

УДК 532.528

## ОБРАЗОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУР В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Ф. ПАЦЕГОН, Л. Н. ПОПОВА

Харьковский национальный университет им.В.Н.Каразина, Харьков

Получено 03.06.2002

Исследованы условия возникновения и устойчивости пространственных структур в слое магнитной жидкости, находящейся между двумя параллельными немагнитными пластинами в постоянном однородном магнитном поле. Принята разработанная ранее модель среды с изменяющейся микроструктурой, которая учитывает процессы образования и разрушения агрегатов из магнитных частиц, входящих в состав жидкости. Получены условия, при которых такая среда обладает множеством равновесных состояний: однородных и неоднородных. Определены диапазоны значений напряженности магнитного поля, в которых неоднородные состояния асимптотически устойчивы и представляют собой стационарные диссипативные структуры, описывающие стратификацию жидкости, т.е. разбиение объема жидкости на слои с разным числом частиц в агрегатах и с разной намагниченностью. С использованием асимптотических методов построены решения, описывающие игольчатые структуры из магнитных частиц, наблюдаемые экспериментально.

Досліджені умови виникнення та стійкості просторових структур у шарі магнітної рідини, яка знаходиться у спокої між двома паралельними немагнітними пластинами у сталому однорідному магнітному полі. Прийнята розроблена раніше модель середовища зі змінною микроструктурою, яка враховує процеси створення і розпаду агрегатів із магнітних часток, які входять до складу рідини. Отримані умови, за яких таке середовище має множини рівноважних станів: однорідних і неоднорідних. Визначені діапазони значень напруженості магнітного поля, у яких неоднорідні стани асимптотично стійкі й являють собою стаціонарні дисипативні структури, які описують стратифікацію рідини, тобто розподіл об'єму рідини на шари з різним числом часток у агрегатах і різною намагніченістю. З використанням асимптотичних методів побудовані рішення, що описують голчасті структури з магнітних часток, які спостерігаються в експериментах.

The conditions of formation and stability of the space structures in a magnetic fluid, being in an equilibrium between two parallel nonmagnetic plates in a constant homogeneous magnetic field, were investigated. An earlier worked out model of a medium with a transformed microstructure, which takes into an account the processes of a generation and a destruction of the belonging to the magnetic fluid aggregates of a magnetic particles, was accepted. The conditions, for which such a medium is possessed of a set of the equilibrium states: homogeneous and nonhomogeneous, were obtained. The ranges of a magnetic field intensity, in which nonhomogeneous states are asymptotic stable and are the stationary dissipative structures, describing a fluid stratification, i.e. a dividing of a fluid volume to the layers with a different number of the particles in the aggregates and a different magnetization, were defined. The solutions, corresponding to the needlelike structures of the magnetic particles, which are observed in the experiments, were obtained by the asymptotic methods.

### ВВЕДЕНИЕ

Пространственные структуры в магнитной жидкости представляют собой распределенные по объему регулярные упорядоченные конфигурации из магнитных частиц. Взаимодействие частиц, входящих в состав магнитной жидкости, и образование из них цепочечных агрегатов учитывается в модели среды с изменяющейся микроструктурой, предложенной в работе [1]. Равновесная намагниченность такой среды определяется двумя параметрами: средним числом частиц в агрегатах и параметром эффективного магнитного поля, который учитывает поля, создаваемые отдельными частицами. Возникновение и разрушение агрегатов, т.е. изменение микроструктуры жидкости, покоящейся в постоянном однородном магнитном поле, рассматривается как фазовый переход второго рода и описывается системой двух нелинейных

диффузионных уравнений. Подобного рода системы называют иногда двухкомпонентными системами или уравнениями типа "реакция-диффузия" [2]. Исследование решений этих уравнений позволяет объяснить широкий класс нелинейных явлений в магнитной жидкости, которые наблюдаются экспериментально.

Особенность задачи, рассматриваемой в настоящей работе, связана с тем, что неизвестные функции, определяющие магнитное состояние жидкости, входят в уравнения неявным образом, а намагниченность среды является неоднозначной функцией напряженности магнитного поля. Кривая намагничивания среды с изменяющейся микроструктурой исследована в работах [3, 4], где показано, что в определенном интервале значений напряженности магнитного поля жидкость имеет два асимптотически устойчивых однородных равновесных состояния и является триггерной средой, способной к автономному образова-

нию и развитию стационарных и нестационарных пространственных структур. В работе [4] рассмотрены нестационарные структуры, описывающие волновые режимы типа волн переключения, при распространении которых элементы жидкости переходят из метастабильного состояния в абсолютное устойчивое.

Цель настоящей работы состоит в исследовании стационарных пространственных структур в магнитной жидкости, которые представляют интерес в связи с проблемами обеспечения работоспособности магнитожидкостных технических устройств [6].

### 1. МОДЕЛЬ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим модель среды, в которой возможно образование и разрушение агрегатов, содержащих конечное число магнитных частиц [1]. Магнитное состояние такой среды определяется параметром эффективного магнитного поля  $\lambda$  и средним числом частиц в агрегатах  $\nu = \nu^{-1}$ . Если жидкость покоится в постоянном однородном магнитном поле, эволюция во времени ее магнитного состояния в одномерном случае описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \tau_\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= D_\lambda \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H), \\ \tau_\nu \frac{\partial \nu}{\partial t} &= D_\nu \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H). \end{aligned} \quad (1)$$

Функции  $Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H)$  и  $Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) &= \frac{1}{2\rho} [M^2 - M_*^2 - \\ &- 2\beta M_s^2 (\lambda - \lambda_{1*})(\lambda - \lambda_{2*})(\lambda - \lambda_{3*})], \\ Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) &= \frac{n_1 k T}{\rho} [f(\xi) - f(\xi_*) + \\ &+ \alpha (\nu - \nu_{1*})(\nu - \nu_{2*})(\nu - \nu_{3*})]. \end{aligned}$$

