

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 534.08.620.178.5

Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщение 1. Существующие и предлагаемый методы решения

В. В. Матвеев

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Анализируются известные аналитические методы и результаты исследования колебаний упругих тел с билинейной асимметричной характеристикой восстанавливающей силы, моделирующей поведение локальной несплошности материала типа закрывающейся трещины усталости. Предложен приближенный аналитический метод определения вибродиагностических параметров колебательного процесса рассматриваемой нелинейной системы в области слабых супергармонических резонансов.

Ключевые слова: вынужденные колебания, нелинейные колебания, высшие гармоники, основной и супергармонические резонансы, билинейная характеристика восстанавливающей силы, трещина усталости, вибродиагностика усталостного повреждения.

Введение. Одним из весомых, но менее исследованным вибродиагностическим признаком нарушения сплошности материала упругого тела типа закрывающейся трещины усталости нормального отрыва, которая при циклическом деформировании тела на полупереме одного знака раскрыта, а на полупереме другого – схлопнута, т.е. закрыта, и тело ведет себя как сплошное, является обусловленное нелинейностью колебательной системы искажение гармоничности колебательного процесса.

В качестве индикаторов повреждения, более существенно проявляющихся при резонансных режимах колебаний, рассматриваются параметры спектрального анализа – постоянная составляющая и амплитуды высших гармоник [1–13], а также такие нелинейные эффекты, как суб- и супергармонические резонансы [5, 7, 10, 11, 14–17], из которых наиболее представительными считаются последние. Супергармонические резонансы возбуждаются при значительно меньшей нелинейности, чем субгармонические, и ориентация на суперрезонансный метод изначально предопределяет высокую чувствительность к возникновению повреждения, которая более чем в десять раз превышает чувствительность традиционных частотно-резонансных подходов и исключает необходимость проведения весьма трудоемкой процедуры паспортизации резонансных частот диагностируемой конструкции [16, 17].

Вопросы практической диагностики требуют проведения предварительных исследований для установления соответствующих соотношений между указанными параметрами и эффектами нелинейности и параметрами трещин, т.е. их размерами и местом расположения.

Естественное стремление найти определяющие соотношения в явном виде встречает определенные трудности, что связано в основном со сложностью аналитического решения задачи о вынужденных колебаниях таких нелинейных систем.

Анализ существующих методов и результатов исследований. Для установления рассматриваемых диагностических параметров непригодны методы линеаризации, которые позволяют определять эквивалентную собственную частоту и амплитуду моногармонических колебаний системы.

Упругое тело при условии относительно малых размеров трещины, позволяющем пренебречь некоторым различием между формами колебаний на полупериодах деформирования разного знака, можно представить для заданной собственной формы его колебаний механической моделью системы с одной степенью свободы (рис. 1, а), вынужденные колебания которой описываются дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]u = q_0 \sin vt. \quad (1)$$

Здесь ω – собственная частота колебаний неповрежденного тела; α – параметр, интегрально характеризующий относительное изменение жесткости тела,

$$\alpha = \frac{K - K_T}{K}, \quad K_T < K, \quad (2)$$

где K – жесткость тела с закрытой трещиной, которая принимается равной жесткости неповрежденного тела (в данном случае на полупериоде $u < 0$); K_T – жесткость тела с открытой трещиной ($u > 0$).

Примеры определения параметра α для стержневых элементов с трещиной нормального отрыва при продольных и изгибных колебаниях рассмотрены ранее [5, 18].

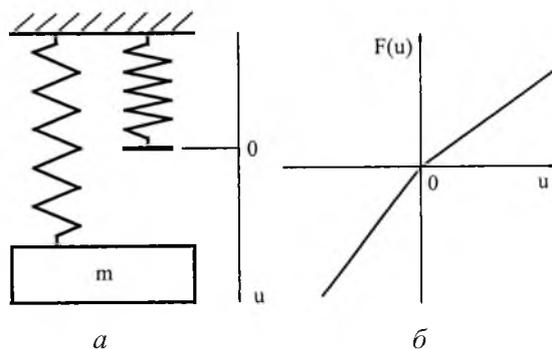


Рис. 1. Модель колебательной системы с трещиной нормального отрыва.

Модель упругого тела с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы $F(u)$ – рис. 1,б представляет специфический класс нелинейных систем, относящихся к существенно нелинейным, но точно интегрируемым системам [19].

Для случая свободных колебаний ($q_0 = 0$) известно простое аналитическое решение уравнения (1), соответствующее методу приспособывания при начальных условиях $u(0) = 0$ и $\dot{u}(0) = v_0$ [1, 19]:

$$u(t) = p(t)g(t). \quad (3)$$

Здесь

$$p(t) = e^{-ht};$$

$$g(t) = \begin{cases} \frac{v_0}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t, & -\frac{\pi}{\bar{\omega}} \leq t \leq 0; \\ \frac{v_0}{\bar{\omega}_T} \sin \bar{\omega}_T t, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\bar{\omega}_T}, \end{cases}$$

где $\bar{\omega}$ – частота свободных колебаний неповрежденного тела, $\bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - h^2}$; $\bar{\omega}_T$ – частота свободных колебаний тела с открытой трещиной, $\bar{\omega}_T = \sqrt{\omega_T^2 - h^2}$.

