ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2003. Том 5 (77), N 1. С. 71 – 80*

УДК 537.84

АНАЛОГ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРОМЕКИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. САЛТАНОВ*, **В. Н. САЛТАНОВ****

* *Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

** *Национальный университет им. Т. Г. Шевченко, Киев*

Получено 25.01.2002

Осуществлен аналог преобразования Громеки в двухпараметрической стационарной задаче магнитной гидродинамики вращающейся неоднородной жидкости. Получены интегралы симметрии и с их помощью задача сведена к одному нелинейному уравнению в частных производных второго порядка, служащему для определения функции тока ψ. Введена модифицированная функция тока $F = F(\psi)$. В результате задача сведена к квазилинейному уравнению в частных производных второго порядка. Это уравнение включает в себя произвольно заданные функции своего аргумента: плотность $\rho(F)$, аналог функции Бернулли $w_{em}(F)$, третью компоненту обобщенного импульса единицы массы жидкости $q(F)$, магнитный $A(F)$ и электрический $\Phi_e(F)$ потенциал. Произвол в выборе зависимостей $\rho(F)$, $w_{em}(F)$, $q(F)$, $A(F)$ и $\Phi_e(F)$ может быть использован для аппроксимации реальных параметров среды. При определенном задании этих зависимостей уравнение для модифицированной функции тока становится линейным, что предоставляет существенные преимущества в решении краевых задач. Рассмотрены волны конечной амплитуды в замагниченном вращающемся цилиндрическом слое однородной жидкости.

Здійснен аналог перетворення Громекі в двопараметрічній стаціонарній задачі магнітної гідродинаміки неоднорідної рідини, що обертається. Отримані інтеграли симетрії і за їхньою допомогою задача зведена до одного нелінійного рівняння в часткових похідних другого порядку, що служить для визначення функції току ψ. Впроваджена модифікована функція току $F = F(\psi)$. В результаті задача зведена до квазілінійного рівняння в часткових похідних другого порядку. Це рівняння включає в собі довільно задані функції свого аргумента: густину $\rho(F)$, аналог функції Бернулі $w_{em}(F)$, третю компоненту узагальненого імпульса одиниці маси рідини $q(F)$, магнітний $A(F)$ і електричний $\Phi_e(F)$ потенціал. Довільність у виборі залежностей $\rho(F)$, $w_{em}(F)$, $q(F)$, $A(F)$ і $\Phi_e(F)$ може бути використана для апроксимації реальних параметрів середовища. При певному завданні цих залежностей рівняння для модифікованої функції тока стає лінійним, що дає істотні переваги в рішенні краевих задач. Розглянуті хвилі скінченної амплітуди в замагніченому циліндричному шарі однорідної рідини, що обертається.

The analogue of Gromeka's transformation in the two - dimensional stationary problem of magnetohydrodynamics of nonhomogeneous rotational liquid is realized. The integrals of symmetry are obtained,and using their help the problem is reduced to a single non-linear equation in partial derivatives of the second order, serving for the definition of the current function ψ. Modified current function $F = F(\psi)$ is introduced. As a result the problem is reduced to quasilinear equation in partial derivatives of the second order. This equation involves arbitrary functions of its argument: density $\rho(F)$, analogue of Bernoulli function $w_{em}(F)$, 3 - component of the generalized impulse of liquid unit mass $q(F)$, magnetic potential $A(F)$ and electric potential $\Phi_e(F)$. Arbitrariness in choosing of dependencies $\rho(F)$, $w_{em}(F)$, $q(F)$, $A(F)$ and $\Phi_e(F)$ can be used for the approximation of the real parameters of continuum. At a certain assignment of these dependencies the equation for the modified current function becomes linear, what shows substantial advantages in a solving of a boundary problems. The waves of finite amplitude in magnetic rotational cylindrical layer of homogenous fluid are considered.