Здесь  $\xi = m_1 H_e / (k T \nu)$ ;  $H_e = H + \lambda M$ ;  $n_1 = c_1 \rho / M$  – объемная плотность феррочастиц,  $c_1$  – массовая концентрация частиц, предполагаемая постоянной;  $M$  – масса одиночной феррочастицы;  $k$  – постоянная Больцмана; намагниченность жидкости определяется уравнением  $M = M_s L(\xi)$ ,  $L(\xi) = \text{cth } \xi - 1/\xi$  – функция Ланжевена;  $M_*$  – намагниченность структурирования жидкости;  $M_* = M_s L(\xi_*) = M_s L_*$ ;  $M_s = m_1 n_1$  – намагниченность насыщения жидкости;  $\lambda_{i*}, \nu_{i*}$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – равновесные значения  $\lambda$  и  $\nu$  при

$M = M_*$ , причем  $\lambda_{1*} > \lambda_{3*} > \lambda_{2*}$ ;  $\lambda_{1*} + \lambda_{2*} = 2\lambda_{3*}$ ;  $\nu_{1*} > \nu_{3*} > \nu_{2*}$ ;  $\nu_{i*} - \nu_{j*} = m_1 M_s L_* \times (\lambda_{i*} - \lambda_{j*}) / (k T \xi_*)$ ;  $\alpha = (k T / (m_1 M_s))^3 (\xi_* / L_*)^4 \beta$ ;  $f(\xi) = \ln(\text{sh } \xi / \xi) - \xi L(\xi)$ . Параметры  $\tau_\lambda, \tau_\nu, D_\lambda$  и  $D_\nu$  считаются постоянными.

Однородное равновесное состояние жидкости в магнитном поле  $H$  удовлетворяет условиям:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0, \quad Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0. \quad (2)$$

При фиксированных  $\rho, T$  и  $\beta < 0$  эти уравнения определяют многозначные зависимости  $\lambda(M)$  и  $\nu(M)$ . Графики функций  $\lambda(M)$  и  $\nu(M)$  представляются в виде объединения трех однозначных ветвей  $\lambda^{(i)}(M)$ ,  $i = \overline{1,3}$  и  $\nu^{(i)}(M)$ ,  $i = \overline{1,3}$  (рис. 1), ограниченных значениями  $\lambda(0), \lambda', \lambda''$  и  $\lambda(M_s)$  и  $\nu(0), \nu', \nu''$  и  $\nu(M_s)$  соответственно, где  $\lambda'$  и  $\lambda''$  и  $\nu'$  и  $\nu''$  представляют собой точки экстремума функций  $M(\lambda), M(\nu)$ , обратных к функциям  $\lambda(M)$  и  $\nu(M)$ :

$$\lambda'' = \lambda_{3*} \pm \frac{\langle \lambda \rangle}{2\sqrt{3}}, \quad \nu'' = \nu_{3*} \pm \frac{\langle \nu \rangle}{2\sqrt{3}},$$

где  $\langle \lambda \rangle \equiv \lambda_{2*} - \lambda_{1*} (< 0)$ ,  $\langle \nu \rangle \equiv \nu_{2*} - \nu_{1*} (< 0)$ .

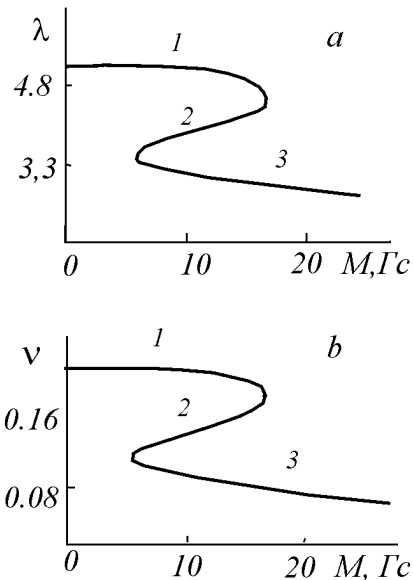


Рис. 1. Зависимость  $\lambda$  (а) и  $\nu$  (б) от  $M$ :  $m_1 = 10^{-16}$  эрг/Гс,  $M_s = 40$  Гс,  $\xi_* = 1$ ,  $\beta = -0.1$ ,  $\lambda_{3*} = 4$ ,  $\langle \lambda \rangle = -2$ ,  $\nu_{3*} = 0.2$

Система (2) и уравнение  $M = M_s L(\xi)$  задают гладкую самопересекающуюся кривую намагничивания, которая состоит из девяти ветвей однозначности функции  $M(H)$ . Будем обозначать их

двузначным числом  $ij$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , где  $i(j)$  указывает номер ветви  $\lambda(M)(\nu(M))$  (рис. 2) [4]. Концами этих ветвей являются начало координат, точки с вертикальной касательной и точка  $(\overline{H}, \overline{M})$ , ордината которой определяется из уравнений  $f(\overline{\xi}) = f(\xi_*) + \alpha\nu_1\nu_2\nu_3$ ,  $\overline{M} = M_s L(\overline{\xi})$ . При построении модели предполагается, что выполняется условие парамагнитности среды  $3kT\nu > m_1 M_s \lambda$ .

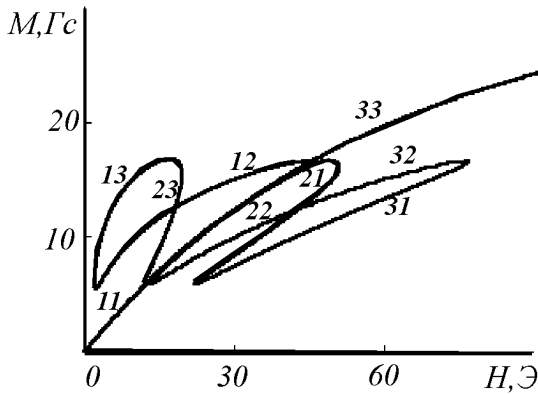


Рис. 2. Кривая намагничивания жидкости с изменяющейся микроструктурой

Рассматриваемая жидкость в различных магнитных полях может иметь от одного до девяти однородных равновесных состояний. Устойчивость таких состояний обеспечивается условиями:

$$Q_\lambda^{(\lambda)} < 0, \quad Q_\nu^{(\nu)} < 0, \quad \Delta \equiv Q_\lambda^{(\lambda)} Q_\nu^{(\nu)} - [Q_\nu^{(\lambda)}]^2 > 0. \quad (3)$$

Анализ показывает, что при выполнении неравенства

$$-\frac{\beta\langle\lambda\rangle^2}{6} > \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{2*}, \xi_*)} \quad (4)$$

асимптотически устойчивым однородным равновесным состояниям соответствуют точки ветвей 21 и 23 кривой намагничивания; при выполнении неравенства

$$\frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{1*}, \xi_*)} < -\frac{\beta\langle\lambda\rangle^2}{6} < \frac{m_1 M_s L_*^2}{\psi(\lambda_{3*}, \nu_{2*}, \xi_*)} \quad (5)$$

устойчивым состояниям отвечают внутренние точки ветви 21; если же не выполняется ни одно из условий (4), (5), то жидкость неустойчива в любом магнитном поле [4]. Будем считать, что параметры жидкости удовлетворяют неравенству (4), что, как будет показано далее, позволяет получить множество асимптотически устойчивых пространственных структур.

