УДК 519.6

М. Я. Бартіш, д-р фіз.-мат. наук,
О. В. Ковальчук, асистент,
Н. М. Коркуна, асистент
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ЛІНІЙНОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Досліджується новий підхід до побудови методів розв'язування нелінійних систем. Даний метод базується на методах спуску та лінійної інтерполяції. Досліджено швидкість збіжності. Проведено чисельні експерименти на тестових задачах, та порівняно з базовими методами.

Ключові слова: *задача про найменші квадрати, метод лінійної інтерполяції, метод спуску, система нелінійних рівнянь.*

1. Вступ

Математичне моделювання складних фізичних процесів дуже часто потребує розв'язування систем нелінійних рівнянь. Універсальних методів для успішного розв'язування широкого класу подібних задач нема, тому актуальною є проблема побудови нових ефективних алгоритмів. Пропонується ітераційний метод для розв'язування систем нелінійних рівнянь, який не потребує аналітичного задання матриці Якобі і більш повно на кожному кроці використовується обчислена інформація про функцію. Проведено теоретичні та практичні дослідження даного методу.

2. Постановка задачі

Розглянемо задачу розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$P(x) = 0,\ P : R^n \to R^n \ . \qquad (1)$$

Курчатовим [3] запропоновано метод лінійної інтерполяції чисельного розв'язування нелінійних функціональних рівнянь, який володіє квадратичною швидкістю збіжності, та не містить оператора $P^{'}(x)$. Його зручно використовувати в тих випадках, коли обчислення похідної є ускладненим.

Алгоритм методу лінійної інтерполяції:

$$x_{k+1} = x_k - P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})^{-1} P(x_k)\ , \qquad (2)$$

де лінійний оператор $H_k = P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})$ залежить тільки від елементів x_{k-1}, x_k, причому виконується умова [3]:

$$\left\| P^{'}(x_k) - P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1}) \right\| \le {}^{1}\!/_{6} \left\| x_k - x_{k-1} \right\|^2 \left\| P^{'''}(x) \right\|.$$

Поділена різниця [4] $P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})$ визначається такою матрицею:

$$H_k = \left\{ h_{ij}^{(k)} \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{P_i\left(x_1^{(k)}, \ldots, 2x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) - P_i\left(x_1^{(k)}, \ldots, x_i^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k)}\right)}{2(x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})} \right\},$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Поряд із задачею (1) можна розглядати задачу про найменші квадрати

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(P(x), P(x)\right) \to \min_{R^n}. \tag{3}$$

Застосовуючи метод спуску отримаємо алгоритм

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})^T P(x_k), \tag{4}$$

де $\beta_k > 0$ визначається за одним із відомих алгоритмів і забезпечує монотонне спадання функції. Наприклад,

$$f(x_k - \beta_k h(x_k)) - f(x_k) \le -\varepsilon \beta_k (f^{'}(x_k), h(x_k)), \quad 0 < \varepsilon < 1; \tag{5}$$

або

$$\beta_k = \arg\min_{\beta > 0} f(x_k - \beta h_k). \tag{6}$$

де $h_k = P^T(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1}) P(x_k)$.

Нами в статті пропонується новий алгоритм розв'язання задачі (1). Маючи наближення x_k, виконуємо один крок за методом (2)

$$u_k = x_k - \left[P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})\right]^{-1} P(x_k), \tag{7}$$

і один крок за методом (4)

$$v_k = x_k - \beta_k P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})^T P(x_k). \tag{8}$$

Маючи значення u_k і v_k, визначаємо наступне наближення x_{k+1} за формулою

$$x_{k+1} = u_k + \lambda_k (v_k - u_k), \tag{9}$$

де $\lambda_k = \arg\min_{\lambda} f(u_k + \lambda(v_k - u_k))$.

Виконання одного кроку за (8) та (9) не вимагає суттєвих додаткових обчислень, оскільки $P(x_k)$ і $P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})$ визначені при обчисленні u_k.

3. Обґрунтування збіжності

Лема. Нехай $P: R^n \to R^n$, $P \in C^1(R^n)$. Якщо T_k — матриця розмірності $n \times n$, така що

$$\left\| I - T_k^T \left(P'^T(x_k) \right)^{-1} \right\| \le \alpha < 1,$$

тоді напрямок $h_k = -T_k^T P(x_k)$ є напрямком спадання функції f в точці x_k.

Доведення аналогічно [1].

