

Нестационарні коливання елементів робототехнічних конструкцій з композиційних матеріалів

В. Г. Дубенець, О. В. Савченко, Є. О. Івашко

Чернігівський державний технологічний університет, Чернігів, Україна

Розглянуто вплив демпфірування на нестационарні коливання елементів маніпуляторів і механізмів із гнучкими ланками. Для аналізу нестационарних коливань при кінематичному збудженні використано частотний метод скінченних елементів, який базується на числовому інтегральному перетворенні Фур'є.

Ключові слова: робототехнічні конструкції, композиційні матеріали, метод скінченних елементів, нестационарні коливання, інтегральне перетворення Фур'є, демпфірування.

Вступ. Підвищення продуктивності робототехнічних пристроїв тісно пов'язане зі збільшенням швидкостей їх рухомих елементів. Однак збільшення швидкості у конструкціях із традиційних матеріалів із низьким відношенням жорсткості до ваги призводить до суттєвого підвищення інерційних сил і негативного впливу на міцність, знос у вузлах і точність позиціонування. Перспективним шляхом розв'язання цієї проблеми є використання композиційних матеріалів. Такі матеріали за високої питомої міцності мають високі показники розсіяння енергії, що може забезпечити затухання коливань, які виникають при нерівномірному русі елементів робототехнічних пристроїв. При цьому суттєво менша густина композитів знижує інерційні навантаження і дозволяє збільшити робочі швидкості.

Разом із тим використання композиційних матеріалів потребує розробки нових математичних моделей і методів розрахунку, що зумовлено як складністю структури, так і властивостями матеріалів, з яких складається композит. Так, для композитів на полімерній основі важливим є врахування спадкових властивостей, які забезпечують високий рівень розсіяння енергії. Як відомо, для моделювання структурно-неоднорідних конструкцій доцільно використовувати варіанти методу скінченних елементів. Однак у задачах динаміки це призводить до необхідності побудови окрім матриць жорсткості ще й матриць мас і демпфірування. Очевидно, що найбільш поширене припущення про пропорційність матриць демпфірування матрицям мас і жорсткості не можна вважати задовільним, оскільки воно не відображає реальних фізичних залежностей демпфірування від частоти й амплітуди коливань. Отже, для побудови матриць демпфірування необхідно скористатися залежностями між напруженнями і деформаціями, характерними для в'язкопружних матеріалів [1]:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau, \quad (1)$$

где σ , ε – вектори напружень і деформацій відповідно; $R(t - \tau)$ – матриця функцій релаксації; t – час; $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ – швидкість деформації.

Щоб скористатися інтегральною залежністю, необхідно визначити параметри функцій релаксації $R_{ij}(t - \tau)$, які складають матрицю $R(t - \tau)$. Саме це створює труднощі при застосуванні рівняння (1) у задачах динаміки, оскільки параметри цих функцій, одержані при статичних випробуваннях, виявляються неприйнятними для задач динаміки [1]. Одержані розрахункові рівняння коливань при використанні залежності (1) будуть інтегро-диференціальними, що також створює відомі труднощі при аналізі коливань складних конструкцій. У зв'язку з цим перспективним є використання методу скінченноелементного аналізу у просторі перетворень Фур'є [2, 3], який враховує безпосередньо комплексні модулі матеріалу, тобто залежність (1), записану у просторі інтегральних перетворень Фур'є:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{E}(i\omega)\tilde{\varepsilon}, \quad (2)$$

де $\tilde{E}(i\omega)$ – матриця комплексних модулів, які залежать від частоти коливань ω ; $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\varepsilon}$ – зображення відповідно напружень і деформацій.

Метод аналізу нестационарних коливань при кінематичному збудженні. За допомогою традиційної для статички методики скінченноелементного синтезу у варіанті методу переміщень одержимо рівняння динаміки у просторі перетворень Фур'є відносно зображень переміщень вузлових точок дискретної моделі конструкції:

$$\tilde{K}(i\omega)\tilde{q} + (i\omega)^2 M\tilde{q} = \tilde{F}(i\omega), \quad (3)$$

де \tilde{K} – матриця комплексної жорсткості, $\tilde{K} = \int_V (AN)^T C(i\omega)(AN) dV$; M – матриця мас, $M = \int_V N^T \rho N dV$; F – пряме перетворення Фур'є зовнішнього навантаження p , $\tilde{F} = \Phi \left(\int_S N^T p dS \right)$; $C(i\omega)$ – матриця частотно-залежних комплексних модулів; A – матриця диференціальних операторів; N – матриця функцій апроксимації переміщень; ω – частота.

