ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2003. Том 5 (77), N 2. C. 20 – 26

УДК 532.542.4

ДО ПИТАННЯ ПРО РЕОЛОГІЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СУСПЕНЗІЙ

С. І. КРІЛЬ

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 04.11.2002

Для реологічного моделювання суспензій використано математичний апарат теорії узагальнених функцій і на цій підставі одержано узагальнену формулу ефективної в'язкості суспензії сферичних твердих частинок у ньютонівській рідині. Показано, що ця формула цілком задовільно узгоджена з експериментальними даними у досить широкому діапазоні зміни об'ємної концентрації суспензії.

Для реологического моделирования суспензий использован математический аппарат теории обобщенных функций и на этом основании получена обобщенная формула эффективной вязкости суспензии сферических твердых частиц в ньютоновской жидкости. Показано, что эта формула вполне удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными в достаточно широком диапазоне изменения объемной концентрации суспензии.

For rheological simulation of slurries the mathemaatical vehicle of the theory of generalized functions utilised. On this basis the generalized formula of effective viscosity of slurries of spheric solid fragments in Newtonian fluid is obtained. Is rotined, that this formula is quite well compounded with experimental data in a wide enough range of variation of a volume concentration of slurry.

ВСТУП

Суспензію, як суміш нестисливої в'язкої рідини і завислих в ній дрібних твердих частинок, розглядають звично як деяке однорідне суцільне середовище, що характеризується певною густиною і ефективною в'язкістю. Його рух описується осередненими рівняннями континуальної механіки, однак для їх використання потрібно визначити ефективну в'язкість, тобто установити залежність її від параметрів рідинної та твердої фаз, що і є основною задачею теоретичної реології суспензій.

Відомі два класичні методи теоретичного визначення ефективної в'язкості суспензії: структурно енергетичний і структурно динамічний. Структурно енергетичний метод уперше був розроблений А.Ейнштейном і в основі його лежить урахування додаткової дисипації кінетичної енергії при наявності завислих твердих частинок у рухомій рідині [1]. Розробка структурно динамічного методу належить Бюргерсу [2] та Л.Ландау [3]. Цей метод дозволяє визначити ефективну в'язкість шляхом обчислення осереднених дотичних напружень у суспензії. Недивлячись на різні підходи до математичного реологічного моделювання суспензій, обидва методи дають один і той самий результат. Зокрема, для розведеної суспензії дрібних сферичних твердих частинок у ньютонівській рідині цими методами отримана класична формула ефективної в'язкості μ:

$$\mu = \mu_f(1 + 2.5\bar{c}), \qquad (1)$$

де μ_f – в'язкість основної однорідної рідини; $\bar{c}$ – об'ємна концентрація твердих частинок.

Формула (1) уперше була одержана А.Ейнштейном на випадок, коли тверді частинки настільки дрібні й безінерційні, що відносні поступальний і обертальний рухи рідини побіля них практично відсутні, а об'ємна концентрація цих частинок досить мала, тож величинами $\bar{c}^2$, $\bar{c}^3$, ... можна нехтувати порівняно з $\bar{c}$. У даному випадку тверді частинки впливають лише на деформівний рух рідини поблизу них, що й враховує формула (1). Слід відмітити також, що ця формула згодом була теоретично підтверджена багатьма дослідниками, проте навіть для малих об'ємних концентрацій вона дає, як відомо, дещо занижені, порівняно з експериментальними даними, значення ефективної в'язкості.

У даній роботі зроблено спробу використати для теоретичного дослідження ефективної в'язкості суспензій математичний апарат теорії узагальнених функцій. Це дало змогу вирішити деякі принципові питання теорії ефективної в'язкості, пов'язані, зокрема, з аналізом та смисловим розумінням осереднених напружень у суспензії. На цій підставі одержана більш загальна формула ефективної в'язкості для суспензії сферичних твердих частинок у ньютонівській рідині. Достовірність її забезпечується цілком задовільним збігом розрахункових значень ефективної в'язкості з експериментальними у досить широкому діапазоні зміни об'ємної концентрації.

Деякі окремі питання, пов'язані з використанням узагальнених функцій для реологічного моделювання суспензій, висвітлені в [4]. Однак, на відміну від [4], у даній роботі основні принципи використання узагальнених функцій в теорії ефективної в'язкості суспензій викладені більш докладно й послідовно.