ВВЕДЕНИЕ

Преобразование системы уравнений динамики идеальной жидкости постоянной плотности в стационарном двухпараметрическом случае в произвольной ортогональной системе координат впервые выполнено Громекой [8]. В результате исходная система была сведена к решению одного квазилинейного уравнения в частных производных второго порядка, служащего для определения функции тока. Изложение ряда принципиальных вопросов теории стационарных с циклической координатой и винтовых течений идеальной жидкости дано Васильевым [5]. В частности, указаны классы вихревых течений, для которых уравнение для функции тока становится линейным. В этом случае задачи допускают эффективное решение. В частности, уравнения для функции тока линейно в случае потенциальных течений. В работе Нигама [53] в случае осесмметричной задачи введен специальный оператор второго порядка. В исследованиях Ткалича [44] построен аналогичный оператор Δ^*, пригодный для произвольной системы координат, удовлетворяющей условиям симметрии. Им дано естественное обобщение этих результатов для магнитной гидродинамики однородной жидкости. Изучение плоских стационарных потенциальных течений несжимаемой жидкости тесно связано с развитием теории функций комплексного переменного. Аппарат теории аналитических функций позволил установить физическую сущность многих основных гидродинамических законов и эффектов, а также найти в эффективной форме решение многих конкретных задач. Первые приложения теории функций комплексного переменного в гидродинамике сделаны Гельмгольцем [12, 20] и Кирхгофом [12, 13]. В России методы Кирхгофа получили развитие в работах Бобылева [12] и Котельникова [12]. Следующий крупный шаг сделал Жуковский [11], который ввел параметрическое комплексное переменное. Этот подход оказался плодотворным и нашелл широкое применение [2, 10, 12, 14–16, 19, 21, 25, 26, 32, 39, 41, 46, 56]. Формулы Чаплыгина [16, 46] дают возможность вычислить силу и момент, действующие на тело. Теорема Жуковского [10, 16] позволяет вычислить подъемную силу в случае однородного на бесконечности потока. Однозначность решения достигается принятием постулата Жуковского–Кутта–Чаплыгина. Эффективное решение задачи обтекания слабоизогнутого профиля дано Седовым [39]. Анализ работ московской школы выполнен Келдышем и Седовым [12]. Ряд из перечисленных выше результатов обобщены в исследованиях Ткалича [44] для магнитной гидродинамики однородной жидкости.

В связи с необходимостью математического моделирования вторичных течений, широко распространенных в природе и технике, во второй половине XX столетия получил существенное развитие так называемый "метод склеивания вихревых и потенциальных потоков в различных зонах" [17, 29]. Этот метод давно привлекает внимание исследователей. Достаточно вспомнить сферический вихрь Хилла [1, 18], цилиндрические вихри Ламба–Чаплыгина и Чаплыгина [18, 45, 51], а также эллиптический вихрь Кирхгофа [13, 18]. В дальшейшем идея использования вихрепотенциальных течений как модели вторичных течений получила развитие в работах [1, 17, 31, 33–37, 42, 43, 57]. В работе [29] с использованием единого аналитико–расчетного метода исследованы и систематизированы многие классы плоских стационарных течений невязкой жидкости как для ограниченных, так и для неограниченных вихревых областей. В целом следует отметить, что наибольший прогресс при исследовании вихрепотенциальных течений достигнут в решении стационарных с циклической координатой задач.

Ряд результатов в гидродинамике однородной жидкости, так или иначе связанных с использованием и развитием преобразования Громеки, содержится в работах [6, 7, 24, 30, 32, 47–49]. В последние десятилетия существенное развитие получили исследования в области гидродинамики неоднородных вращающихся сред, связанные с различными прикладными проблемами [3, 4, 9, 22, 23, 27, 28, 30, 32, 38, 40, 50, 52, 54, 58]. В связи с этим заметим, что работы [30, 32, 50, 54, 58] содержат различные как в смысле используемых систем координат, так и в смысле степени общности аналоги преобразований Громеки в гидродинамике неоднородных вращающихся жидкостей. В работе [55] дан аналог преобразования Громеки в магнитной гидродинамике неоднородной вращающейся жидкости в предположении коллинеарности векторов скорости и напряженности магнитного поля. В частности, в произвольной ортогональной системе координат в общем случае получено нелинейное уравнение для модифицированной функции тока и указаны условия сведения этого уравнения к линейному без предположения о малости амплитуд возмущений.

Цель данной работы – выполнить аналог преобразования Громеки в магнитной гидродинамике неоднородной вращающейся жидкости в общем случае (без предположения о коллинеарности векторов скорости и напряженности магнитного поля) и рассмотреть на основе уравнения для модифицированной функции тока пример внутренней волны конечной амплитуды.