Период свободных колебаний упругого тела с закрывающейся несплошностью находится как сумма полупериодов

$$\bar{T}_0 = \frac{\pi}{\bar{\omega}} + \frac{\pi}{\bar{\omega}_T}$$

и соответственно частота свободных колебаний

$$\bar{\omega}_0 = \frac{2\pi}{\bar{T}_0} = \frac{2\bar{\omega}\bar{\omega}_T}{\bar{\omega} + \bar{\omega}_T}.$$

Если пренебречь влиянием параметра h на частоту колебаний, то собственная частота тела с закрывающейся трещиной будет равна

$$\omega_0 = \frac{2\omega\omega_T}{\omega + \omega_T}. \quad (4)$$

Принимая во внимание, что $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ и $\omega_T = \sqrt{\frac{K_T}{m}}$ (m – приведенная масса), выражение (4) с учетом (2) можно преобразовать к виду

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}} \omega. \quad (5)$$

Решение вида (3) удовлетворяет условию Дирихле и допускает разложение в ряд Фурье. Для удобства дальнейшего анализа значения коэффициентов Фурье, приведенные в [13] при $h = 0$, представим по отношению к амплитуде первой синусоидальной гармоники и выразим через параметр α [3]. Тогда

$$g(t) = A_1 \left[\sin \omega_0 t + b_1 \cos \omega_0 t + a_0 + \sum_{n=2,3,\dots} (b_n \cos n\omega_0 t + a_n \sin n\omega_0 t) \right], \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{(Q^2 - 1)(R^2 - 1)}{Q^2 R^2 \sin \frac{\pi}{Q}}; & a_n &= \frac{(Q^2 - 1)(R^2 - 1)}{(Q^2 - n^2)(R^2 - n^2)}; \\ b_n &= \frac{(Q^2 - 1)(R^2 - 1) \left[1 + \cos \frac{n\pi}{Q} \right]}{(Q^2 - n^2)(R^2 - n^2) \sin \frac{n\pi}{Q}}; \\ Q &= \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha}}{2}; & R &= \frac{Q}{\sqrt{1 - \alpha}}. \end{aligned} \quad (7)$$

При значениях $\alpha \leq 0,01$, представляющих интерес для диагностики ранних стадий развития трещин, имеем $b_1 \leq 0,011$, и основная гармоника фактически определяется амплитудой A_1 при синусоиде. Из высших гармоник наиболее значима вторая с определяющей амплитудой, как и для остальных четных гармоник при косинусоиде. Для нечетных гармоник определяющими являются амплитуды при синусоиде, однако их величина существенно меньше амплитуд четных гармоник. Так, $a_3/b_2 \leq 0,0011$, $a_5/b_2 \leq 0,00012$ при $a_5/b_2 \leq b_4/b_2 \leq 0,02$.

Таким образом, для практического использования выражение (6) можно упростить, приняв

$$g(t) = A_1 \left[\sin \omega_0 t + a_0 + \sum_{n=2,4,\dots} b_n \cos n\omega_0 t \right]. \quad (8)$$

Однако в случае исследования вынужденных колебаний использование метода припасовывания, как показано в работе [19], значительно усложняется. Нахождение периодического решения требует априори задавать последовательность прохождения системой отдельных участков нелинейной упругой характеристики, т.е. областей с жесткостью K и K_T (рис. 1,б), и, как правило, сводится к достаточно сложным и громоздким системам трансцендентных уравнений, не относящихся к категории удобных для анализа и требующих численного решения. Получаемые в конечном итоге соотношения справедливы только при оговоренной последовательности прохожде-

ния системой таких участков, а полный анализ поведения системы требует рассмотрения всех возможных типов решения и определения областей существования каждого из них.

Для установления параметров вынужденных колебаний широко используется метод построения решения в рядах Фурье [19–22], который при более простых подходах обеспечивает получение приближенных решений с необходимой точностью. Метод с успехом применяется также при анализе суб- и супергармонических резонансов. Однако, как и для получения точного решения, необходимо предварительно выбрать возможную последовательность прохождения системой отдельных участков упругой характеристики и в соответствии с ней описать нелинейную функцию восстанавливающей силы. Решение, представляемое в виде полного ряда Фурье, подставляется в исходное дифференциальное уравнение (1) при восстанавливающей силе, которая записана согласно принятому характеру движения, определяющему моменты переключения жесткости системы.