Після одержання розв'язку рівнянь (3) відносно \tilde{q}

$$\tilde{q} = (\tilde{K} + (i\omega)^2 M)^{-1}(\tilde{F}(i\omega)) \quad (4)$$

розв'язок для переміщень у часовому просторі знаходимо за допомогою оберненого швидкого перетворення Фур'є:

$$q = \Phi^{-1}(\tilde{q}). \quad (5)$$

Рівняння (3) можна застосувати для аналізу коливань, що викликані кінематичними збудженнями.

Покажемо це на прикладі консольного стрижня, коливання в якому збуджуються внаслідок лінійного і кутового переміщень крайнього лівого перерізу (рис. 1).

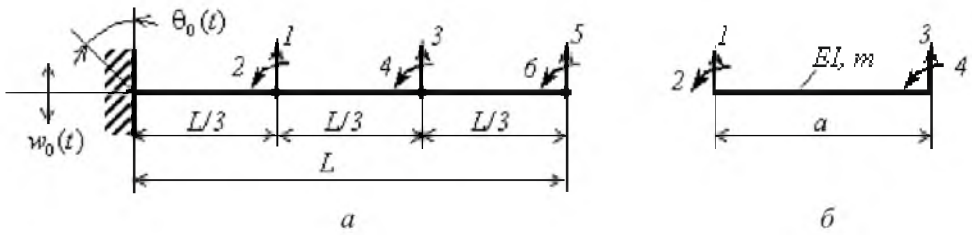


Рис. 1. Скінченноелементна модель стрижня (а) і скінченний елемент (б).

Для побудови скінченноелементної моделі використаємо скінченний елемент стрижня, який працює на згин (рис. 1,б). Матриця динамічної жорсткості, записана у просторі перетворень Фур'є, відображає пружні, демпфіруючі й інерційні характеристики елемента:

$$Z(i\omega) = K(i\omega) + (i\omega)^2 M. \quad (6)$$

Для композиційного в'язкопружного матеріалу доцільно використати ефективні комплексні модулі, обчислені за однією з методик, які дозволяють врахувати особливості структури (наприклад, запропонованою у [2]). Для ілюстрації методики, що пропонується, обмежимося розділенням стрижня на три елементи однакової довжини $a = L/3$ (рис. 1,а). Таким чином, переміщення стрижня визначаються кутовими і лінійними переміщеннями чотирьох вузлів, з яких переміщення у лівому крайньому вузлі задано, а інші (на рис. 1 переміщення 1–6) визначаються. За допомогою традиційної методики скінченноелементного синтезу одержимо систему алгебраїчних рівнянь із комплексними коефіцієнтами відносно зображень вузлових переміщень Q_i :

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{18} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{28} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{81} & Z_{82} & \dots & Z_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \dots \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_8 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

де Z_{ij} – компоненти матриці динамічної жорсткості; Q_i – зображення переміщень вузлів; F_i – зображення навантаження у вузлах.

Розглянемо випадок, коли коливання виникають внаслідок повороту закріпленого перерізу на кут $\theta_0(t)$ і поступального переміщення $w_0(t)$. При кінематичному збудженні вектор F буде мати нульові компоненти.