1. ИНТЕГРАЛЫ СИММЕТРИИ

Исходная система уравнений вращающейся стратифицированной по плотности идеально проводящей невязкой жидкости в стационарном случае имеет вид

$$\nabla w = \vec{v} \times \mathrm{rot}(\vec{v} - \vec{W}) - \frac{1}{4\pi\rho}\vec{H} \times \mathrm{rot}\vec{H} - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$(\vec{v}\nabla)\rho = 0, \quad (3)$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla\Phi_e = \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H}, \quad (5)$$

$$w = \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi, \qquad \vec{W} = -\omega_*\vec{e}_* \times \vec{R},$$

$$\Phi \equiv G(x) - \frac{\vec{W}^2}{2} \qquad \vec{E} = -\nabla\Phi_e. \quad (6)$$

Здесь $\vec{v}$ – скорость; $\vec{H}$ – напряженность магнитного поля; ρ – плотность; p – давление; G – потенциал внешних объёмных сил; Φ_e – электрический потенциал; c – скорость света; ω_* – угловая скорость вращения; $\vec{e}_*$ – единичный вектор вдоль оси вращения; $\vec{R}$ – радиус-вектор текущей точки. "Скоростная" часть уравнения движения (1) представлена в форме Громеки–Ламба, весьма удобной при дальнейшем анализе. Пусть величины $\vec{v}$, $\vec{H}$, p, ρ и коэффициенты Ламе h_1, h_2, h_3 ортогональной системы координат (x_1, x_2, x_3) не зависят от координаты x_3 $(\partial/\partial x_3 = 0)$. Решая тогда уравнения неразрывности (2) и соленоидальности вектора напряженности магнитного поля (4), имеем

$$\vec{v} = \nabla\psi \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} + h_3 v_3 \frac{\vec{e}_3}{h_3}, \qquad (7)$$

$$\vec{H} = \nabla A \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} + h_3 H_3 \frac{\vec{e}_3}{h_3}. \qquad (8)$$

Здесь ψ – функция тока; A – ее магнитный аналог; v_3 и H_3 – третьи компоненты скорости и напряженности магнитного поля; $\vec{e}_3$ – единичный вектор, касательный координатной линии x_3. Подставляя выражения (7) и (8) в уравнение сохранения плотности (4), в уравнение электрической индукции (5) и в третью компоненту уравнения движения (1), получаем

$$\frac{\partial(\psi, \rho)}{\partial(x_1, x_2)} = 0, \qquad \frac{\partial(\psi, A)}{\partial(x_1, x_2)} = 0, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial(\psi, h_3(v_3 - W_3))}{\partial(x_1, x_2)} - \frac{1}{4\pi\rho}\frac{\partial(A, h_3, H_3)}{\partial(x_1, x_2)} = 0, \qquad (10)$$

$$c\nabla\Phi_e = \frac{v_3}{h_3}\nabla A - \frac{H_3}{h_3}\nabla\psi. \qquad (11)$$

Общее решение уравнений (9) имеет вид

$$\rho = \rho(\psi), \qquad A = A(\psi), \qquad (12)$$

где величины $\rho(\psi)$ и $A(\psi)$ – произвольные функции своих аргументов. Учитывая решения (12) в уравнениях (10) и (11), приходим к следующей системе уравнений для определения величин v_3, b, H_3:

$$\begin{gathered} v_3 - \frac{a}{4\pi\rho}H_3 = \frac{q}{h_3} + W_3, \\ -av_3 + H_3 = -ch_3 b, \\ q = q(\psi), \quad \Phi_e = \Phi_e(\psi), \\ a \equiv A^{'}(\psi), \quad b \equiv \Phi_e^{'}(\psi). \end{gathered} \qquad (13)$$

Здесь величины $q(\psi)$ и $\Phi_e(\psi)$ – произвольные функции своих аргументов. Штрих всюду означает дифференцирование по своему аргументу. Соотношения (12) и (13) представляют собой интегралы симметрии в рассматриваемой задаче. Решив систему уравнений (13) относительно величин v_3 и H_3, запишем

$$v_3 = \frac{1}{\Delta_m}\left(\frac{q}{h_3} + W_3 - \frac{ch_3 ab}{4\pi\rho}\right),$$

$$H_3 = \frac{1}{\Delta_m}\left[a\left(\frac{q}{h_3} + W_3\right) - ch_3 b\right],$$

$$\Delta_m = \left(1 - \frac{a^2}{4\pi\rho}\right) \neq 0. \qquad (14)$$

Пусть електрическое поле отсутствует:

$$b = 0. \qquad (15)$$

Тогда выражения (14) для v_3 и H_3 упрощаются и принимают вид:

$$v_3 = \frac{1}{\Delta_m}\left(\frac{q}{h_3} + W_3\right),$$

$$H_3 = \frac{a}{\Delta_m}\left(\frac{q}{h_3} + W_3\right). \qquad (16)$$

При выполнении условия (15) из соотношений (7), (8), (12), (13) и (16) следует, что векторы скорости и напряженности магнитного поля коллинеарны:

$$\vec{H} = a\vec{v} \qquad (17)$$

Случай (17) был рассмотрен ранее в работе [55].