Составленные уравнения энергетического баланса и уравнения, представляющие запись решения для моментов переключения жесткости, являются полной системой уравнений для нахождения амплитуд гармонических составляющих решения, произвольно выбранного сдвига фазы возмущающей силы и угла, определяющего моменты переключения жесткости системы. В полученные уравнения искомые амплитуды гармоник входят линейно. Однако ввиду относительной громоздкости уравнений их решение практически возможно только при использовании ЭВМ и ограничении количества учитываемых гармоник. Так, приведенные в [19, 20] резонансные кривые основного и супергармонических резонансов 2- и 3-го порядков для случая $h=0$ вычислялись при учете лишь первых трех членов решения. Чтобы ответить на вопрос физической реализуемости тех или иных периодических решений, необходимо проанализировать их устойчивость.

Несколько иной вариант приближенного аналитического решения рассмотрен в работах [10, 11], где первоначально отыскивается трехчленное периодическое решение. Исходное дифференциальное уравнение, аналогичное (1), путем замены переменной $u(t)$ при разложении несимметричной восстанавливающей силы в ряд Фурье приводится к нелинейному уравнению с переменными коэффициентами. Переменная $u(t)$ представляется суммой, состоящей из решения линейного уравнения с эквивалентной собственной частотой (4) и с корректируемым впоследствии сдвигом фазы и новой переменной $y(\tau)$ с независимой переменной $\tau = \omega_1 t$. Затем в окрестности частот, удовлетворяющих приближенно условию $\omega_0 = n\omega_1$ ($n=1, 2, 3, \dots$), отыскивается приближенное резонансное решение в виде постоянной составляющей A_{0n} , n -й гармоники с амплитудой A_n и сдвигом фазы γ_n . Параметры A_{0n} , A_n и γ_n этого решения приближенно вычисляются из составляемых уравнений гармонического баланса с разложением в ряд Фурье ранее полученных выражений коэффициентов Фурье при разложении восстанавливающей силы. Получаемая система трех трансцендентных уравнений решается для фиксированного значения n . Неаналитичность подынтегральных выражений коэффициентов разложения в двойной ряд Фурье не позволяет найти явные выражения для искомых параметров. Вы-

полненные в [10, 11] численно-аналитические исследования при значении $\omega_0 = 1$ показали, что слабый резонанс (амплитуда второй гармоники A_2 меньше амплитуды первой A_1) наступает при $\frac{K - K_T}{2hK} \approx 1...5$ [11], т.е. когда $\alpha/h \approx 2...10$.

Известны попытки найти замкнутое решение уравнения вынужденных колебаний (1). Так, в [23] значение скачкообразно изменяющегося квадрата собственной частоты колебательной системы $\omega^2(t) = \omega^2[1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]$ выражалось через функции единичных прямоугольных импульсов $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$: $\omega^2(t) = \omega^2\phi_1(t) + \omega_T^2\phi_2(t)$. Прямоугольные импульсы длительностью π/ν и частотой следования, равной частоте ν вынуждающей силы, сдвинуты по фазе для одной функции относительно другой на угол π/ν , равный половине периода вынуждающей силы. Решение уравнения (1) при $h = 0$ и начальных условиях $u(0) = \dot{u}(0) = 0$ представлялось в виде суммы независимых решений уравнения при $\omega^2(t) = \omega^2\phi_1(t)$ и $\omega^2(t) = \omega_T^2\phi_2(t)$ с последующим разложением функций $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ в ряд Фурье. При этом решение рассматривается в предположении $\nu \ll \omega_T$. Это условие приемлемости использования данного метода решения конкретизируется в [7] значением $\nu/\omega_0 < 1/5...1/6$.

В работах [22, 24] решение уравнения (1) также представляется в виде двух стационарных решений для полупериодов разного знака, т.е. решений линейных вариантов уравнения (1) при собственной частоте ω и ω_T , которые в отличие от решений для случая свободных колебаний (3) не припасованы по скорости в момент изменения знака перемещения. Полученное для периода $T = 2\pi/\omega_0$ решение раскладывается в ряд Фурье с определением амплитуд гармонических составляющих. Такое решение обуславливает не соответствующее действительности наличие двух резонансных частот ω и ω_T и не выявляет нелинейные резонансы.

Функция прямоугольных импульсов $\phi(t)$ применялась также в работе [25] при исследовании вынужденных колебаний консольного стержня с краевой закрывающейся трещиной с использованием метода конечных элементов и метода гармонического баланса. Процесс открытия-закрытия трещины моделировался функцией прямоугольных импульсов $\phi(t)$. Эта функция определяет изменение жесткости конечного элемента с трещиной с периодом следования импульсов, также равным периоду гармонической вынуждающей силы. Для того чтобы применить далее метод гармонического баланса, функцию $\phi(t)$ и искомое решение для рассматриваемой балки как системы с конечным числом степеней свободы представляли в виде рядов Фурье. Такой подход весьма эффективен для быстрого вычисления гармоник отклика системы. Аналогичные подходы к моделированию трещины использовались в [26, 27]. Однако в [7] было показано, что предложенная в [25] модель трещины неверно описывает поведение колебательной системы, особенно в области супергармонических резонансов, когда система может изменять свою жесткость более чем один раз за период колебаний. Особенно значимое отличие результатов [25] от решения, полученного прямым численным интегрированием, наблюдается при частотах возбуждения,