Теорема. Нехай

1) для $x, y \in D$, $D = \left\{ x : \|P(x)\| \le \|P(x_0)\| + M\sqrt{CB\|P(x_0)\|} \right\}$

$$\|P(x,y)\| \le M, \quad M < \infty,$$

$$\left\|P(x,y)^{-1}\right\| \le B \text{, де } B < \infty; \tag{10}$$

2) для $x, y, z, \tau \in D$

$$\|P(x,y,z)\| \le M_2 \text{, де } M_2 < \infty;$$

$$\|P(x,y,z) - P(x,y,\tau)\| < M_3\|z - \tau\|,\ M_3 < \infty, M_3 \ne 0;$$

3) Початкові наближення x_{-1} та x_0 вибирають такими, щоб виконувалися умови:

$$\|x_0 - x_{-1}\|^2 \le \frac{CB}{M_3}\|P(x_0)\|, \tag{11}$$

$$4M_3 B\|P(x_0)\| \le C\mu, \tag{12}$$

де

$$\mu = (M_2 + C)B^2\|P(x_0)\| < 1,\ C < \infty.$$

Тоді послідовність $\{x_k\}$ породжена (7)—(9) збігається до розв'язку x^* задачі (1) і має місце оцінка

$$\|P(x_{k+1})\| \le \mu^{2^{k+1}-1}\|P(x_0)\|. \tag{13}$$

Доведення.

Доведення проведемо методом математичної індукції.

$$\|P(u_0)\| = \|P(u_0) - P(x_0) - P(x_{-1}, 2x_0 - x_{-1})(u_0 - x_0)\| =$$

$$= \|(P(u_0, x_0) - P(x_{-1}, 2x_0 - x_{-1}))(u_0 - x_0)\| =$$

$$= \|(P(u_0, x_0) \pm P(u_0, x_{-1}) - P(x_{-1}, 2x_0 - x_{-1}))(u_0 - x_0)\| =$$

$$= \Big\|\Big(P(u_0, x_0, x_{-1})(x_0 - x_{-1}) + P(u_0, x_{-1}, 2x_0 - x_{-1}) \times$$

$$\times(u_0 - 2x_0 + x_{-1}))(u_0 - x_0)\| = \|\left[P(u_0, x_0, x_{-1}) -\right.$$

$$\left.- P(u_0, x_{-1}, 2x_0 - x_{-1}))(x_0 - x_{-1}) + P(u_0, x_{-1}, 2x_0 - x_{-1})(u_0 - x_0)\right] \times$$

$$\times(u_0 - x_0)\| \le M_2 \|u_0 - x_0\|^2 + M_3 \|x_0 - x_{-1}\|^2 \|u_0 - x_0\|.$$

Використавши (7) та (10) отримаємо

$$\|u_0 - x_0\| \le B\|P(x_0)\|.$$

Отже, враховуючи умову (11)

$$\|P(u_0)\| \le M_2 B^2 \|P(x_0)\|^2 + B^2 C\|P(x_0)\|^2 = \mu\|P(x_0)\|$$

Враховуючи побудову методу ми маємо

$$\|P(x_1)\| \le \|P(u_0)\| \le \mu\|P(x_0)\|.$$

Нехай (13) виконується для $x_2, ..., x_k$

$$\|P(x_k)\| \le \mu^{2^k - 1} \|P(x_0)\|.$$

Покажемо, що (13) також виконується для x_{k+1}. Із умови

$$P(x_k, x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = P(x_k) - P(x_{k-1})$$

отримаємо

$$\|x_k - x_{k-1}\| \le 2B\|P(x_{k-1})\|.$$

Тоді

$$\|P(u_k)\| \le M_2 \|u_k - x_k\|^2 + M_3 \|x_k - x_{k-1}\|^2 \|u_k - x_k\| \le$$

$$\le M_2 B^2 \|P(x_k)\|^2 + 4M_3 B^3 \|P(x_{k-1})\|^2 \|P(x_k)\| \le$$

$$\le M_2 B^2 \mu^{2^{k+1} - 2} \|P(x_0)\|^2 + 4M_3 B^3 \mu^{2^{k+1} - 3} \|P(x_0)\|^3 \le$$

$$\le M_2 B^2 \mu^{2^{k+1} - 2} \|P(x_0)\|^2 + CB^2 \mu^{2^{k+1} - 2} \|P(x_0)\|^2 \le \mu^{2^{k+1} - 1} \|P(x_0)\|$$

Враховуючи побудову методу ми маємо

$$\|P(x_{k+1})\| \le \|P(u_k)\| \le \mu^{2^{k+1} - 1} \|P(x_0)\|.$$

Теорему доведено.

У більшості випадків досить важко підібрати «гарне» початкове наближення, тому використовують демпфований [2, с. 269] множник. Отже, остаточно метод набуде такого вигляду:

$$u_k = x_k - \alpha_k \left[P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})\right]^{-1} P(x_k), \qquad (14)$$

$$v_k = x_k - \beta_k P(x_{k-1}, 2x_k - x_{k-1})^T P(x_k), \qquad (15)$$

$$x_{k+1} = u_k + \lambda_k (v_k - u_k), \qquad (16)$$

де $\lambda_k = \arg\min_{\lambda} f(u_k + \lambda(v_k - u_k))$

4. Апробація

Роботу даного алгоритму досліджено на тестових прикладах. Обчислення проводилися до виконання умови $\left\|x_{k+1}-x_k\right\| \le \varepsilon$. У таблицях наведено кількість ітерацій (i), та кількість обчислень веторфункції (K) затрачених для отримання наближеного розв'язку задач. Розглянуто такі тестові функції:

Приклад 1 Розширена сингулярна система Пауелла [5, с. 26].

$$P_{4k-3}\left(x\right)=x_{4k-3}+10x_{4k-2};\ \ P_{4k-2}\left(x\right)=\sqrt{5}\left(x_{4k-1}-x_{4k}\right);$$

$$P_{4k-1}\left(x\right)=\left(x_{4k-2}-2x_{4k-1}\right)^2;\ \ P_{4k}\left(x\right)=\sqrt{10}\left(x_{4k-3}-x_{4k}\right)^2;$$

$$x_0^1=\left(3;-1;0;1;...,3;-1;0;1\right);\ \ 1\le k\le\frac{n}{4}.$$

Розв'язок $x^*=\left(0;...;0\right);\ \ P\left(x^*\right)=0.$

Приклад 2 Розширена система Грага і Леві [6, с. 16].

$$P_{4k-3}(x)=\left(e^{x_{4k-3}}-x_{4k-2}\right)^2;\ \ P_{4k-2}(x)=10\left(x_{4k-2}-x_{4k-1}\right)^3;$$

$$P_{4k-1}(x)=tg^2\left(x_{4k-1}-x_{4k}\right);\ P_{4k}(x)=x_{4k}-1,$$

$$x_0^1=\left(1;2;...;1;2\right);\ \ x_0^2=\left(-1;-2;...;-1;-2\right);\ \ 1\le k\le\frac{n}{4}.$$

Розв'язок $x^*=(0;1;1;1;...;0;1;1;1)\ \ P\left(x^*\right)=0$.

Приклад 3 Система Розенброка [5, с. 26].

$$P_{2k-1}(x)=10(x_{2k}-x_{2k-1}^2);\ P_{2k}(x)=1-x_{2k-1};$$

$$x_0^1=(-1.2;1;...;-1.2;1);\ 1\le k\le\frac{n}{2}.$$

Розв'язок. $x^*=(1,...,1);\ \ P\left(x^*\right)=0$.

Таблиця 1

№	n	$\varepsilon=10^{-5}$				$\varepsilon=10^{-8}$			
		(2)		(14)—(16)		(2)		(14)—(16)	
		i	K	i	K	i	K	i	K
1	16	19	646	11	451	29	986	19	777
	32	20	1320	12	879	30	1980	19	1385
	52	20	2120	12	1359	30	3180	19	2145
	100	21	4242	13	2717	31	6263	19	3969
2	16	33	1122	13	581	51	1734	23	1085
	32	33	2178	13	997	52	3532	23	1821
	52	34	3602	13	1517	53	5639	23	2741
	100	35	7072	15	3201	53	10707	23	4949
3	16	13	502	8	380	13	502	10	466
	32	13	918	8	636	13	918	10	786
	52	13	1438	8	956	13	1438	10	1186
	100	13	2686	8	1724	13	2686	10	2146

5. Висновок

Зроблено теоретичні та числові дослідження алгоритму (14)—(16). Доведена квадратична збіжність.

На підставі числових розрахунків та порівняння отриманих результатів, показано, що запропонований метод дозволяє зменшити обчислювальні затрати функції для отримання розв'язку. Особливо цей ефект відчутний у випадку, коли якобіан системи в точці розв'язку вироджений (приклад 1, 2). Додаткові обчислення трикрокового методу компенсуються за рахунок зменшення кількості ітерацій потрібних на відшукання розв'язку.

Список використаних джерел:

1. Бартіш М. Я. Трикроковий ітераційний метод розв'язування систем нелінійних рівнянь / М. Я. Бартіш, О. В. Ковальчук, Л. В. Николайчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-мат. науки. : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, 2008. — Вип.1. — С. 9—18.
2. Дэннис Дж. мл. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений / Дж. Дэннис мл., Р. М. Шнабель. — М. : Мир, 1988.
3. Курчатов В. А. Об одном методе линейной интеполяции решения функцыональных уравнений / В. А. Курчатов // ДАН СССР. — 1971. — Том 198. — № 3. — С. 524—526.
4. Ульм С.Ю. Об обобщенных разделенных разностях/ С. Ю. Ульм // Известия АН ЭССР. — 1967. — Том XVI. — №1. — С. 13—26.
5. More J. J. Testing unconstrained optimization software. ACM Transactions on mathematical Software / J. J. More, B. S. Garbow, K. E. Hillstrom. — 1981. — Vol 7. — No. 1. — P 17—41.
6. Luksan L. Test problems for unconstrained optimization / L. Luksan // Institute of computer science, Academy of sciences of the Czech Republic, — 2003.

In this paper a new way to the creation of the method for solving system of nonlinear equations is being researched, which is based on steepest descent and the linear interpolation methods. We have proved theorem where the convergence of the proposed method is justified and the rate of convergence is established. Numeral experiments have been conducted on the test problems and they have been compared of the basic method. The conclusions on the possibilities application of method have been made.

Key words: *the methods of steepest descent, the linear interpolation method, system of nonlinear equations.*

Отримано 17.09.10