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА ψ

Пусть поперечная к выделенному направлению составляющая магнитного поля отлична от нуля,

$$a \neq 0. \qquad (18)$$

Тогда, подставляя выражения (7) и (8) в первые две компоненты уравнения движения (1), с учетом выражений (12) и (13) для величин A и a, получаем

$$\nabla w = \frac{1}{h_3^2}\left[\Delta_m D\psi - \frac{aa^{'}}{4\pi\rho}(\nabla\psi)^2\right]\nabla\psi +$$

$$+\frac{\mathrm{rot}_3\vec{W}}{h_3}\nabla\psi - \frac{\rho^{'} p}{\rho^2}\nabla\psi + \vec{b}_3,$$

$$\vec{b}_3 \equiv \frac{v_3}{h_3}\nabla\Big[h_3(v_3 - W_3)\Big] - \frac{1}{4\pi\rho}\frac{H_3}{h_3}\nabla(h_3 H_3),$$

$$D \equiv \frac{h_3}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_1}{h_3 h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \qquad (19)$$

Здесь величина Δ_m определяется согласно выражения (14). Исключив с помощью первого и второго соотношений (13) величины $h_3(v_3 - W_3)$ и (v_3/h_3), соответственно, из выражения (19) для вектора $\vec{b}_3$, будем иметь

$$\vec{b}_3 = \left\{\frac{1}{a}\left(\frac{H_3}{h_3} + cb\right)\left[q^{'} + \frac{h_3 H_3}{4\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{'}\right] - \right.$$

$$-\frac{c}{4\pi}h_3H_3\left(\frac{b}{\rho}\right)^{'}\Bigg\}\nabla\psi+\frac{c}{4\pi}\nabla\left(\frac{b}{\rho}h_3H_3\right). \qquad (20)$$

Учтем выражение (20) в уравнении движения (19) и введем обозначение

$$w_{em}=w-\frac{cb}{4\pi\rho}h_3H_3. \qquad (21)$$

В результате получим

$$\nabla w_{em}=\Bigg\{\frac{1}{h_3^2}\left[\Delta_m D\psi-\frac{aa^{'}}{4\pi\rho}\Big(\nabla\psi\Big)^2\right]-$$
$$-\frac{\rho^{'}p}{\rho^2}+\frac{\mathrm{rot}_3\vec{W}}{h_3}--\frac{c}{4\pi}h_3H_3\left(\frac{b}{\rho}\right)^{'}+$$
$$+\frac{1}{a}\left(\frac{H_3}{h_3}+cb\right)\left[q^{'}+\frac{h_3H_3}{4\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{'}\right]\Bigg\}\nabla\psi. \qquad (22)$$

Умножая векторно левую и правую части соотношения (22) на $\nabla\psi$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial(\psi,w_{em})}{\partial(x_1,x_2)}=0. \qquad (23)$$

Общее решение уравнения (23) имеет вид

$$w_{em}=w_{em}(\psi), \qquad (24)$$

где $w_{em}(\psi)$ – произвольная функция своего аргумента. Учитывая выражение (24) в соотношении (22), при $|\nabla\psi|\neq 0$ получаем

$$\Delta_m D\psi-\frac{aa^{'}}{4\pi\rho}\Big(\nabla\psi\Big)^2-h_3^2\rho^{'}\frac{p}{\rho}+h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}+$$
$$+\frac{1}{a}\left(h_3H_3+ch_3^2b\right)\left[q^{'}+\frac{h_3H_3}{4\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{'}\right]-$$
$$-h_3^2\left[\frac{c}{4\pi}h_3H_3\left(\frac{b}{\rho}\right)^{'}+w_{em}^{'}\right]=0. \qquad (25)$$

Подставляя в соотношение (21) выражение (6) для величины w и находя из получившегося соотношения давление p, с учетом выражений (7) и (13) будем иметь

$$\frac{p}{\rho}=w_{em}-\Phi+\frac{cb}{4\pi\rho}h_3H_3-$$
$$-\frac{(H_3+ch_3b)^2}{2a^2}-\frac{(\nabla\psi)^2}{2h_3^2}. \qquad (26)$$