близких к $1/2\omega_0$, $1/4\omega_0$ и т.д., когда весьма значительны амплитуды соответствующих супергармоник. Так, например, если $\nu = 1/2\omega_0$, то отклик системы должен содержать гармоники с частотой $1/2\omega_0$, ω_0 и т.д., а функция прямоугольных импульсов не содержит гармоники с частотой $2\nu = \omega_0$.

Наряду с поиском приближенных аналитических решений для определения параметров супергармонического резонанса используется также метод электрического моделирования. Так, в работе [17] приводятся результаты исследования на электрической модели супер- и субгармонических колебаний стержня при наличии трещины. Было также установлено [16], что наиболее интенсивным из супергармонических резонансов является резонанс порядка $2/1$, а из субгармонических – порядка $1/2$. Если первый проявляется при любом сколь угодно малом значении параметра α , то второй оказывается возможным лишь при определенной его величине.

Рассмотренные приближенные аналитические методы не позволяют получить выражения для диагностических параметров в явном виде, за исключением случая свободных колебаний (6), (7). Однако при условии слабой нелинейности колебательной системы ($\alpha < 0,3$) можно, используя асимптотический метод нелинейной механики, найти в явном виде приближенные выражения амплитуд гармонических составляющих колебательного процесса как для свободных колебаний, так и для основного резонанса ($\nu \approx \omega$) [2].

Представляя восстанавливающую силу в виде

$$F(u) = \omega^2 \left[u + \varepsilon f \left(u, \frac{du}{dt} \right) \right], \quad (9)$$

где

$$\varepsilon f \left(u, \frac{du}{dt} \right) = -0,5\alpha(1 + \text{sign } u)u, \quad (10)$$

получаем решение уравнения (1) во втором приближении:

$$u = A \sin \varphi + \varepsilon u_1(A, \varphi). \quad (11)$$

Амплитуда A и фаза $\varphi = \nu t + \gamma$ определяются из уравнений первого приближения:

$$\frac{dA}{dt} = \varepsilon B_1(A) - \frac{\varepsilon q_0 \sin \gamma}{\omega + \nu}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon D_1(A) + \frac{\varepsilon q_0 \cos \gamma}{(\omega + \nu)A}, \quad (12)$$

а периодическая функция угла φ с периодом 2π второго приближения $\varepsilon u_1(A, \varphi)$ – из выражения

$$\varepsilon u_1(A, \varphi) = -g_0(A) + \sum_{n=2,3,\dots} \frac{g_n(A) \cos n\varphi + p_n(A) \sin n\varphi}{n^2 - 1}. \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 B_1(A) &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(A, \varphi) \sin \varphi d\varphi; & D_1(A) &= \frac{\omega}{2\pi A} \int_0^{2\pi} f_0(A, \varphi) \cos \varphi d\varphi; \\
 g_0(A) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_0(A, \varphi) d\varphi; & g_n(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(A, \varphi) \cos n\varphi d\varphi; \\
 p_n(A) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_0(A, \varphi) \sin n\varphi d\varphi,
 \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$f_0(A, \varphi) = f(A \sin \varphi) = -0,5\alpha A [1 + \text{sign}(\sin \varphi)] \sin \varphi. \tag{15}$$

Подставляя (15) в выражение для $D_1(A)$, получаем $D_1(A) = -0,25\alpha\omega$.

Принимая для режима резонанса $\gamma = -\pi/2$ и учитывая, что при $\nu = \omega_0$ $d\varphi/dt = \omega_0$, из второго выражения (12) находим приближенное значение частоты собственных колебаний тела с закрывающейся трещиной

$$\omega_0 = (1 - 0,25\alpha)\omega, \tag{16}$$

которое при $\alpha < 0,25$ отличается от полученного по формуле (5) значения менее чем на 1%.

Подставив (15) в выражения (14), после интегрирования в соответствии с (11) и (13) найдем полное решение во втором приближении:

$$u = A \left[\sin \varphi + a_0 + \sum_{n=2,4,\dots} a_n \cos n\varphi \right], \tag{17}$$

где

$$a_0 = \frac{A_0}{A_1} = \frac{\alpha}{\pi}; \quad a_n = \frac{A_n}{A_1} = \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2}; \quad A_1 \equiv A. \tag{18}$$

Значения полученных явных выражений для относительных величин постоянной составляющей a_0 и высших гармоник a_n (18) при $\alpha < 0,1$ отличаются от более точных значений (7) менее чем на 5% и соответствуют как стационарному режиму свободных колебаний ($q = h = 0$), так и режиму основного резонанса ($\nu = \omega_0$).