Запишемо кінематичні граничні умови

$$q_1 = w_0(t), \quad q_2 = \theta_0(t),$$

їх прями перетворення Фур'є*

$$Q_1 = Q_{10}(i\omega), \quad Q_2 = Q_{20}(i\omega) \quad (8)$$

і приведемо систему (7) до вигляду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & Z_{33} & \dots & Z_{38} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & Z_{83} & \dots & Z_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \dots \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{10}(i\omega) \\ Q_{20}(i\omega) \\ -Z_{31}Q_{10}(i\omega) - Z_{32}Q_{20}(i\omega) \\ \dots \\ -Z_{81}Q_{10}(i\omega) - Z_{82}Q_{20}(i\omega) \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{bmatrix} Z_{33} & Z_{34} & \dots & Z_{38} \\ Z_{43} & Z_{44} & \dots & Z_{48} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{83} & Z_{84} & \dots & Z_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ \dots \\ Q_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_{31}Q_{10}(i\omega) - Z_{32}Q_{20}(i\omega) \\ -Z_{41}Q_{10}(i\omega) - Z_{42}Q_{20}(i\omega) \\ \dots \\ -Z_{81}Q_{10}(i\omega) - Z_{82}Q_{20}(i\omega) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Обернене перетворення Фур'є розв'язку цієї системи є реакцією стрижня на кінематичні збудження опорного перерізу.

Збіжність і точність методу залежать від двох факторів. Оскільки він базується на методі скінченних елементів, необхідно використовувати відповідні скінченні елементи, які забезпечують збіжність при подрібненні сітки, а застосування числових інтегральних перетворень у варіанті швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) потребує дотримання співвідношень між параметрами ШПФ. Основні похибки ШПФ пов'язані з можливою втратою вищих гармонік у одержаному сигналі і накладками сигналів. Уникнути цих похибок можна при дотриманні умов, що визначені теоремою Шеннона–Котельникова [4], згідно з якими вибір часового інтервалу, максимальної частоти у спектрі сигналу і кількості поділок інтервалу повинні бути взаємозв'язаними.

На рис. 2, 3 наведено переміщення правого кінцевого перерізу стрижня при лінійних і кутових переміщеннях лівого перерізу у вигляді імпульсів синусоїдальної форми (рис. 4). Параметри стрижня приймалися такими: модуль пружності $E^* = 10^{10} + i \cdot 10^9$ Па; площа поперечного перерізу $A = 4 \cdot 10^{-4}$ м²; момент інерції $J = 1,2 \cdot 10^{-8}$ м⁴; густина $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $a = 1$ м.

Далі вищенаведена методика застосовується для аналізу коливань ланок поворотного маніпулятора зі сталі й епоксидографітопласту, а також шатуна кривошипно-шатунного механізму.

Розрахунок коливань руки поворотного маніпулятора. Стояк маніпулятора (рис. 5), в якому не виникають коливання, вважався абсолютно жорстким. Розглядалися тільки коливання руки маніпулятора, кінематичне збудження якої відбувалося за рахунок повороту стояка.

* Прямі і обернене перетворення Фур'є виконуються за допомогою швидкого перетворення Фур'є.

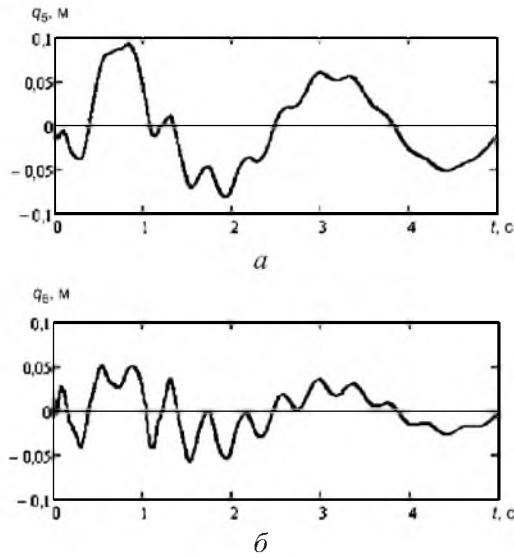


Рис. 2. Лінійне (а) і кутове (б) переміщення кінцевого перерізу стрижня при лінійному переміщенні опори.