1. ТЕНЗОР ОСЕРЕДНЕНИХ НАПРУЖЕНЬ В СУСПЕНЗІЇ

Оскільки рідинна і тверда фази, що входять до складу суспензії, різні за своїми фізико-механічними властивостями, слід окремо розглянути внутрішні напруження в кожній з них. Тензори власних напружень У рідинній і твердій фазах позначимо відповідно через $\sigma_{ik,f}$ і $\sigma_{ik,p}$, де індекси i, $k = 1$, 2, 3. Припускається, що тензорні функції $\sigma_{ik,f}$ і $\sigma_{ik,p}$ визначені в області своєї фази, де вони однозначні і неперервні зі своїми частинними похідними за просторовими координатами. Поряд з тензорами власних фазових напружень $\sigma_{ik,f}$ і $\sigma_{ik,p}$ розглянемо тензор напружень σ_{ik} у суспензії. Тензорна функція σ_{ik}, на відміну від $\sigma_{ik,f}$ і $\sigma_{ik,p}$, визначена у всій області, заповненій суспензією. Напишемо тотожньо

$$\sigma_{ik} = (1-c)\sigma_{ik} + c\sigma_{ik}, \qquad (2)$$

де c – розривна функція, яка визначена у всій області суспензії, приймає значення одиниці у точках твердої фази і значення нуля у точках рідинної. Якщо використати позначення

$$\sigma^*_{ik,f} = (1-c)\sigma_{ik}, \qquad (3)$$

$$\sigma^*_{ik,p} = c\sigma_{ik}, \qquad (4)$$

то вираз (2) перепишеться у вигляді

$$\sigma_{ik} = \sigma^*_{ik,f} + \sigma^*_{ik,p}. \qquad (5)$$

З математичної точки зору функції $\sigma^*_{ik,f}$ і $\sigma^*_{ik,p}$ є не що інше, як зріз функції σ_{ik} по областях рідинної і твердої фаз відповідно. Кожна із функцій $\sigma^*_{ik,f}$ і $\sigma^*_{ik,p}$ визначена у всій області суспензії, приймає певні ненульові значення в області своєї фази і дорівнює нулю за її межами. З фізичної точки зору $\sigma^*_{ik,f}$ і $\sigma^*_{ik,p}$ – це тензори узагальнених фазових напружень. Як показано нижче, вони виражаються через відповідні власні фазові напруження $\sigma_{ik,f}$ і $\sigma_{ik,p}$ та через додаткові напруження, пов'язані з гідродинамічною взаємодією рідини і твердих частинок на поверхні розділу фаз S, яка являє собою сукупність поверхонь твердих частинок. І позаяк тензорні функції $\sigma^*_{ik,f}$ і $\sigma^*_{ik,p}$ розривні у точках поверхні S, їхні частинні похідні за просторовими координатами є узагальненими функціями [5]. Тому вирази дивергенцій напружень $\nabla_k\sigma^*_{ik,f}$ і $\nabla_k\sigma^*_{ik,p}$ як узагальнених функцій мають вигляд

$$\nabla_k\sigma^*_{ik,f} = \{\nabla_k\sigma^*_{ik,f}\} + [\sigma^*_{ik,f}]_s n_{k,f}\delta_s, \qquad (6)$$

$$\nabla_k\sigma^*_{ik,p} = \{\nabla_k\sigma^*_{ik,p}\} + [\sigma^*_{ik,p}]_s n_{k,p}\delta_s, \qquad (7)$$

де ∇_k – оператор $\partial/\partial x_k$; фігурною дужкою позначені частинні похідні як звичайні функції, а прямою – стрибок відповідної функції при переході через поверхню розділу фаз іззовні усередину області своєї фази; $n_{k,f}$ і $n_{k,p}$ – проекції зовнішніх відносно рідинної і твердої фаз ортів нормалій до поверхні S на вісь $0x_k$ прямокутної системи координат; δ_s – сингулярний функціонал, зосереджений на поверхні S. У формулах (6) і (7), як і в наступних, по індексу, який двічі повторюється в одночленному виразі, проводиться підсумовування від одиниці до трьох.

На поверхні розділу фаз виконується умова

$$[\sigma^*_{ik,f}]_s n_{k,f} + [\sigma^*_{ik,p}]_s n_{k,p} = 0. \qquad (8)$$

Що стосується виразу дивергенції напружень у суспензії, то на підставі рівності (5) можна написати

$$\nabla_k\sigma_{ik} = \nabla_k\sigma^*_{ik,f} + \nabla_k\sigma^*_{ik,p},$$

або, з урахуванням виразів (6), (7) і граничної умови (8),

$$\nabla_k\sigma_{ik} = \{\nabla_k\sigma^*_{ik,f}\} + \{\nabla_k\sigma^*_{ik,p}\}. \qquad (9)$$

Згідно з виразом (9), дивергенція тензора напружень $\nabla_k\sigma_{ik}$ не є узагальненою функцією, оскільки права частина рівності (9) складається лише із частинних похідних як звичайних функцій.