Приближенный аналитический метод определения диагностических параметров при супергармоническом и основном резонансах. Рассматривая нелинейную математическую модель упругого тела (1) с асимметричной билинейной упругой характеристикой при синусоидальном внешнем воздействии с частотой ν , будем учитывать характерную особенность нелинейной системы, заключающуюся в возможности возникновения наряду с основным резонансом супергармонического резонанса s -го порядка, когда $\nu = \omega_0/s$ ($s = 2, 3, \dots$). Полагаем, что при $\nu \approx \omega_0/s$ кроме основной

(первой) гармоники $A_1 \sin(\nu t + \gamma_1)$, относительная амплитуда которой соответствует решению вынужденных колебаний линейной системы с собственной частотой (5)

$$\frac{A_1}{q_0} = \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \frac{1}{\omega^2 \sqrt{\left[1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^4}{4(1 - \alpha)^2} \left(\frac{h}{\omega}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2}}, \quad (19)$$

возникают колебания со спектром гармонических составляющих при основном резонансе (17), (18), т.е. соответствующим спектру свободных колебаний.

Таким образом, решение уравнения (1) в области супергармонического резонанса s -го порядка отыскиваем в виде

$$u(t) = A_0 + A_1 \sin(\nu t + \gamma_1) + A_s \left[\sin(s\nu t + \gamma_s) + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2} \sin n(s\nu t + \gamma_s) \right], \quad (20)$$

где A_0 – постоянная составляющая, значение которой согласно (18) пропорционально амплитуде первой гармоники,

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} A_1. \quad (21)$$

Следует заметить, что выбранное значение A_0 мало отличается от полученного в [12] при нахождении решения уравнения (1) в приближении основной гармоники методом гармонического баланса, которое в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$A_0 = \frac{2\alpha}{(2 - \alpha)\pi} A_1.$$

Для определения неизвестных параметров A_s , γ_1 и γ_s используем описанный ранее [5] подход, суть которого заключается в том, что решение (20) подставляется в уравнение (1) в моменты времени t_i , когда знак перемещения $u(t_i)$, определяющий значение упругой характеристики, заведомо известен. В отличие от [5], сдвиг фазы γ_s также подлежит определению. Выбрав необходимое количество таких характерных моментов времени t_i за один период основной (первой) гармоники и потребовав выполнения уравнения (1) в эти моменты, получим систему уравнений для определения искомых параметров.

Рассмотрим наиболее важный с точки зрения диагностики усталостного повреждения вариант соотношения амплитуд гармонических составляющих, когда $A_s < A_1$ (рис. 2), т.е. случай слабого резонанса. В качестве характерных моментов времени примем

$$\begin{aligned} t'_1 &= \frac{\beta - \gamma_1}{\nu}; & t''_1 &= \frac{\pi - (\beta + \gamma_1)}{\nu}; \\ t'_2 &= \frac{\pi + (\beta - \gamma_1)}{\nu}; & t''_2 &= \frac{2\pi - (\beta + \gamma_1)}{\nu}, \end{aligned} \quad (22)$$

которым на первой гармонике соответствуют точки I' , I'' , $2'$, $2''$ (рис. 2).

Значение угла β в (22), т.е. фазы первой гармоники ($\beta = \nu t + \gamma_1$), соответствует условию

$$A_1 \sin \beta \geq A_s \quad (23)$$

и может выбираться в интервале $\beta_0 \leq \beta \leq \pi/2$, где β_0 отвечает условию $A_1 \sin \beta_0 = A_s$.

