)}\right\|_p \le c_p \lambda_N \left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2 \right).$$

Отже, показано, що $\{\psi_n(x)\}$ — $S(p, \Lambda)$-система.

Нехай тепер $\{\omega_n\}$ задовольняє умову (2). Покладемо:

$$\overline{\omega}_n = \omega_{\nu_n} = \overline{\overline{o}}\left(\log^2(e + \lambda_{\nu_n}^2)\right) = \overline{\overline{o}}(\log^2 n).$$

Тоді, спираючись на теорему Б. С. Кашина [9, с. 299], можна стверджувати, що знайдеться послідовність $\{\overline{a}_n\}$ така, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n^2 \overline{\omega}_n < \infty, \quad (5)$$

але ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{a}_n \varphi_n(x) \quad (6)$$

розбігається на множині додатної міри. Нарешті, нехай

$a_{\nu_k} = \overline{a}_k$ і $a_n=0$ при $n \ne \nu_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тоді ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$ розбігається на множині додатної міри внаслідок розбіжності ряду (6) , хоча і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty$ згідно з (5).

2. Оцінка норми функцій у просторі Лоренца

У цьому параграфі ми покажемо, що оцінка норми функцій у просторі Лоренца, що міститься у роботі [8, с. 193] точна у загальному випадку (для систем із L_∞ не обмежених в сукупності) в тому розумінні, що степінь величини B_n, яка міститься в оцінці, не можна замінити ніяким меншим степенем. А саме, справедлива така теорема.

Теорема 2. Нехай $\{M_n\}$ — деяка послідовність дійсних чисел, $M_n \geq 1$, $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k^2$ $(n = 1, 2, ...)$, $q > 2$, $r \geq 2$ і

$$M_{n+1}^2 \leq cB_n. \tag{7}$$

Знайдеться ортонормована на [0,1] система $\{\varphi_n(x)\}$ і послідовність $\{c_n\} \in l_2$, такі, що $\|\varphi_n\|_\infty \leq M_n$ і при будь-якому $\xi < r - r/q - 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n\|^r B_n^\xi \Big/ M_n^{r-2} < \infty,$$

але ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ збігається майже всюди до функції f_0 і $f_0 \notin L_{q,r}$.

Доведення. Ми будемо використовувати конструкцію, аналогічну застосованої Масловим в [11]. Вважаємо, що $M_1 = 1$ і M_n^2 — цілі числа при всіх $n \in N$. Покладемо $l_1 = h_0 = m_0 = \eta_0 = 0$, $h_1 = m_1 = \eta_1 = \alpha_1 = 1$ і далі, якщо $l_{j\text{-}1}$, $h_{j\text{-}1}$, $m_{j\text{-}1}$, $\eta_{j\text{-}1}$, $\alpha_{j\text{-}1}$ визначені, то покладемо

$$h_j = \min\left\{h : m_{j-1} + \sum_{k=h_{j-1}+1}^{h} M_k^2 \geq 2^{l_{j-1}+1}\right\},$$

$$l_j = \max\left\{l : m_{j-1} + \sum_{k=h_{j-1}+1}^{h_j} M_k^2 \geq 2^{l}\right\}; m_j = 2^{l_j};$$

$$\alpha_j = \left(m_j - m_{j-1}\right)\left(\sum_{k=h_{j-1}+1}^{h_j} M_k^2\right)^{-1},$$ та $\bar{M}_k = M_k$ при $k = h_{j\text{-}1}, ..., h_j\text{-}1$ і

$$\bar{M}_{h_j} = \left\{m_j - m_{j-1} - \sum_{k=h_{j-1}}^{h_j-1} M_k^2\right\}^{1/2}.$$

Тоді

$$\alpha_j = \left(m_j - m_{j-1}\right)\left(\sum_{k=h_{j-1}+1}^{h_j} M_k^2\right)^{-1} \geq m_j\left(1-\tfrac{1}{2}\right)\left(2m_j^{-1}\right) = \tfrac{1}{4} \qquad (8)$$

і

$$2m_j \leq m_{j+1} \leq cm_j. \qquad (9)$$

Ліва нерівність в (9) очевидна і , використовуючи (7) , маємо

$$m_{j+1} \leq m_j + \sum_{k=h_j+1}^{h_{j+1}-1} M_k^2 + \bar{M}_{h_{j+1}}^2 \leq 2m_j + cB_{h_{j+1}-1} = 2m_j + c\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{k=h_i}^{h_{i+1}} M_k^2 +$$

$$+\sum_{k=h_j+1}^{h_{j+1}-1} M_k^2 \leq 2m_j + c\sum_{i=0}^{j-1}\left(m_{i+1}-m_i\right)\alpha_{i+1}^{-1} + m_j \leq$$

$$\leq 2m_j + c\sum_{i=0}^{j-1}4\left(m_{i+1}-m_i\right) + m_j \leq (3+4c)m_j.$$

Тепер покладемо $s_{n-1}=m_n$, $\bar{B}_n = \sum_{k=1}^{n}\bar{M}_k^2$ і

$$\varphi_n(x) = \bar{M}_n^{-1}\sum_{i=\bar{B}_{n-1}}^{\bar{B}_n}\omega_i(x),$$

де $\omega_i(x)$ — відома система Уолша.