Заметим, что кривая рис. 2 качественно отличается от кривой намагничивания, приведенной на рис. 2 работы [4] для  $\nu_{3*} = 0.25$ , тем, что области определения ветвей 21 и 23, содержащих устойчивые однородные состояния жидкости, не пересекаются.

## 2. КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ

Рассмотрим слой жидкости, расположенный между двумя параллельными бесконечными немагнитными пластинами. Ось  $Ox$  прямоугольной декартовой системы координат перпендикулярна пластинам, а начало координат находится на одной из них. На жидкость действует постоянное однородное магнитное поле  $\vec{H} = H\vec{e}_y$ .

Исследуем случай выполнения неравенства  $D_\nu/D_\lambda = \varepsilon^2 \ll 1$ , представляющий интерес в практических приложениях. Неоднородные стационарные решения  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $\nu = \nu(x)$  системы (1) удовлетворяют уравнениям:

$$\varepsilon^2 \nu'' + \frac{1}{D_\lambda} Q^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = 0,$$

$$\lambda'' + \frac{1}{D_\lambda} Q^{(\lambda)}(\lambda, \nu; H) = 0 \quad (6)$$

и граничным условиям:

$$\nu'(0) = \nu'(l) = 0; \quad \lambda'(0) = \lambda'(l) = 0. \quad (7)$$

Нас будут интересовать решения типа контрастных структур [6]. Система (6) допускает такие решения, если при некотором значении  $H$  в точках кривой намагничивания  $Q_\nu^{(\nu)} < 0$ . На ветвях 12 и 22:  $\nu'' < \nu < \nu'$ , следовательно,

$$Q_\nu^{(\nu)}(\lambda, \nu; H) = \frac{n_1 kT}{\rho} \left[ \frac{kT\xi^2}{\psi} + 3\alpha(\nu - \nu')(\nu - \nu'') \right] > 0.$$

Эти ветви можно сразу исключить из рассмотрения.

Относительно знака  $\Delta$  в условиях (3) возможны два случая:  $\Delta > 0$  и  $\Delta < 0$ .

Проанализируем сначала неравенство  $\Delta > 0$ . Оно выполняется на ветвях 21 и 23, которым принадлежат устойчивые однородные состояния жидкости [4]. На этих ветвях можно выделить интервалы значений  $H$ :  $(H_1, H_2)$  и  $(H_3, H_4)$ , для которых выполняются условия:

$$Q^{(\lambda)}(\lambda_\varepsilon, \nu_\varepsilon; H) = 0, \quad Q^{(\nu)}(\lambda_\varepsilon, \nu_\varepsilon; H) = 0, \\ Q^{(\nu)}(\lambda_\varepsilon, \nu_n; H) = 0, \quad (8)$$

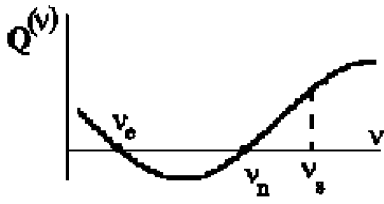


Рис. 3. Зависимость  $Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H)$  от  $\nu$  на ветви 21 кривой намагничивания

$$Q_{\nu}^{(\nu)}(\lambda_e, \nu_e; H) < 0, \quad Q_{\nu}^{(\nu)}(\lambda_e, \nu_n; H) > 0, \quad (9)$$

$$\int_{\nu_n}^{\nu_e} Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H) d\nu = \int_{\nu_n}^{\nu_s} Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H) d\nu, \quad (10)$$

$$\int_{\nu_e}^{\nu_s} \frac{Q^{(\lambda)}(\lambda_e, \nu; H)}{\sqrt{\int_{\nu}^{\nu_e} Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H) d\nu}} d\nu \neq 0, \quad (11)$$

$$\Delta(\lambda_e, \nu_e; H) > 0. \quad (12)$$

Эти соотношения означают, что параметры  $\nu_e, \lambda_e$  определяют асимптотически устойчивое однородное равновесное состояние жидкости, функция  $Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu; H)$  при заданном  $H$  имеет, по крайней мере, два корня  $\nu = \nu_e, \nu = \nu_n$  (рис. 3) и существует такая точка  $\nu_s$ , что площади фигур, равные интегралам в уравнении (10), одинаковы.

При выполнении условий (8)–(12) задача (6)–(7) допускает решение типа контрастной структуры. Это решение имеет точку "всплеска" третьего типа [6]  $x_* = l/2$  и характеризуется резким изменением среднего числа частиц в агрегатах в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_*$ , но слабым изменением параметра эффективного магнитного поля ( $\lambda \sim \lambda_e$ ) во всем объеме жидкости. При  $S \equiv 1/\nu(x_*) - 1/\nu_e \sim 1/\nu_s - 1/\nu_e > 0$  ( $< 0$ ) решение типа контрастной структуры описывает образование равноудаленного от твердых стенок слоя более (менее) агрегированной жидкости.

Главный член асимптотики  $\nu$  по малому параметру  $\varepsilon$  имеет вид

$$\nu(x) \sim \nu_e + \Pi_o \nu(\tau), \quad \nu(l-x) = \nu(x), \quad l/2 \leq x \leq l, \quad (13)$$

где  $\tau = (x - l/2)/\varepsilon$ .