Осереднимо вирази (5) і (9) по елементарному об'єму V, розміри якого малі порівняно із розмірами області, заповненої суспензією, і досить великі порівняно із розмірами твердих частинок, що входять до складу суспензії. У результаті матимемо, ураховуючи позначення (3) і (4):

$$\bar{\sigma}_{ik} = (1-\bar{c})\langle\sigma_{ik}\rangle_f + \bar{c}\langle\sigma_{ik}\rangle_p, \qquad (10)$$

$$\nabla_k\bar{\sigma}_{ik} = (1-\bar{c})\nabla_k\langle\sigma_{ik}\rangle_f + \bar{c}\nabla_k\langle\sigma_{ik}\rangle_p, \qquad (11)$$

де рискою зверху позначено середнє значення по усьому об'єму V, а кутовими дужками $\langle\rangle_f$ і $\langle\rangle_p$ – середні значення по об'ємах V_f і V_p, заповнених відповідними рідинною і твердою фазами усередині V. Так що

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{V}\int_V \sigma_{ik} dV, \qquad (12)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{V} \int\limits_V c dV = \frac{V_p}{V}, \qquad (13)$$

$$\langle \sigma_{ik} \rangle_f = \frac{\overline{(1-c)\sigma_{ik}}}{1-\bar{c}} = \frac{1}{V_f} \int\limits_{V_f} \sigma_{ik} dV_f, \qquad (14)$$

$$\langle \sigma_{ik} \rangle_p = \frac{\overline{c\sigma_{ik}}}{\bar{c}} = \frac{1}{V_p} \int\limits_{V_p} \sigma_{ik} dV_p, \qquad (15)$$

де $\bar{c}$ – локальна об'ємна концентрація твердих частинок.

Підставивши у ліву частину рівняння (11) замість σ_{ik} його вираз (10), та виконавши деякі елементарні перетворення, одержуємо

$$\langle \sigma_{ik} \rangle_f \nabla_k (1-\bar{c}) + \langle \sigma_{ik} \rangle_p \nabla_k \bar{c} = 0$$

або

$$(\langle \sigma_{ik} \rangle_p - \langle \sigma_{ik} \rangle_f) \nabla_k \bar{c} = 0. \qquad (16)$$

Оскільки у загальному випадку градієнт концентрації $\nabla_k \bar{c} \neq 0$, із виразу (16) випливає, що

$$\langle \sigma_{ik} \rangle_p = \langle \sigma_{ik} \rangle_f. \qquad (17)$$

Отже, згідно з рівністю (17), середнє значення тензора напружень у суспензії по об'єму твердої фази V_p дорівнює середньому значенню цього ж тензора напружень по об'єму рідинної фази V_f. Це, певна річ, не означає, що власні напруження $\sigma_{ik,f}$ у рідинній та $\sigma_{ik,p}$ у твердій фазах однакові. Важливість рівності (17) полягає у тому, що вона дозволяє виключити із розгляду осереднені напруження у твердій фазі шляхом заміни $\langle \sigma_{ik} \rangle_p$ на $\langle \sigma_{ik} \rangle_f$, що по суті замінює тверді частинки на рідинні і, таким чином, ураховує осереднену узагальнену архімедову силу $\bar{c} \nabla_k \langle \sigma_{ik} \rangle_f$, яка діє з боку рідини на занурені в ній тверді частинки в одиниці об'єму [6].

На підставі рівності (17) із виразу (10) одержуємо

$$\bar{\sigma}_{ik} = \langle \sigma_{ik} \rangle_f,$$

або

$$\bar{\sigma}_{ik} = \langle \sigma^*_{ik,f} \rangle, \qquad (18)$$

оскільки, згідно з виразами (14) і (15) і позначеннями (3) і (4), $\langle \sigma_{ik} \rangle_f = \langle \sigma^*_{ik,f} \rangle$, де $\langle \sigma^*_{ik,f} \rangle$ – середнє значення тензора узагальнених напружень $\sigma^*_{ik,f}$ по об'єму V_f.

Отже, з'ясувалося, що тензор осереднених напружень у суспензії дорівнює тензору узагальнених напружень у рідинній фазі, осереднених по об'єму V_f цієї ж фази в елементарному об'ємі осереднення V. Тому при обчисленні тензора $\bar{\sigma}_{ik}$ досить обчислити тензор $\langle \sigma^*_{ik,f} \rangle$, який ураховує власні напруження рідинної фази та додаткові напруження, пов'язані з присутністю твердих частинок у рідині.

Рівність (18) має принципове значення для теоретичної реології суспензії. Річ у тім, що у класичних структурно енергетичному та структурно динамічному методах реологічного моделювання суспензій тензор осереднених напружень у суспензії по суті теж розглядається як тензор узагальнених напружень в рідинній фазі, однак осереднених по усьому елементарному об'єму V, а не по тій його частині, яка зайнята рідиною. Використання рівності (18) дозволяє одержати більш точну формулу ефективної в'язкості суспензії як для малих, так і для порівняно високих (помірних) об'ємних концентрацій.