Подставим выражение для давления (26) в уравнение (25). В результате получим

$$\Delta_m D\psi+\left(\frac{\rho^{'}}{2\rho}-\frac{aa^{'}}{4\pi\rho}\right)\big(\nabla\psi\big)^2+h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}+$$
$$+\frac{\rho^{'}}{\rho}\left[h_3^2\Phi+\frac{(h_3H_3+ch_3^2b)^2}{2a^2}\right]-\frac{ch_3^2}{4\pi\rho}h_3H_3b^{'}+$$
$$+\frac{1}{a}\left(h_3H_3+ch_3^2b\right)\left[q^{'}+\frac{h_3H_3}{4\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{'}\right]-$$
$$-\frac{h_3^2}{\rho}\big(\rho w_{em}\big)^{'}=0. \qquad (27)$$

Учитывая в уравнении (27) выражение (14) для H_3, имеем

$$\Delta_m D\psi+\left(\frac{\rho^{'}}{2\rho}-\frac{aa^{'}}{4\pi\rho}\right)\big(\nabla\psi\big)^2+h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}+$$
$$+h_3^2\Phi\frac{\rho^{'}}{\rho}-\frac{h_3^2}{\rho}\big(\rho w_{em}\big)^{'}+$$
$$+\left(q+h_3W_3-ch_3^2\frac{ab}{4\pi\rho}\right)^2\frac{\rho^{'}}{2\rho\Delta_m^2}-$$
$$-\frac{ch_3^2}{4\pi\rho\Delta_m}\left[a\big(q+h_3W_3\big)-ch_3^2b\right]b^{'}+$$
$$+\frac{1}{\Delta_m}\left(q+h_3W_3-ch_3^2\frac{ab}{4\pi\rho}\right)\times$$
$$\times\left\{q^{'}+\frac{1}{4\pi\Delta_m}\left[a\big(q+h_3W_3\big)-ch_3^2b\right]\left(\frac{a}{\rho}\right)^{'}\right\}=0. \qquad (28)$$

Таким образом, задача сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (28), служащему для определения функции тока ψ. Это уравнение содержит заданные функции координат $G(x)$ и $\vec{W}(x)$ и произвольно заданные функции тока $\rho(\psi)$, $w_{em}(\psi)$, $q(\psi)$, $A(\psi)$ и $\Phi_e(\psi)$. Произвол в выборе зависимостей $\rho(\psi)$, $w_{em}(\psi)$, $q(\psi)$, $A(\psi)$ и $\Phi_e(\psi)$ может быть использован для аппроксимации реальных параметров среды.

Пусть электрическое поле отсутствует, т. е. выполнено условие (15). Введем величину q_3 следующим образом:

$$q=\Delta_m q_3. \qquad (29)$$

Учитывая тогда соотношения (16), (17) и (29), уравнению (27) придадим следующий вид:

$$\rho\Delta_m D\psi+\left(\frac{d\rho}{2d\psi}-\frac{aa^{'}}{4\pi}\right)\big(\nabla\psi\big)^2+$$
$$+\rho\left[h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}+h_3v_3\frac{d}{d\psi}\Big(\Delta_m q_3\Big)\right]+$$
$$+h_3^2v_3^2\left(\frac{d\rho}{2d\psi}+\frac{aa^{'}}{4\pi}-\frac{a^2}{4\pi\rho}\frac{d\rho}{d\psi}\right)+$$

$$+h_3^2\Phi\frac{d\rho}{d\psi}-h_3^2\frac{d(\rho w_{em})}{d\psi}=0. \qquad (30)$$

Сравним полученное уравнение (30) с уравнением (61) работы [55]. Учтем опечатку, содержащуюся в последнем уравнении (пропущен множитель "ρ" в слагаемом, пропорциональном "h_3H_3"), а также то обстоятельство, что величина "a" данной работы равна величине "f" работы [55],

$$a=f. \qquad (31)$$

В результате убеждаемся в том, что полученное выше уравнение (30) и уравнение (61) работы [55] идентичны.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ТОКА *F*

Модифицированную функцию тока F введем следующим образом:

$$F=\int\sqrt{\frac{\sigma_m\Delta_m\rho}{\rho_0}}d\psi,\quad \sigma_m=\mathrm{sign}\Delta_m. \qquad (32)$$