Функция  $\Pi_o \nu(\tau)$  определяется как решение задачи

$$\frac{d\Pi_o \nu}{d\tau} = \text{sign}(\nu_e - \nu_s) \Phi(|\Pi_o \nu|), \quad \Pi_o \nu(0) = \nu_s - \nu_e \quad (14)$$

и имеет обычную для пограничных функций экспоненциальную оценку:

$$|\Pi_o \nu(\tau)| \leq C \exp(-p\tau), \quad c > 0, \quad p > 0. \quad (15)$$

Здесь

$$\Phi(|\Pi_o \nu|) = \left[ -\frac{2}{D_\lambda} \int_0^{\Pi_o \nu} Q^{(\nu)}(\lambda_e, \nu_e + t; H) dt \right]^{1/2}, \quad (16)$$

а коэффициент  $p$  удовлетворяет неравенству:

$$p \leq \left( -\frac{1}{D_\lambda} Q_{\nu}^{(\nu)}(\lambda_e, \nu_e; H) \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Асимптотическое приближение для  $\lambda$  с точностью порядка  $\varepsilon$  имеет вид:

$$\nu_o(x) = \lambda_e + \varepsilon \frac{\eta}{2\kappa \text{sh}(\kappa l/2)} \times \begin{cases} \text{ch}(\kappa x), & 0 \leq x < l/2, \\ \text{ch}(\kappa(x-l)), & l/2 \leq x \leq l, \end{cases}$$

где

$$\kappa = \sqrt{-\frac{\Delta(\lambda_e, \nu_e; H)}{D_\lambda Q_{\nu}^{(\nu)}(\lambda_e, \nu_e; H)}}, \quad \eta = -\sqrt{\frac{2}{D_\lambda}} \int_{\nu_e}^{\nu_s} \frac{Q^{(\lambda)}(\lambda_e, \nu_e; H)}{\sqrt{\int_{\nu}^{\nu_e} Q^{(\nu)}(\lambda_e, \xi; H) d\xi}} d\nu. \quad (18)$$

Функция  $Q^{(\lambda)}(\lambda_e, \nu; H)$  при  $\nu = \nu_e$  обращается в нуль, а на отрезке интегрирования отрицательна в случае  $\nu_s > \nu_e$ , но положительна в случае  $\nu_s < \nu_e$ , так как

$$Q_{\nu}^{(\lambda)} = -\frac{kTM_s \xi M}{\rho \psi} < 0,$$

где  $\psi = \psi(\lambda, \nu, \xi) \equiv kT\nu/L' - m_1 M_s \lambda$ . Неравенство следует из условия парамагнитности среды. Поэтому в обоих случаях  $\eta > 0$ . Отклонение значения  $\lambda$  в точке  $x_*$  от значения  $\lambda$  в точке  $x = 0$  – малая положительная величина порядка  $\varepsilon$ :

$$\lambda(x_*) - \lambda(0) \sim \varepsilon \frac{\eta \text{th}(\kappa l/4)}{2\kappa}.$$

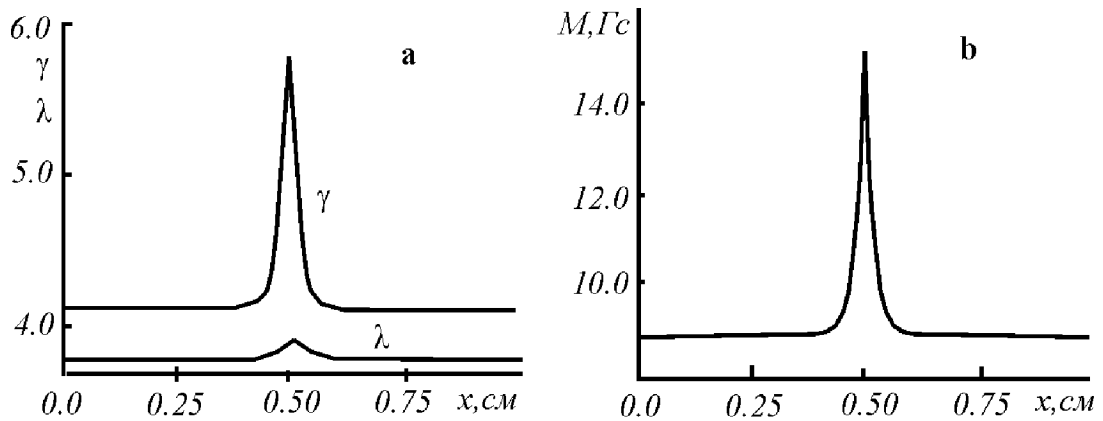


Рис. 4. Решение типа контрастной структуры (а) и соответствующее ему распределение намагниченности (b) в слое жидкости при  $H = 32.14 \text{ Э}$  ( $D_\lambda = 10^4 \text{ см}$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\lambda_e = 3.74$ ,  $\nu_e = 0.24$ ,  $\nu_s = 0.17$ )

Распределение в слое жидкости параметров  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $\nu^{-1} \equiv \gamma = \gamma(x)$  и намагниченности  $M$ , удовлетворяющей уравнению

$$M(x) = M_s L(m_1(H + \lambda(x)M(x))/kT\nu(x)),$$

представлены на рис. 4 (точка  $(\lambda_e, \nu_e)$  принадлежит ветви 21 кривой намагничивания).

Условия (8)–(12) выполняются для точек  $(\lambda_e, \nu_e)$  ветви 23 в интервале  $H_1 = 12.1 \text{ Э} \leq H \leq 17.2 \text{ Э} = H_2$ , и для точек ветви 21 при  $H_3 = 32.1 \text{ Э} \leq H \leq 51.2 \text{ Э} = H_4$ . В первом случае величина ”всплеска”  $S$  отрицательна:  $-2 \leq S \leq 0$ , наименьшее число частиц в агрегатах достигается при  $H = 17.2 \text{ Э}$  и равно  $\sim 4(1/\nu_e \sim 6)$ . Во втором случае  $S$  положительно:  $0 \leq S \leq 2$ , а наибольшее число частиц  $\sim 6$  достигается при  $H = 32.1 \text{ Э}$ . Следует заметить, что полученные результаты согласуются с оценками для числа частиц в цепочечных агрегатах, которые приведены в работе [7].