2. ЕФЕКТИВНА В'ЯЗКІСТЬ СУСПЕНЗІЇ СФЕРИЧНИХ МОНОДИСПЕРСНИХ ТВЕРДИХ ЧАСТИНОК У НЬЮТОНІВСЬКІЙ РІДИНІ

Будемо вважати, що рідинна фаза суспензії нестислива й ньютонівська, а тверда складається із дрібних сферичних недеформівних частинок однакового розміру. Вважатимемо також, що відносні обертальний і поступальний рухи рідини поблизу твердих частинок відсутні, а середні відстані між сусідніми твердими частинками досить великі порівняно з їхнім радіусом, тому гідродинамічним впливом цих частинок одна на одну можна нехтувати. При визначенні ефективної в'язкості будемо користуватися структурно динамічним методом. Недивлячись на те, що цей метод, на відміну від структурно енергетичного, дозволяє побудувати повне реологічне рівняння стану суспензії, яке ураховує шарову і девіаторну частини тензора осереднених напружень, для визначення ефективної в'язкості досить розглянути лише девіаторну частину тензора, тобто тензор дотичних осереднених напружень. По суті мова йде про повільний чисто зсувний безінерційний рух суспензії, при якому осереднений тиск сталий у всій області течії і тому його можна не брати до уваги при вивченні ефективної в'язкості [3].

Отже, дотичні осереднені напруження $\bar{\sigma}_{ik}$ в суспензії пов'язані з узагальненими дотичними осередненими напруженнями $\langle \sigma^*_{ik,f} \rangle$ в рідинній фазі рівністю (18). Зважаючи на те, що

$$\langle \sigma^*_{ik,f} \rangle = \frac{\bar{\sigma}^*_{ik,f}}{1-\bar{c}},$$

перепишемо рівність (18) у вигляді

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{\bar{\sigma}^*_{ik,f}}{1-\bar{c}}, \quad (i \neq k). \qquad (19)$$

Далі, для отримання формули ефективної в'язкості на підставі рівності (19) досить конкретизувати величини $\bar{\sigma}^*_{ik,f}$ та $\bar{\sigma}_{ik}$, що входять у цю рівність.

Для нестисливої в'язкої рідини можемо написати, згідно з законом тертя Ньютона,

$$\sigma^*_{ik,f} = \mu_f \varepsilon^*_{ik,f}, \qquad (20)$$

$$\varepsilon^*_{ik,f} = \nabla_k u^*_{i,f} + \nabla_i u^*_{k,f}, \qquad (21)$$

де $u^*_{i,f}$ і $u^*_{k,f}$ – проекції вектора швидкості руху рідини на i -ту і k -ту осі прямокутних координат. Ці проекції швидкості визначені у всій області суспензії, дорівнюють відповідно $u_{i,f}$ і $u_{k,f}$ у точках рідинної фази і нулю у точках твердої. Внаслідок розривності функцій $u^*_{i,f}$ і $u^*_{k,f}$ на поверхні розділу фаз S, їхні частинні похідні $\nabla_k u^*_{i,f}$ і $\nabla_i u^*_{k,f}$ – узагальнені функції, так що

$$\nabla_k u^*_{i,f} = \{\nabla_k u^*_{i,f}\} + [u^*_{i,f}]_s n_{k,f} \delta_s, \qquad (22)$$

$$\nabla_i u^*_{k,f} = \{\nabla_i u^*_{k,f}\} + [u^*_{k,f}]_s n_{i,f} \delta_s. \qquad (23)$$

Підставивши вирази (22) і (23) в (21) і далі замінивши проекції $n_{k,f}$ і $n_{i,f}$ зовнішнього відносно рідинної фази орта нормалі до поверхні S на відповідні проекції $-n_{k,p}$ і $-n_{i,p}$ орта нормалі, зовнішнього по відношенню до твердої фази, рівність (20) перепишемо у вигляді

$$\sigma^*_{ik,f} = \mu_f \{\varepsilon^*_{ik,f}\} + \mu_f e_{ik,f} \delta_s, \qquad (24)$$

$$e_{ik,f} = (u_{i,f})_s n_{k,p} + (u_{k,f})_s n_{i,p}. \qquad (25)$$

У виразі (25) ураховано, що стрибки швидкостей $[u^*_{i,f}]_s$ і $[u^*_{k,f}]_s$ на поверхні розділу фаз дорівнюють відповідно $-(u_{i,f})_s$ і $-(u_{k,f})_s$, де $(u_{i,f})_s$ і $(u_{k,f})_s$ – значення відповідних проекцій вектора швидкості рідини у точках, що межують з поверхнею S.