При $h_n < k \leq h_{n+1}$ покладемо $c_k = p_n, p_n = s_n^{1/q-1}$ і нехай

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{n} s_k \Delta p_k, \Delta p_k = p_k - p_{k+1}, n = 1,2,\ldots\ .$$

Використовуючи властивості функцій Уолша, одержимо, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \sum_{k=h_n+1}^{h_{n+1}} \varphi_k(x)$$

збігається майже всюди до деякої функції f_0 ,такої, що

$$f_0(x) = \begin{cases} \delta_n, x \in \left(s_{n+1}^{-1}, s_n^{-1}\right), n = 1,2,\ldots; \\ 1, x = 0,1,\tfrac{1}{2}; \\ 0, \text{при інших } x. \end{cases}$$

Ясно, що $f_0 \notin L_{q,r}$. Дійсно, на підставі (9)

$$\|f_0\|_{q,p}^q \approx \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} s_k \Delta p_k\right)^p s_n^{-p/q} \approx \sum_{n=1}^{\infty} p_n{}^p s_n^{p-p/q} = \infty.$$

Але в той же час, використовуючи (8) і (9)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^r B_k^{\xi} \Big/ M_k^{r-2} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^r \sum_{k=h_n+1}^{h_{n+1}} \bar{M}_k^r B_k^{\xi} \Big/ M_k^{r-2} \le \sum_{n=1}^{\infty} p_n^r B_{h_{n+1}}^{\xi+1} \le$$

$$\le c\sum_{n=1}^{\infty} p_n^r \left(B_{h_{n+1}} - B_{h_n}\right)^{\xi+1} \le c\sum_{n=1}^{\infty} p_n^r \left\{\alpha_n^{-1}\left(s_{n+1}-s_n\right)\right\}^{\xi+1} \le$$

$$\le 4^{\xi+1} c\sum_{n=1}^{\infty} p_n^r s_{n+1}^{\xi+1} \le c\sum_{n=1}^{\infty} p_n^r s_n^{\xi+1} \le \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{r/q - r + \xi + 1} < \infty,$$

що і треба було довести.

Список використаних джерел:

1. Гапошкин В. Ф. Лакунарные ряды и независимые функции / В. Ф. Гапошкин // Усп. мат. наук. — 1966. — Т. 21, № 6. — С. 3—82.
2. Балыкбаев Т. О. Об одном классе систем сходимости / Т. О. Балыкбаев // Изв. АН КазССР. Сер.: Физ.-мат. — 1986. — № 3. — С.6—9.
3. Кириллов С. А. О множителях Вейля для некоторых классов ортонормированных систем / С. А. Кириллов // Изв. вузов. матем. — 1994. — № 7. — С. 29—36.
4. Stein E. M. Interpolation of operators with change of measures / E. M. Stein, G. Weiss // Trans. Amer. Math. Soc. — 1958. — Vol. 87. — P. 159—172.
5. Bullen P. S. Some extensions of the Hausdorff-Young and Paley theorems / P. S. Bullen // Canad. Math. Bull. — 1961. — Vol. 4, № 2. — P. 123—138.
6. Montgomery H. L. A note on rearrangement of Fourier coefficients / H. L. Montgomery // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1976. — Vol. 26. — P. 29—34.
7. Коляда В. И. О некоторых обобщениях теоремы Харди-Литтлвуда-Пэли / В. И. Коляда // Матем. заметки. — 1992. — Т. 51. — Вып. 3. — С. 24—34.
8. Kirillov S. A. Norm estimates of functions in Lorentz spaces / S. A. Kirillov // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1999. — Vol. 65. — P. 189—201.
9. Кашин Б. С. Ортогональные ряды / Б. С. Кашин, А. А. Саакян. — М. : Наука, 1984. — 495 с.
10. Качмаж С. Теория ортогональных рядов / С. Качмаж, Г. Штейнгауз. — М. : Физматгиз, 1958. — 507 с.
11. Маслов А. В. К вопросу об окончательности оценок для коэффициентов Фурье по общим ортонормированным системам / А. В. Маслов // Изв. вузов. матем. — 1985. — № 8. — С. 23—34.

Two teorems are obtained about conclusiveness of some coefficient estimates for series by general orthonormal systems.

Key words: *orthogonal system, Fourier coefficients, Lorentz space.*

Отримано 08.10.2010