Рассмотрим теперь неравенство  $\Delta < 0$ . Оно выполняется на ветвях 11, 13, 33, 22 и 31. Действительно, в точках  $(\lambda_{1*}, \nu_{1*}) \in 11$ ,  $(\lambda_{1*}, \nu_{2*}) \in 13$  и  $(\lambda_{2*}, \nu_{2*}) \in 33$

$$\Delta = -\left(\frac{\beta n_1 k T \xi_8 \langle \lambda \rangle^2}{2\rho L_*}\right)^2 < 0,$$

а в точках  $(\lambda_{3*}, \nu_{3*}) \in 22$  и  $(\lambda_{2*}, \nu_{1*}) \in 31$

$$\Delta = -\left(\frac{\beta n_1 k T \xi_8 \langle \lambda \rangle^2}{4\rho L_*}\right)^2 < 0.$$

При этом, как показано в [4], знак величины  $\Delta$  не меняется в пределах одной ветви.

В некоторых интервалах значений  $H$  на ветвях 11, 13, 33 и 31 выполняются условия (8)–(11), а вместо (12) имеет место неравенство  $\Delta(\lambda_e, \nu_e; H) < 0$ . В этом случае аналогично предыдущему можно построить решение задачи (6)–(7) типа контрастной структуры. Оно также имеет точку ”всплеска” третьего типа  $x_* = l/2$ , остаются в силе и соотношения (13)–(17). Изменяется только вид асимптотического разложения для  $\lambda$ :

$$\lambda(x) = \lambda_e - \varepsilon \frac{\eta}{2\kappa' \sin(\kappa'l/2)} \times \begin{cases} \cos(\kappa'x), & 0 \leq x < l/2, \\ \cos(\kappa'(x-l)), & l/2 \leq x \leq l, \end{cases}$$

где  $\eta$  определяется той же формулой (18), что и раньше, а

$$\kappa' = \sqrt{\frac{\Delta(\lambda_e, \nu_e; H)}{D_\lambda Q_\nu^{(\nu)}(\lambda_e, \nu_e; H)}}.$$

В этом случае, в отличие от предыдущего, величина

$$\lambda(x_*) - \lambda(0) \sim \varepsilon \frac{\eta \operatorname{tg}(\kappa'l/4)}{2\kappa'}$$

может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от значения  $\kappa'l$  (при фиксированных  $\kappa'$  – от геометрического размера  $l$  области, занимаемой жидкостью).

Как при  $\Delta > 0$ , так и при  $\Delta < 0$  функции  $\lambda(x)$ ,  $\nu(x)$  являются четными относительно точки  $x_*$ . Следовательно, возможно их продолжение по оси  $Ox$  и построение решения с произвольным числом точек ”всплеска”, равномерно расположенных на

отрезке  $[0, l]$ . Такие функции определяют периодические структуры (страты) с периодом  $L = l/N$  ( $N$  – натуральное число), удовлетворяющим условию  $L/l \gg \varepsilon$ .

Полученные решения описывают возникновение структур в жидкости и в том случае, когда магнитное поле перпендикулярно пластинам (при этом ось  $Ox$  параллельна им). Такие конфигурации в виде ориентированных вдоль поля игольчатых конфигураций магнитных частиц наблюдаются экспериментально в тонких пленках [8] и в объемах магнитной жидкости [9].

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНТРАСТНЫХ СТРУКТУР

Исследуем устойчивость решений типа контрастных структур относительно малых возмущений. Пусть  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $\nu = \nu(x)$  – решение, имеющее одну точку "всплеска"  $x_* = l/2$ . Представляя возмущения в виде  $\delta\lambda = \exp(\omega t)y(x)$ ,  $\delta\nu = \exp(\omega t)z(x)$  и линеаризуя систему (1) в малой окрестности этого решения, получаем:

$$\begin{aligned} y'' + \frac{1}{D_\lambda}(Q_\lambda^{(\lambda)}(\lambda(x), \nu(x); H) - \tau_\lambda\omega)y + \\ + \frac{1}{D_\lambda}Q_\nu^{(\lambda)}(\lambda(x), \nu(x); H)z = 0, \\ \varepsilon^2 z'' + \frac{1}{D_\lambda}Q_\lambda^{(\nu)}(\lambda(x), \nu(x); H)y + \\ + \frac{1}{D_\lambda}(Q_\nu^{(\nu)}(\lambda(x), \nu(x); H) - \tau_\nu\omega)z = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Положим

$$y(x) = \bar{y}(x) + \Pi y(\tau), \quad z(x) = \bar{z}(x) + \Pi z(\tau), \quad (20)$$

где  $\bar{y}(x)$ ,  $\bar{z}(x)$  – регулярные, а  $\Pi y(\tau)$ ,  $\Pi z(\tau)$  – пограничные части  $y(x)$ ,  $z(x)$ , соответственно.

В таком же виде представим коэффициенты в уравнениях (12):

$$\begin{aligned} Q_\nu^{(\lambda)}(\lambda(x), \nu(x); H) = Q_\nu^{(\lambda)}(\lambda(x), \bar{\nu}(x) + \Pi\nu(x); H) = \\ = \bar{Q}_\nu^{(\lambda)} + \Pi Q_\nu^{(\lambda)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\bar{Q}_\nu^{(\lambda)} \equiv Q_\nu^{(\lambda)}(\lambda(x), \bar{\nu}(x); H)$ ,  $\Pi Q_\nu^{(\lambda)} \equiv Q_\nu^{(\lambda)}(\lambda(x), \nu(x); H) - \bar{Q}_\nu^{(\lambda)}$ . Здесь учтено, что функция  $\lambda(x)$  не имеет пограничной части. Аналогичным образом выписываются остальные коэффициенты.