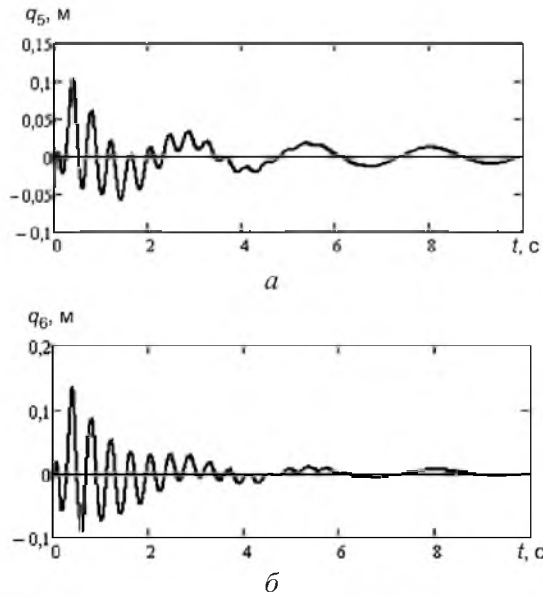


Рис. 3. Лінійне (а) і кутове (б) переміщення кінцевого перерізу стрижня при повороті опори.

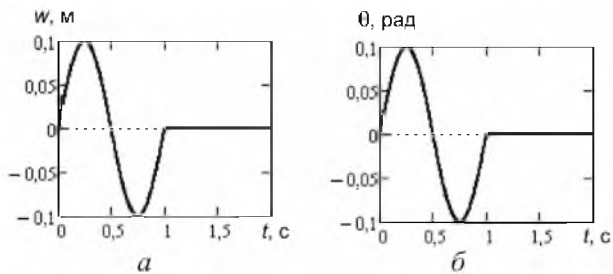
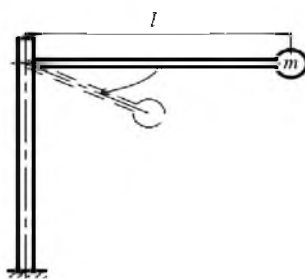


Рис. 4. Імпульс синусоїдальної форми: вертикальне (а) і кутове (б) переміщення опори.

Рис. 5. Схема поворотного маніпулятора (m – маса вантажу).

Порівнювалися коливання руки маніпулятора довжиною $l = 1,8$ м, виготовленої зі сталі (модуль пружності $E_c = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, площа поперечного перерізу $A_c = 3,59 \cdot 10^{-5}$ м², момент інерції площі поперечного перерізу $J_c = 0,2 \cdot 10^{-8}$ м⁴, густина матеріалу $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³) і епоксидографітопласту (модуль пружності $E_k = 1,5 \cdot 10^{11}$ Па, площа поперечного перерізу $A_k = 4,25 \cdot 10^{-5}$ м², момент інерції перерізу $J_k = 2,8 \cdot 10^{-9}$ м⁴, густина матеріалу $\rho_k = 1,66 \cdot 10^3$ кг/м³) за однакової жорсткості при згині ($EJ = 420$ Н·м²).

Рука маніпулятора вважалася горизонтальною, консольно закріпленою балкою, яку розділено на дев'ять скінченних елементів. Балку у точці закріплення повертали навколо вертикальної осі на кут 45° і назад (рис. 6).

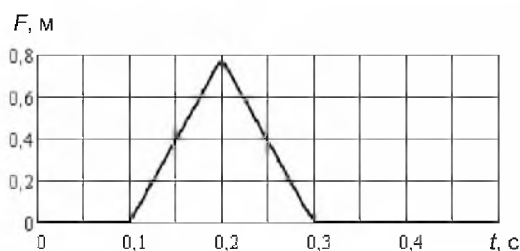


Рис. 6. Переміщення (поворот) маніпулятора.

На рис. 7 наведено переміщення кінцевого перерізу руки маніпулятора при дії вказаного на рис. 6 збудження.

З урахуванням маси вантажу m (рис. 5) коливання кінцевого перерізу матимуть вигляд, показаний на рис. 8.

Як видно з порівняння осцилограм коливань руки маніпулятора зі сталі й композиційного матеріалу, час затухання коливань (час позиціонування) для композитного елемента значно менший.

Розрахунок коливань ланки кривошипно-шатунного механізму. Кривошип OA ($l_1 = 0,2$ м) вважався абсолютно жорстким, і його коливання не враховувалися (рис. 9).