Осереднимо вираз (24) по елементарному об'єму V. У результаті одержимо

$$\bar{\sigma}^*_{ik,f} = \mu_f (1-\bar{c}) \langle \varepsilon_{ik,f} \rangle + \mu_f \frac{1}{V} \int\limits_{S_v} e_{ik,f} dS_v, \qquad (26)$$

$$\langle \varepsilon_{ik,f} \rangle = \nabla_k \langle (u_{i,f}) \rangle + \nabla_i \langle (u_{k,f}) \rangle, \qquad (27)$$

де S_v – поверхня розділу фаз усередині V. Перший доданок у правій частині рівності (26) виражає власні осереднені дотичні напруження в рідинній фазі, тобто

$$\mu_f (1-\bar{c}) \langle \varepsilon_{ik,f} \rangle = (1-\bar{c}) \langle \sigma_{ik,f} \rangle,$$

а другий – додаткові осереднені дотичні напруження, які пов'язані з умовами сумісного руху фаз на поверхні їхнього розділу й ураховують структуру двофазного середовища, зокрема, об'ємну концентрацію, форму та розміри твердих частинок. Саме цей доданок ураховує увесь ефект впливу твердих частинок на осереднені дотичні напруження в рідинній фазі, а отже, і на ефективну в'язкість суспензії. Оскільки суспензія вважається розведеною настільки, що гідродинамічним впливом твердих частинок одна на одну можна нехтувати, поверхневий інтеграл у виразі (26) замінимо на інтеграл по поверхні Σ будь-якої однієї твердої частинки, помножений на кількість твердих частинок n в об'ємі V, тобто

$$\frac{1}{V} \int\limits_{S_V} e_{ik,f} dS_v = \frac{n}{V} \oint\limits_{\Sigma} e_{ik,f} d\Sigma =$$

$$= \frac{\bar{c}}{W} \oint\limits_{\Sigma} e_{ik,f} d\Sigma \ , \qquad (28)$$

де W – об'єм твердої частинки. При цьому припускається, що тверді частинки містяться в об'ємі V цілими, тобто вони не "перетинаються" поверхнею цього об'єму.

Виконаємо певні перетворення інтеграла по поверхні Σ. Для цього зауважимо, що на підставі рівняння безінерційного чисто зсувного руху в'язкої нестисливої рідини, яке має вигляд $\nabla_e \sigma_{ie} = 0$, можна написати тотожньо:

$$\varepsilon_{ik,f} = \nabla_e (\varepsilon_{ie,f} \cdot x_k).$$

З огляду на це, інтеграл по поверхні Σ перетворимо, використавши формулу Гауса-Остроградського, наступним чином:

$$\oint\limits_{\Sigma} e_{ik,f} d\Sigma = \int\limits_{W} \varepsilon_{ik,f} dW = \oint\limits_{\Sigma} (\varepsilon_{ie,f} x_k)_{\Sigma} n_e d\Sigma, \quad (29)$$

де об'ємний інтеграл носить формальний характер і відповідає заміні твердих частинок рідинними.

Отже, для визначення тензора $\bar{\sigma}^*_{ik,f}$ за виразом (26) потрібно спочатку обчислити тензор $\langle \varepsilon_{ik,f} \rangle$ та інтеграл

$$\oint\limits_{\Sigma} (\varepsilon_{ie,f} \cdot x_k)_{\Sigma} n_e d\Sigma. \qquad (30)$$

Позначимо через $v_{i,f}$ та $v'_{i,f}$ швидкості незбуреного та збуреного твердими частинками рухів рідини. При цьому будемо вважати, як і в [1, 3], що незбурений рух описується лінійним законом розподілу швидкостей:

$$v_{i,f} = \alpha_{ik} x_k,$$

де α_{ik} – сталий симетричний тензор градієнтів швидкостей. У такому разі можемо написати

$$u_{i,f} = \alpha_{ik}x_k + v'_{i,f},$$

$$\varepsilon_{ik,f} = 2\alpha_{ik} + (\nabla_k v'_{i,f} + \nabla_i v'_{k,f})$$

або, після осереднення по області рідинної фази,

$$\langle \varepsilon_{ik,f} \rangle = 2\alpha_{ik}. \qquad (31)$$

Далі, для вирахування інтеграла (30) потрібно знати частинні похідні $\nabla_k v'_{i,f}$ швидкості $v'_{i,f}$ збуреного руху, зумовленого однією зануреною твердою частинкою. На великих відстанях від твердої частинки ця швидкість повинна зникати, проте поблизу твердої частинки вона аж ніяк не мала порівняно з $\alpha_{ik}x_k$. У стоксовому наближенні швидкість $v'_{i,f}$ знайдено в [1, 3] внаслідок розв'язку лінійних рівнянь гідродинаміки, записаних у системі координат з початком у центрі твердої частинки. З урахуванням відомих виразів для $v'_{i,f}$ і $\nabla_k v'_{i,f}$ інтеграл (30) по суті обчислено в [7], тому, не удаючись в подробиці цього обчислення, можемо відразу написати

$$\oint\limits_{\Sigma} (\varepsilon_{ie} \cdot x_k)_{\Sigma} n_e d\Sigma = 5\alpha_{ik} W. \qquad (32)$$