Подставляя соотношения (20), (21) в систему (19) и отделяя регулярные и пограничные члены, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{y}'' + \frac{1}{D_\lambda}(\bar{Q}_\lambda^{(\lambda)} - \tau_\lambda\omega)\bar{y} + \frac{1}{D_\lambda}\bar{Q}_\nu^{(\lambda)}\bar{z} = 0, \\ \varepsilon^2 \bar{z}'' + \frac{1}{D_\lambda}\bar{Q}_\lambda^{(\nu)}\bar{y} + \frac{1}{D_\lambda}(\bar{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu\omega)\bar{z} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{d^2 \Pi y}{d\tau^2} + \frac{1}{D_\lambda}(\bar{Q}_\lambda^{(\lambda)} - \tau_\lambda\omega)\Pi y + \Pi Q_\lambda^{(\lambda)}(\bar{y} + \Pi y) + \\ + \frac{1}{D_\lambda}\bar{Q}_\nu^{(\lambda)}\Pi z + \Pi Q_\nu^{(\lambda)}(\bar{z} + \Pi z) = 0, \\ \frac{d^2 \Pi z}{d\tau^2} + \frac{1}{D_\lambda}\bar{Q}_\lambda^{(\nu)}\Pi y + \Pi Q_\lambda^{(\nu)}(\bar{y} + \Pi y) + \\ + \frac{1}{D_\lambda}(\bar{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu\omega)\Pi z + (\Pi Q_\nu^{(\nu)}(\bar{z} + \Pi z)) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Используем асимптотические разложения функций  $\lambda(x)$ ,  $\nu(x)$ , параметр  $\omega$  и решения уравнений (22), (23) представим в виде рядов:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \dots,$$

$$\bar{y}(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots,$$

$$\Pi y(\tau) = \Pi_0 y(\tau) + \Pi_1 y(\tau) + \dots,$$

которые подставим в уравнения (22), (23) и приравняем члены одинакового порядка малости по  $\varepsilon$ .

Для  $y_0(x)$ ,  $z_0(x)$  приходим к системе уравнений с постоянными коэффициентами:

$$y_0'' + \frac{1}{D_\lambda}(\bar{Q}_\lambda^{(\lambda)} - \tau_\lambda\omega)y_0 + \frac{1}{D_\lambda}\bar{Q}_\nu^{(\lambda)}z_0 = 0,$$

$$\bar{Q}_\lambda^{(\nu)}y_0 + (\bar{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu\omega)z_0 = 0. \quad (24)$$

Здесь функции  $\bar{Q}_\lambda^{(\lambda)}$ ,  $\bar{Q}_\nu^{(\lambda)}$ ,  $\bar{Q}_\nu^{(\nu)}$  вычисляются в точке  $(\lambda_\varepsilon, \nu_\varepsilon; H)$ .

Заметим, что (24) совпадает с линеаризацией системы (1) вблизи однородного стационарного решения  $\lambda = \lambda_\varepsilon$ ,  $\nu = \nu_\varepsilon$ , если положить в последней  $D_\nu = 0$ .

При  $\bar{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu\omega = 0$  система (24) имеет только тривиальное решение.

Пусть  $\bar{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu\omega \neq 0$ , тогда из второго уравнения (24)  $z_0$  выражается через  $y_0$ , а подстановка этого выражения в первое уравнение дает

$$y_0'' = \frac{1}{D_\lambda} \frac{\tau_\lambda\tau_\nu\omega_0^2 - (\tau_\lambda\bar{Q}_\nu^{(\nu)} + \tau_\nu\bar{Q}_\lambda^{(\lambda)})\omega_0 + \Delta}{\tau_\nu\omega - \bar{Q}_\nu^{(\nu)}} y_0. \quad (25)$$

Функция  $y_0(x)$  должна удовлетворять граничным условиям

$$y'_0(0) = y'_0(l) = 0. \quad (26)$$

В том случае, когда

$$\frac{1}{D_\lambda} \frac{\tau_\lambda \tau_\nu \omega_0^2 - (\tau_\lambda \overline{Q}_\nu^{(\nu)} + \tau_\nu \overline{Q}_\lambda^{(\lambda)}) \omega_0 + \Delta}{\tau_\nu \omega - \overline{Q}_\nu^{(\nu)}} = -\gamma_m^2 \equiv -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (27)$$

задача (25), (26) имеет нетривиальные решения:

$$y_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{l}}, \quad y_0^{(m)} = \frac{2}{\sqrt{l}} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Корни  $\omega_0$  уравнений (27) (переобозначим их через  $\omega_m$ )

$$\omega_m^\pm = \frac{1}{2} \left[ a_m - b_m \pm \sqrt{(a_m + b_m)^2 + 4(\overline{Q}_\nu^{(\lambda)})^2 / (\tau_\lambda \tau_\nu)} \right] \quad (28)$$

совпадают с корнями характеристического уравнения, определяющими устойчивость однородного стационарного состояния жидкости при  $D_\nu = 0$  [4].

Здесь введены обозначения:

$$a_m = \frac{1}{\tau_\lambda} (\overline{Q}_\lambda^{(\lambda)} - D_\lambda \gamma_m^2), \quad b_m = -\frac{1}{\tau_\nu} \overline{Q}_\nu^{(\nu)}.$$

Все значения  $\omega_m^\pm$ , как это следует из уравнения (28), действительны. Кроме того, справедливо соотношение:

$$\omega_m^+ = \omega_0^+ - \frac{\gamma_m^2}{2} (1 + \zeta) \frac{D_\lambda}{D_\nu}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\zeta \equiv (a_m + b_m + a_o + b_o) / \left[ \left( (a_m + b_m)^2 + 4(Q_\nu^{(\lambda)})^2 : (\tau_\lambda \tau_\nu) \right)^{1/2} + \left( (a_o + b_o)^2 + 4(Q_\nu^{(\lambda)})^2 / (\tau_\lambda \tau_\nu) \right)^{1/2} \right]^{1/2};$$

$\omega_m^+ < \omega_0^+$ , так как  $|\eta| < 1$ .

Отсюда следует, что регулярные моды, соответствующие  $m \rightarrow \infty$ , стремятся стабилизировать контрастные структуры в жидкости, поскольку  $\omega_m^+ \rightarrow -\infty$ , а наиболее опасными с точки зрения потери устойчивости являются однородные регулярные возмущения  $(\delta\lambda, \delta\nu) \sim \exp(\omega_0^+ t)$ .

Условия устойчивости контрастных структур относительно таких возмущений в нулевом приближении совпадают с условиями устойчивости

однородного равновесного состояния  $(\lambda_\epsilon, \nu_\epsilon)$  неограниченного объема жидкости.