Шатун AB ($l_2 = 0,9$ м) моделювався горизонтально закріпленою, розділеною на дев'ять скінченних елементів балкою, якій у точці A (рис. 9) надавали кінематичне збудження у відповідності з рухом кривошипа за законом:

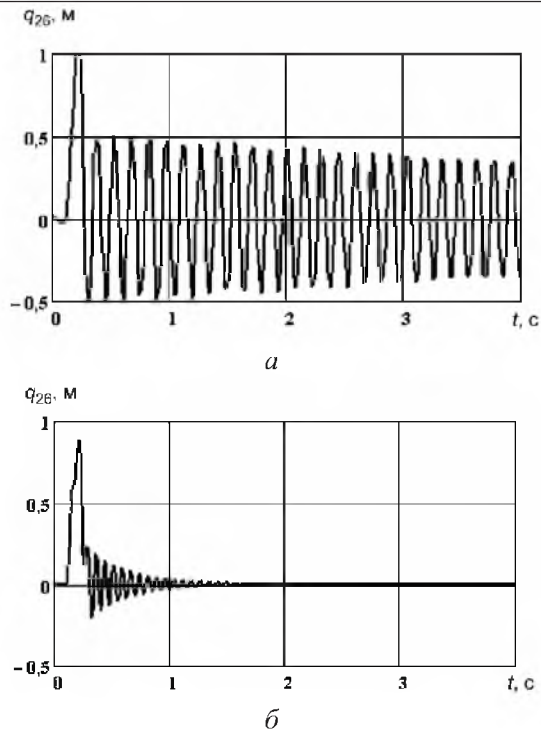


Рис. 7. Переміщення кінцевого перерізу руки маніпулятора зі сталі (а) і композиційного матеріалу (б).

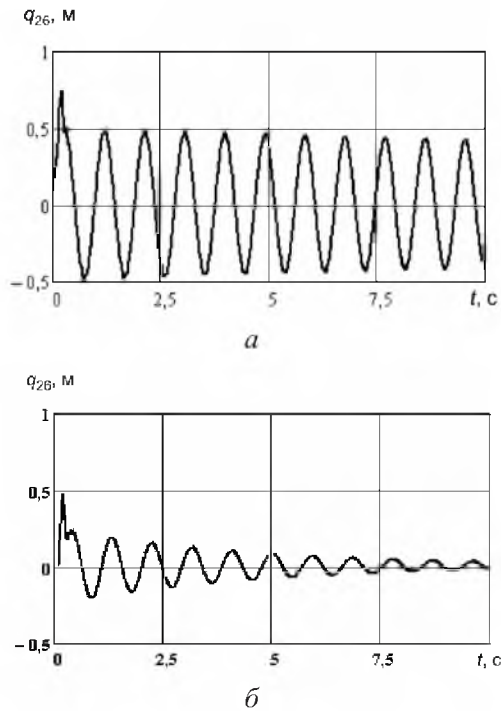


Рис. 8. Переміщення крайнього перерізу руки маніпулятора зі сталі (а) і композиційного матеріалу (б) з приєднаною масою m .

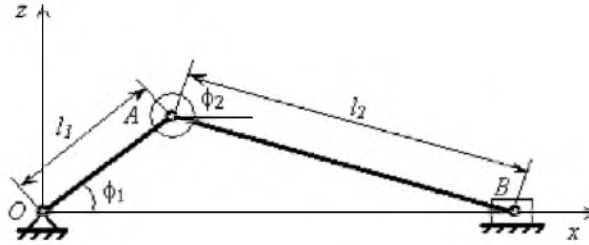


Рис. 9. Схема кривошипно-шатунного механізму.

$x_A = l_1 \cos \varphi_1 - l_1$ – горизонтальне переміщення точки A (рис. 10);

$z_A = l_1 \sin \varphi_1$ – вертикальне переміщення точки A (рис. 10).

Точка B не переміщувалася у вертикальному напрямку, а в горизонтальному рухалася вільно.