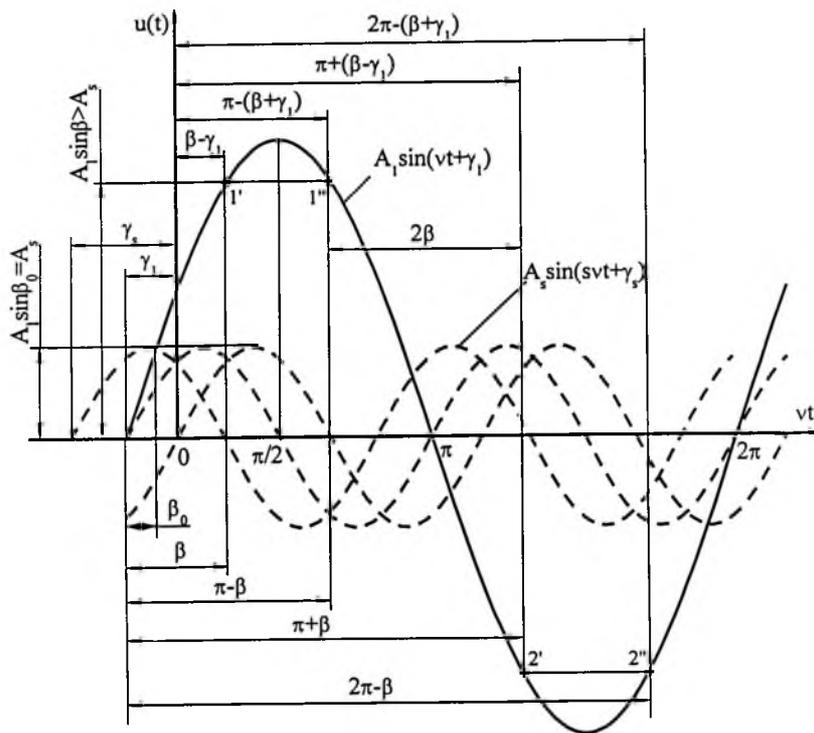


Рис. 2. Основные гармоники колебательного процесса.

Как видно, согласно принятому закону изменения восстанавливающей силы (9) точки I' и I'' , для которых $u(t_i) > 0$, определяют ее значение $(1 - \alpha)\omega^2 u$, точки $2'$ и $2''$ — $\omega^2 u$. Подставляя для выбранных моментов времени решение (20) в уравнение (1) с учетом указанного значения восстанавливающей силы, получаем две пары исходных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & (1-\alpha)A_0 + \left\{ \left[(1-\alpha) - \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \beta \pm 2h \frac{\nu}{\omega^2} \cos \beta \right\} A_1 + \\
 & + \left\{ (\pm 1)^{s-1} \left[(1-\alpha) - \left(\frac{s\nu}{\omega} \right)^2 \right] [\sin s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) \pm \cos s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1)] + \right. \\
 & \left. + (\pm 1)^s 2h \frac{s\nu}{\omega^2} [\cos s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) \mp \sin s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1)] \pm \right. \\
 & \left. \pm \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{(1-\alpha) - n^2 \left(\frac{s\nu}{\omega} \right)^2}{(n^2 - 1)^2} [\cos ns\beta \cos n(\gamma_s - s\gamma_1) \mp \sin ns\beta \sin n(\gamma_s - s\gamma_1)] \mp \right. \\
 & \left. \mp \frac{4\alpha}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{hn \frac{s\nu}{\omega^2}}{(n^2 - 1)^2} [\sin ns\beta \cos n(\gamma_s - s\gamma_1) \pm \cos ns\beta \sin n(\gamma_s - s\gamma_1)] \right\} A_s =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{q_0}{\omega^2} (\sin \beta \cos \gamma_1 \mp \cos \beta \sin \gamma_1); \quad (I', I'')$$

$$\begin{aligned}
 & A_0 - \left\{ \left[1 - \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \beta \pm 2h \frac{\nu}{\omega^2} \cos \beta \right\} A_1 - \\
 & - \left\{ (\mp 1)^{s-1} \left[1 - \left(\frac{s\nu}{\omega} \right)^2 \right] [\sin s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) \pm \cos s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1)] - \right. \\
 & \left. - (\mp 1)^s 2h \frac{s\nu}{\omega^2} [\cos s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) \mp \sin s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1)] - \right. \\
 & \left. - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{1 - n^2 \left(\frac{s\nu}{\omega} \right)^2}{(n^2 - 1)^2} [\cos ns\beta \cos n(\gamma_s - s\gamma_1) \mp \sin ns\beta \sin n(\gamma_s - s\gamma_1)] \pm \right. \\
 & \left. \pm \frac{4\alpha}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{hn \frac{s\nu}{\omega^2}}{(n^2 - 1)^2} [\sin ns\beta \cos n(\gamma_s - s\gamma_1) \pm \cos ns\beta \sin n(\gamma_s - s\gamma_1)] \right\} A_s = \\
 & = -\frac{q_0}{\omega^2} (\sin \beta \cos \gamma_1 \mp \cos \beta \sin \gamma_1). \quad (2', 2'')
 \end{aligned}$$

Для удобства дальнейшего анализа приведенные уравнения пронумерованы в соответствии с обозначением точек на первой гармонике. Здесь верхние знаки относятся к уравнениям (1'), (2'), нижние – к (1''), (2''). Далее будем использовать выражения этих уравнений при замене тригонометрических функций угла β их средними значениями на интервале изменения угла β от β_0 до $\pi/2$:

$$\begin{aligned}
 (\sin N\beta)_{\text{cp}} &= \frac{2 \int_{\beta_0}^{\pi/2} \sin N\beta d\beta}{\pi - 2\beta_0} = -\frac{2(\cos N \pi/2 - \cos N\beta_0)}{N(\pi - 2\beta_0)}; \\
 (\cos N\beta)_{\text{cp}} &= \frac{2 \int_{\beta_0}^{\pi/2} \cos N\beta d\beta}{\pi - 2\beta_0} = \frac{2(\sin N \pi/2 - \sin N\beta_0)}{N(\pi - 2\beta_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Указанные средние значения будем обозначать чертой снизу.