Выражая обычную функцию тока через модифицированную, согласно соотношению (32) будем иметь

$$\psi=\int\sqrt{\frac{\sigma_m\rho_0}{\Delta_m\rho}}dF. \qquad (33)$$

Учитывая выражение (33) в первом слагаемом уравнения (27), находим

$$\Delta_m D\psi=\sigma_m\sqrt{\frac{\sigma_m\Delta_m\rho_0}{\rho}}DF-\left(\frac{\rho'}{2\rho}-\frac{aa'}{4\pi\rho}\right)(\nabla\psi)^2. \qquad (34)$$

По–прежнему, штрих означает дифференцирование соответствующей величины по функции тока ψ. Учитывая выражение (34) в уравнении (27), записываем

$$\sigma_m\sqrt{\frac{\sigma_m\Delta_m\rho_0}{\rho}}DF+h_3\mathrm{rot}_3\vec W+$$
$$+\frac{\rho' h_3^2}{\rho}\left[\Phi+\frac{(H_3+ch_3b)^2}{2a^2}\right]-\frac{ch_3^2}{4\pi\rho}h_3H_3b'+$$
$$+\frac{1}{a}\left(h_3H_3+ch_3^2b\right)\left[q'+\frac{h_3H_3}{4\pi}\left(\frac{a}{\rho}\right)'\right]-$$
$$-\frac{h_3^2}{\rho}(\rho w_{em})'=0. \qquad (35)$$

Переходя в соотношении (35) от дифференцирования по ψ к дифференцированию по F, с помощью выражения (32) получаем

$$DF+\sigma_m\left\{h_3\mathrm{rot}_3\vec W\sqrt{\frac{\sigma_m\rho}{\Delta_m\rho_0}}+\right.$$
$$+\left[h_3^2\Phi+\frac{(h_3H_3+ch_3^2b)^2}{2a^2}\right]\frac{d\rho}{\rho_0 dF}-\frac{ch_3^2}{4\pi\rho_0}h_3H_3\frac{db}{dF}+$$
$$+\frac{\rho}{\rho_0 a}\left(h_3H_3+ch_3^2b\right)\left(\frac{dq}{dF}+\frac{h_3H_3}{4\pi}\frac{d}{dF}\frac{a}{\rho}\right)-$$
$$\left.-\frac{h_3^2}{\rho_0}\frac{d(\rho w_{em})}{dF}\right\}=0. \qquad (36)$$

Учитывая в уравнении (36) выражение (14) для величины h_3H_3, имеем

$$DF+\sigma_m\left\{\sqrt{\frac{\sigma_m\rho}{\rho_0\Delta_m}}h_3\mathrm{rot}_3\vec W+\right.$$
$$+h_3^2\Phi\frac{d\rho}{\rho_0 dF}-\frac{h_3^2}{\rho_0}\frac{d(\rho w_{em})}{dF}+$$
$$+\left(q+h_3W_3-ch_3^2\frac{ab}{\rho}\right)^2\frac{d\rho}{2\rho_0\Delta_m^2 dF}-$$
$$-\frac{ch_3^2}{4\pi\rho\Delta_m}\left[a\left(q+h_3W_3\right)-ch_3^2b\right]\frac{db}{dF}+$$
$$+\frac{\rho}{\rho_0\Delta_m}\left(q+h_3W_3-ch_3^2\frac{ab}{4\pi\rho}\right)\times$$
$$\times\left\{\frac{dq}{dF}+\frac{1}{4\pi\Delta_m}\left[a\left(q+h_3W_3\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-ch_3^2b\right]\frac{d}{dF}\frac{a}{\rho}\right\}\right\}=0. \qquad (37)$$

Таким образом, задача сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (37), служащему для определения модифицированной функции тока F. Это уравнение содержит заданные функции координат $G(x)$ и $\vec W(x)$ и произвольно заданные функции модифицированной функции тока $\rho(F)$, $w_{em}(F)$, $q(F)$, $A(F)$ и $\Phi_e(F)$. Произвол в выборе зависимостей $\rho(F)$, $w_{em}(F)$, $q(F)$, $A(F)$ и $\Phi_e(F)$ может быть использован для аппроксимации реальных параметров среды. При определенном задании этих зависимостей уравнение (37) оказывается линейным, что предоставляет существенные преимущества при решении краевых задач.