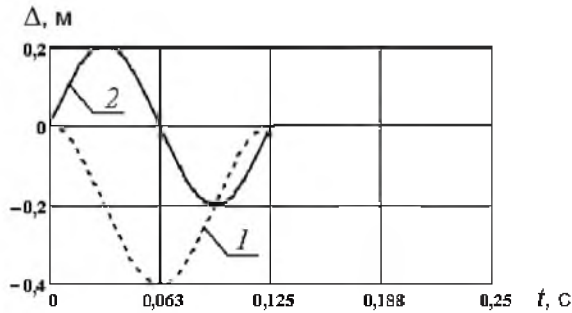
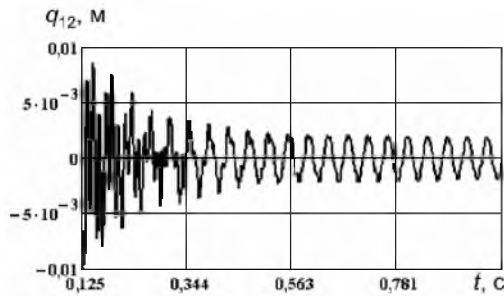
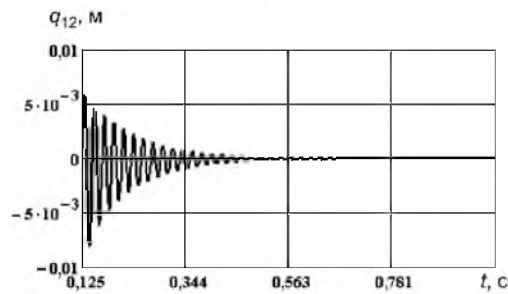


Рис. 10. Переміщення Δ точки A у напрямках координат x (I) і z (2).



a



б

Рис. 11. Максимальні вертикальні переміщення середньої точки шатуна зі сталі (*a*) і композитного матеріалу (*б*).

Розглядалися коливання шатуна зі сталі ($E_c = 2,1 \cdot 10^{11} + 6i \cdot 10^9$ Па, $A_c = 1,386 \cdot 10^{-4}$ м², $J_c = 8 \cdot 10^{-10}$ м⁴, $\rho_c = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³) і епоксидографітопласту ($E_k = 1,5 \cdot 10^{11} + i \cdot 10^{10}$ Па, $A_k = 1,64 \cdot 10^{-4}$ м², $J_k = 1,2 \cdot 10^{-9}$ м⁴, $\rho_k = 1,66 \cdot 10^3$ кг/м³) при збудженні у вузлі *A* (один оберт кривошипа зі швидкістю 480 об/хв), яке тривало 0,125 с. Жорсткість шатуна при згині *EJ* в обох випадках дорівнювала 168 Н·м². Осцилограми вертикальних коливань шатуна у середній точці ланки *AB* наведено на рис. 11.

Висновки

1. Показано, що швидкість затухання коливань композитних елементів є значно більшою, ніж швидкість затухання коливань сталевих елементів за однакової жорсткості при згині, а зменшення маси елементів із композиційного матеріалу і відповідно інерційних сил призводить до зниження амплітуд переміщень, а отже, і напружень порівняно зі сталевими елементами. Таким чином, використання композиційних матеріалів у робототехніці і машинобудуванні дозволяє зменшити масу механізмів, підвищити точність позиціонування маніпуляторів і швидкість їх роботи, що відповідає сучасним вимогам до робототехнічних конструкцій.

2. Запропонована методика розрахунку нестационарних коливань при імпульсних кінематичних навантаженнях може бути використана для оптимального проектування відповідних елементів із в'язкопружних, зокрема композиційних, матеріалів при дії короткочасних збурень.

Резюме

Рассмотрено влияние демпфирования на нестационарные колебания элементов манипуляторов и механизмов с гибкими звеньями. Для анализа нестационарных колебаний при кинематическом возбуждении используется частотный метод конечных элементов, который базируется на численном интегральном преобразовании Фурье.

1. *Сорокин Е. С., Муравский Г. Н.* Об учете упругих несовершенств материалов методами теории наследственной упругости // Строит. механика и расчет сооружений. – 1975. – № 4. – С. 52 – 58.
2. *Дубенець В. Г., Хильчевский В. В.* Колебания демпфированных композитных конструкций. – Киев: Вища шк., 1995. – Т. 1. – 210 с.
3. *Хильчевський В. В., Дубенець В. Г., Савченко О. В.* Коливання стержневих систем при кінематичному збудженні // Наук. вісті НТУУ “КПІ”. – 2002. – № 5. – С. 95 – 98.
4. *Отнесс Р., Энксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982. – 428 с.

Поступила 11. 07. 2007