Произведя почленное алгебраическое суммирование уравнений (1')–(1'') + (2')–(2''), получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 &\left[1 - \left(\frac{sv}{\omega} \right)^2 \right] [2 + (-1)^s - (-1)^{s-1}] \underline{\sin} s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) - \\
 &- \alpha \{ [1 - (-1)^{s-1}] \underline{\sin} s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) + [1 + (-1)^{s-1}] \underline{\cos} s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1) \} - \\
 &- 4h \frac{sv}{\omega^2} [1 + (-1)^s] \underline{\sin} s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1) - \frac{4\alpha}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \times \\
 &\times \left\{ \left[(2 - \alpha) - 2n^2 \left(\frac{sv}{\omega} \right)^2 \right] \sin n(\gamma_s - s\gamma_1) + 4hn \frac{sv}{\omega^2} \cos n(\gamma_s - s\gamma_1) \right\} \underline{\sin} ns\beta = 0,
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

которое не содержит искомым параметров A_0 и A_s и может быть использовано для определения сдвига фазы $\gamma_s - s\gamma_1$.

В результате почленного сложения уравнений (1') + (1'') + (2') + (2'') получим уравнение, которое при известном значении отношения A_0/A_1 и найденном из (25) сдвиге фазы $\gamma_s - s\gamma_1$ определяет при условии $\sin \beta_0 \approx \approx A_s/A_1$ основной диагностический параметр:

$$\frac{A_s}{A_1} = -2 \left[(2 - \alpha) \frac{A_0}{A_1} - \alpha \underline{\sin} \beta \right] \left\langle \left[1 - \left(\frac{sv}{\omega} \right)^2 \right] \times \right.$$

$$\left. \times [2 + (-1)^s - (-1)^{s-1}] \underline{\cos} s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1) - \alpha \{ [1 + (-1)^{s-1}] \underline{\sin} s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + [1 - (-1)^{s-1}] \cos s\beta \sin(\gamma_s - s\gamma_1) \} + 4h \frac{s\nu}{\omega^2} [1 + (-1)^s] \cos s\beta \cos(\gamma_s - s\gamma_1) + \\
 & + 2 \sum_{n=2,4,\dots} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2} \left\{ \left[(2 - \alpha) - 2n^2 \left(\frac{s\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos n(\gamma_s - s\gamma_1) - \right. \\
 & \left. - 4hn \frac{s\nu}{\omega^2} \sin n(\gamma_s - s\gamma_1) \right\} \cos ns\beta \}^{-1}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

При известных значениях A_1/q_0 и A_s/A_1 сдвиг фазы γ_1 основной гармоники определяется из баланса подводимой ΔW_{q_0} и поглощаемой ΔW_h за цикл колебаний энергий. Для рассматриваемого случая моногармонического возбуждения и вязкого трения исследуемой системы имеем

$$\Delta W_{q_0} = -\pi q_0 A_1 \sin \gamma_1; \quad (27)$$

$$\Delta W_h = 2\pi h\nu \left\{ 1 + s^2 \left[1 + \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^2 \sum_{n=2,4,\dots} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^4} \right] \left(\frac{A_s}{A_1} \right)^2 \right\} A_1^2. \quad (28)$$

Из условия $\Delta W_{q_0} = \Delta W_h$ при учете (19) находим

$$\sin \gamma_1 = - \frac{\frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{2(1 - \alpha)} h\nu \left\{ 1 + s^2 \left[1 + 4 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 \sum_{n=2,4,\dots} \frac{n^2}{(n^2 - 1)^4} \right] \left(\frac{A_s}{A_1} \right)^2 \right\}}{\sqrt{\left[1 - \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^2}{4(1 - \alpha)} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right]^2 + \frac{(1 + \sqrt{1 - \alpha})^4}{4(1 - \alpha)^2} \left(\frac{h}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2}}}. \quad (29)$$

Зная $\operatorname{tg}(\gamma_s - s\gamma_1)$ и $\sin \gamma_1$, определяем сдвиг фазы

$$\gamma_s = \operatorname{arctg}(\gamma_s - s\gamma_1) + s \arcsin \gamma_1. \quad (30)$$

Заключение. Анализ известных аналитических методов нахождения периодических решений дифференциального уравнения вынужденных колебаний диссипативной системы с несимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, описывающего колебания упругого тела с “дышащей” несплошностью материала типа закрывающейся трещины усталости, свидетельствует о наличии значительных трудностей в получении удобных для анализа решений.

Системы сложных определяющих уравнений в конечном итоге требуют численного решения. Имеющиеся замкнутые решения не описывают или

искажают поведение системы в области нелинейных резонансов, а иногда искажают ее поведение и в области основного резонанса.

Представленный приближенный аналитический метод нахождения параметров искомого в виде определенного тригонометрического ряда решения основан на удовлетворении нелинейного дифференциального уравнения вынужденных колебаний в моменты известного значения билинейной характеристики восстанавливающей силы. Получены общие исходные уравнения для определения вибродиагностических параметров колебательного процесса в области слабого супергармонического резонанса s -го порядка.