Пусть отличной от нуля является только составляющая магнитного поля в выделенном направлении:

$$a=0\rightarrow\Delta_m=1,\qquad \vec H=H_3\vec e_3. \qquad (38)$$

Тогда уравнение (37) упрощается и принимает вид

$$DF + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} h_3 \mathrm{rot}_3 \vec{W} +$$

$$+\frac{1}{2\rho_0}\frac{\partial}{\partial F}\left[\rho\left(q+h_3W_3\right)^2\right]+\frac{c^2h_3^4b}{4\pi\rho_0}\frac{db}{dF}+$$

$$+h_3^2\Phi\frac{d\rho}{\rho_0 dF}-\frac{h_3^2}{\rho_0}\frac{d(\rho w_{em})}{dF}=0. \qquad (39)$$

Пусть выполнено условие (15). Тогда с учетом соотношения (29) уравнение (37) преобразуем к следующему виду:

$$DF+\sigma_m\left\{\sqrt{\frac{\sigma_m\rho}{\rho_0\Delta_m}}h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\rho_0}\frac{d}{dF}(\rho\Delta_m q_3^2)+\frac{h_3W_3}{\rho_0}\frac{d(\rho q_3)}{dF}+$$

$$+\frac{(h_3W_3)^2}{2\rho_0\Delta_m^2}\left[\left(1-\frac{a^2}{2\pi\rho}\right)\frac{d\rho}{dF}+\frac{d}{dF}\frac{a^2}{4\pi}\right]+$$

$$\left.+\frac{h_3^2\Phi}{\rho_0}\frac{d\rho}{dF}-\frac{h_3^2}{\rho_0}\frac{d(\rho w_{em})}{dF}\right\}=0. \qquad (40)$$

С учетом переобозначений величин a и σ_m уравнение (40) идентично уравнению (66) работы [55].

При отсутствии вращения системы отсчета ($\vec{W}=0$) уравнение (40) упрощается и принимает вид

$$DF+\frac{\sigma_m}{\rho_0}\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dF}(\rho\Delta_m q_3^2)+\right.$$

$$\left.+h_3^2\left[\Phi\frac{d\rho}{dF}-\frac{d(\rho w_{em})}{dF}\right]\right\}=0 \qquad (41)$$

Пусть магнитное поле отсутствует,

$$a=0, \quad b=0\to\sigma_m=1, \quad \Delta_m=1,$$

$$h_3v_3=q_3+h_3W_3. \qquad (42)$$

Тогда уравнение (40) также существенно упрощается и принимает вид

$$DF+\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}+\frac{d}{dF}\frac{\rho q_3^2}{2\rho_0}+\frac{h_3W_3}{\rho_0}\frac{d(\rho q_3)}{dF}+$$

$$+h_3^2\left(\Phi+\frac{W_3^2}{2}\right)\frac{d}{dF}\frac{\rho}{\rho_0}-\frac{h_3^2}{\rho_0}\frac{d(\rho w_{em})}{dF}=0. \qquad (43)$$

Уравнение (43) идентично уравнению (6.7) Главы II работы [32] (с учетом опечаток работы [32], указанных в [55]). В декартовой системе координат z,x,y; $x_1\equiv z$, $x_2\equiv x$, $x_3\equiv y$ при $q_3=0$, $\vec{W}=0$, $\Phi=gz$, где g – ускорение силы тяжести, соотношение (43) переходит в уравнение Йи [58].

4. "ЛИНЕАРИЗАЦИЯ" УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ТОКА *F*

Можно указать специализации величин $\rho(F)$, $a(F)$, $q_3(F)$, $w_{em}(F)$, $\Phi(x)$ и $\vec{W}(x)$, когда уравнение (40) становится линейным. Далее для простоты рассмотрим случай отсутствия вращения, когда уравнение (40) принимает вид (41). Пусть выполнены одни из условий:

$$\Phi=0, \qquad h_3=1; \qquad (44)$$

$$\Phi=0, \qquad \nabla h_3\neq 0; \qquad (45)$$

$$\nabla\Phi\neq 0, \qquad h_3=1; \qquad (46)$$

$$\nabla\Phi\neq 0, \qquad \nabla h_3\neq 0. \qquad (47)$$

Пусть, далее, квадратичными полиномами модифицированной функции тока F являются величины:

$\left[\rho w_{em}+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4\pi}-\rho\right)q_3^2\right]$ – в случае (44);

ρw_{em} и $\left(\frac{a^2}{4\pi}-\rho\right)q_3^2$ – в случае (45);

ρ и $\left[\rho w_{em}+\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4\pi}-\rho\right)q_3^2\right]$ – в случае (46);

ρ, ρw_{em} и $\left(\frac{a^2}{4\pi}-\rho\right)q_3^2$ – в случае (47).