Рассмотрим теперь уравнения (23) для пограничных функций  $\Pi y$  и  $\Pi z$ . Члены при  $\epsilon^{-2}$  и  $\epsilon^{-1}$  дают:

$$\frac{d^2 \Pi_0 y}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 \Pi_1 y}{d\tau^2} = 0.$$

Из этих уравнений и условий

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\tau}(0) = \frac{d\Pi_1 y}{d\tau}(0) = 0,$$

$$\Pi_0 y|_{|\tau| \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Pi_1 y|_{|\tau| \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

следует:

$$\Pi_0 y = \Pi_1 y = 0.$$

Члены нулевого порядка по  $\epsilon$  приводят к линейным уравнениям:

$$D_\lambda \frac{d^2 \Pi_2 y}{d\tau^2} + (\overline{Q}_\nu^{(\lambda)} + \Pi Q_\nu^{(\lambda)}) \Pi_0 z = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\overline{Q}_\nu^{(\lambda)} \cdot \Pi Q_\nu^{(\lambda)} - (\overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+) \Pi Q_\lambda^{(\lambda)}}{(\overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+)}, \quad (29)$$

$$D_\lambda \frac{d^2 \Pi_0 z}{d\tau^2} + (\overline{Q}_\nu^{(\nu)} + \Pi Q_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+) \Pi_0 z = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\overline{Q}_\nu^{(\lambda)} \cdot \Pi Q_\nu^{(\nu)} - (\overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+) \Pi Q_\nu^{(\lambda)}}{(\overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+)}. \quad (30)$$

Здесь  $\Pi Q_\lambda^{(\lambda)} = Q_\lambda^{(\lambda)} (\lambda_\epsilon, \nu_\epsilon + \Pi_0 \nu; H) - \overline{Q}_\lambda^{(\lambda)} \dots$

Постоянная величина  $\overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+$ , которая фигурирует в знаменателях правых частей уравнений (29) и (30), при  $H \neq 0$  является строго отрицательной. Это следует из соотношения

$$2(\overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+) = \overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \frac{\tau_\nu}{\tau_\lambda} \overline{Q}_\lambda^{(\lambda)} - \sqrt{\left( \overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \frac{\tau_\nu}{\tau_\lambda} \overline{Q}_\lambda^{(\lambda)} \right)^2 + 4 \frac{\tau_\nu}{\tau_\lambda} \left( \overline{Q}_\nu^{(\lambda)} \right)^2}$$

и неравенства

$$\overline{Q}_\nu^{(\lambda)} = -\frac{k T M_s \xi M}{\rho \psi},$$

которое выполняется всюду, за исключением точки  $H = M = 0$ .

Уравнение (30) содержит только одну неизвестную функцию  $\Pi_0 z(\tau)$ , которая с учетом условий  $d\Pi_0 z/d\tau(0) = 0$ ,  $\Pi_0 z|_{\tau \rightarrow \pm\infty} = 0$  находится численно. Асимптотику для этой функции при  $\tau \rightarrow \pm\infty$

можно выписать, не решая уравнения. Если поведение  $\Pi_0\nu(\tau)$  на бесконечности задается выражением  $C \exp(-p|\tau|)$ , то

$$\Pi_0 z(\tau) \sim \frac{C}{\sqrt{l}} \left[ (\tau_\nu \omega_0^+ - \overline{Q}_\nu^{(\nu)}) \overline{Q}_{\nu\lambda}^{(\nu)} + \overline{Q}_{\nu\nu}^{(\nu)} \overline{Q}_\nu^{(\lambda)} \right] \times \\ \times \left[ (\tau_\nu \omega_0^+ - \overline{Q}_\nu^{(\nu)}) (p^2 D_\lambda + \overline{Q}_\nu^{(\lambda)}) - \tau_\nu \omega_0^+ \right]^{-1} e^{-p|\tau|},$$

где  $\overline{Q}_{\nu\lambda}^{(\nu)}, \overline{Q}_{\nu\nu}^{(\nu)}$  берутся в точке  $(\lambda_\epsilon, \nu_\epsilon; H)$ .

После вычисления  $\Pi_0 z(\tau)$  находится решение уравнения (30), удовлетворяющее условиям

$$d\Pi_2 y/d\tau(0) = 0, \quad \Pi_2 y|_{\tau \rightarrow \pm\infty} = 0:$$

$$\Pi_2 y(\tau) = \frac{1}{D_\lambda} \int_0^\tau d\eta \int_0^\eta \chi \Pi_0 \nu(\xi) - \Pi_0 z(\xi) d\xi,$$

где

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{(\tau_\nu \omega_0^+ - \overline{Q}_\nu^{(\nu)}) \overline{Q}_{\nu\lambda}^{(\lambda)} + \overline{Q}_{\nu\nu}^{(\lambda)} \overline{Q}_\nu^{(\lambda)}}{\overline{Q}_\nu^{(\nu)} - \tau_\nu \omega_0^+}.$$

При  $\tau \rightarrow \pm\infty$  получаем

$$\Pi_2 y(\tau) \sim (\chi - \overline{Q}_\nu^{(\lambda)}) \frac{C}{p^2 D_\lambda} e^{-p|\tau|}.$$

Теперь можно выписать главные члены наиболее опасных возмущений с точки зрения потери устойчивости контрастной структуры:

$$\begin{pmatrix} \delta\lambda \\ \delta\nu \end{pmatrix} \sim e^{\omega_0^+ t} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{l}} \\ \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\overline{Q}_\nu^{(\lambda)}}{\tau_\nu \omega_0^+ - \overline{Q}_\nu^{(\nu)}} + \Pi_0 z \left( \frac{x-x_*}{\epsilon} \right) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что возмущение медленной переменной не имеет до первого порядка включительно пограничной части (П– функции для  $\delta\lambda$  начинаются с члена  $\sim \epsilon^2$ ).