Таким чином, на підставі виразів (26), (28), (31) і (32) одержуємо

$$\bar{\sigma}^*_{ik,f} = 2\mu_f(1 + 1.5\bar{c})\alpha_{ik}. \qquad (33)$$

Тепер доречно звернути увагу на одну важливу обставину. Справа у тому, що в [3, 7] при визначенні в'язкості μ по суті використовується рівність

$$\bar{\sigma}_{ik} = \bar{\sigma}^*_{ik,f} \qquad (34)$$

і величина μ визначається лише за обчисленою правою частиною цієї рівності. В [3] рівність (34) з обчисленою правою частиною має вигляд

$$\bar{\sigma}_{ik} = 2\mu_f(1 + 2.5\bar{c})\alpha_{ik}, \qquad (35)$$

а в [7]:

$$\bar{\sigma}_{ik} = 2\mu_f(1 + 1.5\bar{c})\alpha_{ik}. \qquad (36)$$

Як бачимо, вирази (35) і (36) відрізняються між собою коефіцієнтами при $\bar{c}$. Однак, згодом з'ясувалося [7], що при обчисленні правої частини рівності (34) в [3] допущена неточність: необгрунтовано прийнята рівність $\overline{\nabla_k u_{i,f}} + \overline{\nabla_k u_{i,f}} = 2\alpha_{ik}$ замість $\overline{\nabla_k u_{i,f}} + \overline{\nabla_k u_{i,f}} = (1 - \bar{c})2\alpha_{ik}$. Але, якщо виправити цю неточність, то замість рівності (35) одержуємо (36).

Таким чином, при визначенні в'язкості μ за виразом (36) виходить, що наче

$$\mu = \mu_f(1 + 1.5\bar{c}). \qquad (37)$$

Однак ця формула не співпадає з формулою (1) і дає надто занижені розрахункові значення ефективної в'язкості порівняно з експериментальними. Формулу (1) можна одержати на підставі виразу (36), якщо використати підхід, аналогічний підходу Ейнштейна [1].

Справа у тому, що обчисливши середню питому (в одиниці об'єму і за одиницю часу) дисипацію енергії $\bar{E}$ повільного руху розведеної суспензії, Ейнштейн одержав вираз, який у наших позначеннях має вигляд

$$\bar{E} = 2\mu_f(1 + 0.5\bar{c})\sum_{i,k}(\alpha_{ik})^2. \qquad (38)$$

У той саме час, вираз для $\bar{E}$ Ейнштейн записав у вигляді

$$\bar{E} = 2\mu\sum_{i,k}[(1 - \bar{c})\alpha_{ik}]^2. \qquad (39)$$

Із останніх двох виразів випливає, що

$$\mu = \mu_f\frac{1 + 0.5\bar{c}}{(1 - \bar{c})^2}. \qquad (40)$$

Нехтуючи нескінченно малими вищого порядку, тобто замінивши $(1 - \bar{c})^2$ на $1 - 2\bar{c}$, Ейнштейн і одержав на підставі виразу (40) формулу (1).

До речі, якби Ейнштейн визначив ефективну в'язкість лише за виразом (38), то одержав би замість (1) формулу

$$\mu = \mu_f(1 + 0.5\bar{c}).$$

Отже, щоб одержати формулу (1) на підставі рівняння (36), потрібно, дотримуючись підходу, аналогічного підходу Ейнштейна, представити тензор $\bar{\sigma}_{ik}$, що входить у ліву частину цього рівняння, у вигляді

$$\bar{\sigma}_{ik} = 2\mu(1 - \bar{c})\alpha_{ik}, \qquad (41)$$

а потім виключити із виразів (36) і (41) величину $\bar{\sigma}_{ik}$.

Тепер повернемося до розгляду рівності (19). З урахуванням виразів (33) і (41) вона набуває вигляду

$$2\mu\alpha_{ik} = 2\mu_f\frac{1 + 1.5\bar{c}}{(1 - \bar{c})^2}\alpha_{ik}.$$

Звідси випливає, що

$$\mu = \mu_f\frac{1 + 1.5\bar{c}}{(1 - \bar{c})^2}. \qquad (42)$$

Це і є узагальнена формула ефективної в'язкості суспензії сферичних твердих частинок у ньютонівській рідині. На випадок малих концентрацій, коли нескінченно малими величинами $\bar{c}^2$, $\bar{c}^3$, ... можна нехтувати порівняно з $\bar{c}$, формула (42) спрощується і набуває вигляду

$$\mu = \mu_f(1 + 3.5\bar{c}). \qquad (43)$$

Як бачимо, формула (43) відрізняється від (1) коефіцієнтом при $\bar{c}$, що є наслідком урахування додаткового множника $(1-\bar{c})^{-1}$ у рівнянні (19).