Резюме

Проаналізовано відомі аналітичні методи і результати дослідження коливань пружних тіл із білінійною асиметричною характеристикою відновлювальної сили, що моделює поведінку локальної несучільності матеріалу типу тріщини втомленості, що закривається. Запропоновано наближений аналітичний метод визначення вібродіагностичних параметрів коливального процесу досліджуваної нелінійної системи в області слабких супергармонічних резонансів.

1. Карасев В. А., Ройтман А. Б. Доводка эксплуатируемых машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.
2. Матвеев В. В. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
3. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // Там же. – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.
4. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Там же. – № 3. – С. 5 – 23.
5. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. Некоторые аспекты колебаний упругого тела с “дышащей” несплошностью материала // Там же. – № 5. – С. 44 – 60.
6. Rivola A. and White P. R. Bispectral analysis of the bilinear oscillator with application to the detection of fatigue cracks // J. Sound Vibration. – 1998. – 216, No. 5. – P. 889 – 910.
7. Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D. Harmonik analysis of the vibrations of cantilevered beam with a closing crack // Comp. Struct. – 1996. – 61, No. 6. – P. 1057 – 1074.
8. Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // J. Sound Vibration. – 1998. – 213, No. 1. – P. 159 – 168.

9. Bouraou N. and Gelman L. Low-frequency vibro-acoustical method of forced oscillation // Computer Methods and Inverse Problems in Non-destructive Testing and Diagnostics. – Minsk, 1998. – P. 33 – 40.
10. Плахтиенко Н. П. К диагностике кусочно-постоянной жесткости при нелинейных резонансах // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 112 – 120.
11. Плахтиенко Н. П. Резонанс второго порядка пластины, содержащей протяженные дефекты целостности // Пробл. прочности. – 2001. – № 1. – С. 105 – 116.
12. Анпилогов Д. И. Постоянная составляющая колебаний поврежденной лопасти // Проблеми динаміки і міцності в газотурбобудуванні: Тези доп. міжнар. наук.-техн. конф. – Київ: Ін-т пробл. міцності НАН України, 2001. – С. 5 – 6.
13. Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б. Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 1. Малые колебания // Пробл. прочности. – 1999. – № 2. – С. 23 – 34.
14. Krawczuk M. and Ostachowicz W. Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements – a survey // J. Theor. Appl. Mech. – 1996. – 34, No. 2. – P. 307 – 326.
15. Cheng S. M., Swamidas A. S. J., Wu X. J., and Wallace W. Vibrational response of a beam with a breathing crack // J. Sound Vibration. – 1999. – 225, No. 1. – P. 201 – 208.
16. Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А. Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // Дефектоскопия. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.
17. Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М. Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Там же. – 1985. – № 3. – С. 77 – 82.
18. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 3. Аналитическое и численное определение собственных частот продольных и изгибных колебаний стержней с поперечными трещинами // Пробл. прочности. – 1999. – № 4. – С. 19 – 31.
19. Крюков Б. И. Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.
20. Maezawa S. Superharmonic resonance in piecewise-linear system with unsymmetrical characteristics // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. – Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970. – С. 401 – 422.
21. Maezawa S. and Furukawa S. Superharmonic resonance in piecewise-linear system // Bull. ISME. – 1973. – 16, No. 96. – P. 931 – 941.
22. Ройтман А. Б., Пылов А. А., Александрова Н. Б. Продольные колебания консольного стержня с поперечной трещиной. Сообщ. 2. Кусочно-линейная модель // Пробл. прочности. – 1999. – № 5. – С. 78 – 85.

23. *Chu Y. C. and Shen M.-H. H.* Analysis of forced bilinear oscillators and the application of cracked beam dynamics // *AIAA J.* – 1992. – **30**, No. 10. – P. 2512 – 2519.
24. *Ройтман А. Б., Александрова Н. Б., Христенко Т. А.* Вибрационная диагностика “дышащих” трещин в изделиях // *Техн. диагностика и неразрушающий контроль.* – 2000. – № 1. – С. 58 – 67.
25. *Krawczuk M.* Coupled longitudinal and bending forced vibration of Timoshenko cantilever beam with a closing crack // *Mech. Teoret. Stosowana.* – 1994. – **32**, No. 2. – P. 463 – 482.
26. *Abraham O. N. L. and Brandon J. A.* A piece wise linear approach for modelling of a breathing crack // *Proc. 17th Int. Seminar on Modal Analysis (Belgium, Leuven).* – 1992. – **1**. – P. 417 – 431.
27. *Shen M.-H. H. and Chu Y. C.* Vibrations of beams with a fatigue crack // *Comp. Struct.* – 1992. – **45**, No. 1. – P. 79 – 93.

Поступила 29. 10. 2003