Безразмерное значение параметра  $\omega_0^+$  представляется в виде

$$\sqrt{\tau_\lambda \tau_\nu} \omega_0^+ = \frac{1}{2} (\Theta + \sqrt{\Theta^2 - 4\Delta}),$$

где  $\Theta \equiv \sqrt{\tau_\nu/\tau_\lambda} Q_\lambda^{(\lambda)} + \sqrt{\tau_\lambda/\tau_\nu} Q_\nu^{(\nu)}$ . В том случае, когда  $\omega_0^+ < 0$ , т.е. решение  $\lambda = \lambda(x), \nu = \nu(x)$  является асимптотически устойчивым, с помощью  $\omega_0^+$  можно получить нулевое приближение для времени релаксации жидкости к распределению типа контрастной структуры:

$$\tau \sim -\frac{1}{\omega_0^+}.$$

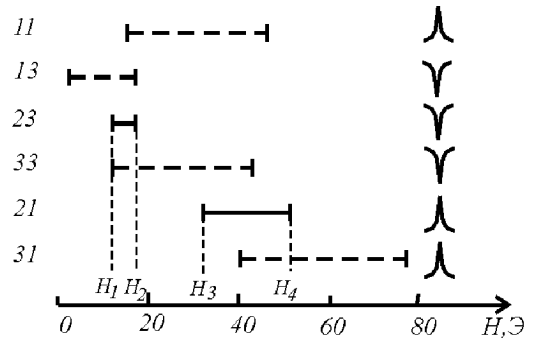


Рис. 5. Интервалы значений  $H$ , при которых в магнитной жидкости существуют контрастные структуры

Эта величина совпадает с временем релаксации жидкости к однородному равновесному состоянию  $(\lambda_\epsilon, \nu_\epsilon)$  [4].

При  $\omega_0^+ > 0$  контрастные структуры, так же как соответствующие им однородные равновесные состояния жидкости, являются неустойчивыми. Величина

$$\tau^{(0)} \sim \frac{1}{\omega_0^+}$$

в этом случае характеризует "время жизни" таких состояний. Значение  $\tau^{(0)}$  может изменяться в широких пределах и при некоторых  $H$  существенно превышает характерные времена  $\tau_\lambda, \tau_\nu$  [4].

На рис. 5 представлены интервалы изменения напряженности магнитного поля, в которых в рассматриваемой среде существуют распределения типа контрастных структур. Слева указан номер ветви кривой намагничивания, а справа – вид зависимости  $\gamma(x)$  в слое жидкости. Сплошной линией выделены интервалы, в которых неоднородные состояния жидкости асимптотически устойчивы, они представляют собой стационарные диссипативные структуры; штриховой линией обозначены интервалы, в которых неоднородные состояния жидкости неустойчивы. Результаты приведены для среды, параметры которой принимают значения, указанные в подписях к рис. 1, 2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магнитная жидкость, покоящаяся между двумя параллельными немагнитными пластинами в постоянном однородном магнитном поле, имеет множество стационарных состояний: однородных и неоднородных. В том случае, когда коэффициент диффузии параметра эффективного магнитно-



го поля значительно превышает коэффициент диффузии среднего числа частиц в агрегатах, неоднородные состояния представляют собой контрастные структуры. Соответствующие им распределения параметров жидкости являются однородными всюду, за исключением тонких слоев – страт или доменов, в которых намагниченность и среднее число частиц в агрегатах существенно отличаются от намагниченности и среднего числа частиц в агрегатах во всем остальном объеме жидкости. Существуют интервалы значений напряженности магнитного поля, зависящие от параметров жидкости, для каждого из которых однородные состояния  $(\lambda_e, \nu_e)$ , а также контрастные структуры  $\lambda = \lambda(x)$ ,  $\nu = \nu(x)$  с разным числом равномерно расположенных на отрезке  $0 \leq x \leq l$  точек "всплеска" и одинаковым значением величины "всплеска"  $S$  асимптотически устойчивы. Реализация одного из указанных состояний зависит от начального распределения параметров  $\lambda = \lambda_0(x)$  и  $\nu = \nu_0(x)$ , а именно, от того, области влияния какого из них принадлежат функции  $\lambda = \lambda_0(x)$  и  $\nu = \nu_0(x)$ . С ростом толщины слоя происходит увеличение числа устойчивых неоднородных распределений и усложнение структур в объеме жидкости. Время релаксации жидкости к устойчивой структуре в нулевом приближении совпадает с временем релаксации к однородному равновесному состоянию и не зависит от величины "всплеска."

При определенных значениях  $H$  магнитная жидкость под действием конечных возмущений может переходить из устойчивого однородного магнитного состояния в устойчивое неоднородное состояние и сохранять это новое состояние длительное время (теоретически – бесконечно долго). При тех же значениях  $H$  в объеме жидкости могут возникать и другие неоднородные распределения намагниченности, выход на которые происходит с других начальных условий. Одновременно с этим

магнитная жидкость обладает множеством неоднородных распределений  $M(x)$ , которые являются неустойчивыми, но могут существовать достаточно долго. Кроме того, как было показано ранее [4], в тех же магнитных полях для рассматриваемой жидкости характерны нестационарные структуры типа волн переключения.

Полученные результаты описывают процессы структурирования магнитной жидкости в постоянном однородном магнитном поле, которые происходят в магнитожидкостных технических устройствах и наблюдаются в экспериментах.

1. Пацегон Н.Ф. Некоторые процессы самоорганизации в намагничивающихся средах // Магнитная гидродинамика.– 1993.– N 1.– С. 13-23.
2. Малинецкий Г.Г. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику.– М.: Эдиториал УРСС, 2002.– 256 с.
3. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. О равновесной намагниченности магнитной жидкости // Магнитная гидродинамика.– 1996.– Т. 32. - N 3.– С. 323-330.
4. Пацегон Н.Ф., Попова Л.Н. Волновые структуры в магнитной жидкости // Прикладная гидромеханика.– 2000.– N 4, Т. 2(74).– С. 58-66.
5. Такетоми. Магнитные жидкости.– М.: Высшая школа, 1990.– 208 с.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.– М.: Высшая школа, 1990.– 208 с.
7. Ivanov A.O. Aggregates in magnetic fluids: droplets, chains and fractal clusters// Eighth Intern. Conf. on Magnetic Fluids, June 29 - July 3, 1998. Timisoara, Romania. Abstracts. - P. 262-263.
8. Горобец Ю.И., Ильчишин О.В., Макляк И.М. Особенности процесса структурообразования в пленках ферромагнитной жидкости // Магнитная гидродинамика.– 1988.– N 4.– С. 44-48.
9. Hayes C.F. Observation of association in a ferromagnetic colloid // J.Colloid Interf. sci.– 1975.– Vol. 52. - No. 2.– P. 239-243.