Зауважимо, що на відміну від (43) формула (42) містить величину $1/(1-\bar{c})^2$ цілою, тобто без розкладання її у ряд за ступенями концентрації $\bar{c}$ і без відкидання у ньому доданків, що містять c^2, c^3, ... Тому область застосувння формули (42) не повинна бути обмеженою лише малими концентраціями. Вона може бути розширена і на випадок помірних концентрацій, однак таких, що гідродинамічна взаємодія збурень, які вносяться кожною із твердих частинок, ще не суттєва. Сказане стосується також формули (40). Зрештою, поглянемо, як узгоджуються формули (1), (40), і (42), (43) з дослідними даними.

3. ЗІСТАВЛЕННЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ЕФЕКТИВНОЇ В'ЯЗКОСТІ З РОЗРАХУНКОВИМИ

Для порівняння експериментальних значень ефективної в'язкості з розрахунковими використано дослідні дані, зібрані Томасом [9] та Хаппелем [10] і наведені, зокрема, у [11]. Крім того, використано дослідні дані щодо вимірювання питомих (на одиниці довжини труби) втрат п'єзометричного напору на тертя при гідротранспортуванні дрібних твердих матеріалів - концентрата залізної руди і відходів збагачування - у горизонтальних гідравлічно гладких трубах діаметрами 0.103 і 0.206 м [12]. У цих дослідах тверді частинки мають круглувату форму і їхній середній діаметр дорівнює $5 \cdot 10^{-3}$ м для концентрата залізної руди та $7.1 \cdot 10^{-5}$ і $8.3 \cdot 10^{-3}$ м для відходів збагачування. Густина концентрата залізної руди дорівнює 4450 кг/м^3, а густина відходів збагачування - 3200 і 3000 кг/м^3. Середня швидкість руху суспензії змінюється у діапазоні 2–4 м/с. При цих швидкостях об'ємна концентрація твердих частинок практично рівномірно розподіляється по усьому живому перерізі потоку, тому кожна із суспензій розглядається як однорідна рідина, яка характеризується певними густиною та в'язкістю.

Експеримертальні дані оброблювалися наступним чином.

Для заданих дослідних параметрів: питомої втрати п'єзометричного напору i, середньої об'ємної концентрації суспензії c, середньої швидкості потоку v, діаметра труби d, густини води ρ_f і густини твердого матеріала ρ_p насамперед вираховувалася густина суспензії ρ:

$$\rho = \rho_f(1-c) + \rho_p c,$$

а потім обчислювався коефіцієнт гідравлічного тертя λ за виразом

$$\lambda = i\frac{\rho_f}{\rho} \cdot \frac{2gd}{v^2}, \qquad (44)$$

де g – прискорення вільного падіння. Вираз (44) витікає із звичайної формули Дарсі-Вейсбаха, однак додатково ураховує співвідношення густин ρ_f/ρ, оскільки у [12] втрата напору вимірюється у метрах водяного стовпа.

З іншого боку, у [12] рекомендується коефіцієнт λ обчислювати, як для гідравлічно гладких труб, за формулою

$$\lambda = (1.8 \lg \mathbf{Re} - 1.5)^{-2}, \qquad (45)$$

де число Рейнольдса

$$\mathbf{Re} = \frac{\rho v d}{\mu}.$$

Далі, для знайдених за виразом (44) значень коефіцієнта λ вираховувалися на підставі формули (45) відповідні числа Рейнольдса, після чого обчислювалася в'язкість суспензії μ:

$$\mu = \frac{\rho v d}{\mathbf{Re}}. \qquad (46)$$

В'язкість води μ_f приймалася рівною $1.01 \cdot 10^{-6}$ Па $\cdot$ с, що відповідає середній температурі $t = 20^oC$, яка мала місце у дослідах С.Г. Коберника та В.І. Войтенка [12].

Обробка дослідних даних здійснена для об'ємних концентрацій, які змінювалися у діапазонах 0.0174 – 0.136 для концентрата залізної руди, та 0.025 – 0.182 для відходів збагачування.

Результати зіставлення розрахункових значень відносної в'язкості μ/μ_f з експериментальними показані на рисунку. При цьому точками зображені експериментальні значення величини μ/μ_f для відповідних концентрацій, суцільними лініями *1, 2* і *3, 4* – розрахунок за відповідними формулами (1), (40) і (42), (43), пунктирною – розрахунок за поліномом

$$\frac{\mu}{\mu_f} = 5.2335c^3 + 10.886c^2 + 2.6343c + 1.0336, \qquad (47)$$

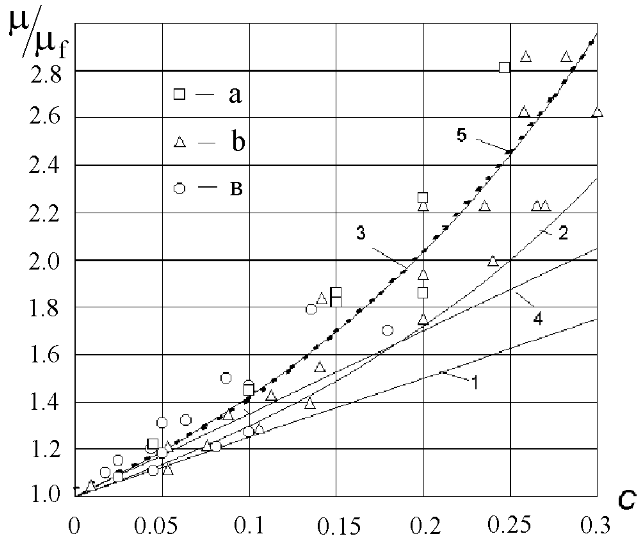

Рис. 1. Залежність відносної в'язкості μ/μ_f від об'ємної концентрації c для суспензій сферичних твердих частинок:
a, b, в – дослідні дані, запозичені із [10], [9], [12] відповідно;
1 – 5 – розрахунок за відповідними формулами (1), (40), (42), (43), (47)

який апроксимує експериментальні дані і одержаний методом найменших квадратів.

Як бачимо, узагальнена формула (42) досить добре узгоджується з експериментальними даними для помірних концентрацій $\bar{c} \leq 0.3$. Середньоквадратичні відхилення від полінома (47) дорівнюють: 0.1944 для експериментальних значень і 0.011 для розрахункової кривої *3*. З подальшим зростанням концентрації розрахункові значення відносної в'язкості μ/μ_f починають відхилятися від дослідних. Це пояснюється тим, що при $c > 0.3$ тверді частинки уже помітно впливають одна на одну, чого не ураховує формула (42).

На відміну від (42) спрощена формула (43) цілком задовільно узгоджується з експериментальними даними у діапазоні концентрацій $\bar{c} < 0.05$.

Що стосується класичних формул (1) і (40), то, як свідчить рисунок, вони дають дещо занижені розрахункові значення.

ВИСНОВОК

У даній роботі зроблено спробу використати математичний апарат теорії узагальнених функцій для реологічного моделювання суспензій сферичних твердих частинок у ньютонівській рідині. У результаті вдалося математично обгрунтувати рівність (18), а отже і (19), згідно з якою тензор осереднених напружень у суспензії дорівнює тензору узагальнених напружень у рідинній фазі, осереднених не по усьому елементарному об'єму, як це має місце у класичних теоріях ефективної в'язкості, а лише по тій його частині, що заповнена рідиною. Одержані на основі рівності (19) узагальнена (42) і спрощена (43) формули ефективної в'язкості цілком задовільно узгоджуються з експериментальними даними у відповідних діапазонах зміни об'ємної концентрації, що є наслідком урахування додаткового множника $(1-\bar{c})^{-1}$ у правій частині рівності (19).

Принагідно слід сказати, що математичний апарат теорії узагальнених функцій може бути успішно використаний також для реологічного моделювання довільного гетерогенного середовища.

1. *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов. Т. 3.– М.: Наука, 1966.– 75–90 с.
2. *Burgers J.M.* chap.3 in "Second Report on Viscosity and Plasticity".– Amsterdam North Holland. 1938.– 38 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, VI. Гидромеханика.– М.: Наука, 1986.– 730 с.
4. *Криль С.И.* Об эффективной вязкости суспензий сферических частиц // Вестник Национального политехнического университета "Харьковский политехнический университет".– 2001.– Вып. 129, Т. 1.– С. 147–157.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.– М.: Наука, 1967.– 436 с.
6. *Криль С.И.* Напорные взвесенесущие потоки.– К.: Наук. думка, 1990.– 160 с.
7. *Покровский В.Н.* Уточнение результатов теории вязкости суспензий // Журнал экспериментальной и теоретической физики.– 1968.– Т. 55, Вып. 2(8).– С. 651–653.
8. *Криль С.И., Берман В.П.* Соотношение вероятностного и пространственно- временного средних для турбулентного потока суспензии // Прикладная гидромеханика.– 2001.– 3 (75), 3.– С. 32–41.
9. *Thomas D.G.* The Viscosity of Newtonian Suspensions of Uniform Spherical particles // J. Colloid and Interface Sci.– 1965.– **20**.– P. 267–276.
10. *Хаппель Дж., Бреннер Г.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.– М.: Мир, 1976.– 630 с.
11. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред.– М.: Наука, 1978.– 336 с.
12. *Коберник С.Г., Войтенко В.И.* Напорный гидротранспорт хвостов горнообогатительных комбинатов.– К.: Наук. думка, 1967.– 140 с.