Тогда уравнение (41) становится линейным неоднородным. Если в выражениях для указанных величин отсутствуют слагаемые, линейные по F, то уравнение (41) становится линейным однородным. Отметим, что аналогичным образом можно указать специализации величин $\rho(F)$, $a(F)$, $q_3(F)$, $w_{em}(F)$, $\Phi(x)$ и $\vec{W}(x)$, когда становится линейным и уравнение (37).

5. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ЗАМАГНИЧЕННОМ ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрение в данном параграфе проведем в цилиндрической системе координат ($z,r,\varphi;\partial/\partial\varphi=$ $=0$). Пусть

$$\rho=\rho_0; \quad \vec{W}=0; \quad \Phi=0; \quad w_{em}=w_{em}^0, \qquad (48)$$

где ρ_0 и w_{em}^0 – постоянные. Тогда уравнение (29) принимает вид

$$DF + \frac{1}{2}\frac{dq^2}{dF} + \frac{c^2 r^4}{4\pi\rho_0} b \frac{db}{dF} = 0,$$

$$D = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \qquad (49)$$

Положим

$$q^2 = q_0^2 + k_0^2 F^2,$$

$$b^2 = \frac{8\pi\rho_0}{c^2 r_*^2}\left(a_\Phi^2 + \gamma_0 F\right). \qquad (50)$$

Здесь величины r_*, a_Φ, γ_0, q_0 и k_0 – постоянные. Учитывая выражения (50) в уравнении (49), получаем

$$\left(D + k_0^2\right)F = -\frac{\gamma_0}{r_*^2} r^4. \qquad (51)$$

Для упрощения дальнейшего анализа проведем в правой части уравнения(49) замену

$$r^4 \to r_*^2 r^2. \qquad (52)$$

В результате это уравнение принимает вид

$$\left(D + k_0^2\right)F = -\gamma_0 r^2 \qquad (53)$$

В качестве величины r_* выберем корень квадратный из среднего по толщине слоя жидкости значения квадрата радиуса:

$$r_* = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}. \qquad (54)$$

Очевидно, что замена (52) приближенно корректна при выполнении неравенства

$$\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right) << 1. \qquad (55)$$

Рассмотрим следующее частное решение уравнения (53):

$$F = -\frac{\gamma_0}{k_0^2} r^2 + r\left[C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)\right]\cos k_z z,$$

$$\kappa^2 = k_0^2 - k_z^2. \qquad (56)$$

Здесь J_1 и N_1 – функции Бесселя и Неймана первого порядка; C_1 и C_2 – произвольные постоянные. На основе соотношения (54) получаем слудующие выражения для компонент скорости:

$$v_z = -\frac{2\gamma_0}{k_0^2} + \kappa\left[C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)\right]\cos k_z z,$$

$$v_r = k_z\left[C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)\right]\sin k_z z,$$

$$v_\varphi = \frac{\sqrt{q_0^2 + k_0^2 F^2}}{r}. \qquad (57)$$

Учтем выражение (57) для v_r в условиях

$$r = r_1, r_2; \qquad v_r = 0. \qquad (58)$$

В результате получим следующую систему однородных уравнений:

$$J_1(\kappa r_1)C_1 + N_1(\kappa r_1)C_2 = 0,$$

$$J_1(\kappa r_2)C_1 + N_1(\kappa r_2)C_2 = 0. \qquad (59)$$

Условие разрешимости системы уравнений (58) имеет вид

$$J_1(\kappa r_1)N_1(\varepsilon\kappa r_1) - N_1(\kappa r_1)J_1(\varepsilon\kappa r_1) = 0,$$

$$\varepsilon \equiv \frac{r_2}{r_1}. \qquad (60)$$

Из уравнения (60) можно определить зависимость

$$\kappa r_1 = \alpha(\varepsilon). \qquad (61)$$

Соотношения (56) и (61) описывают в системе отсчета, связанной с волной, распространение вдоль оси z волны конечной амплитуды в цилиндрическом слое идеально проводящей жидкости постоянной плотности с неоднородным по толщине слоя вращением, определяемым третьим из выражений (57). Придадим выражению (61) вид, аналогичный виду дисперсионного соотношения для известных внутренних гравитационных и гироскопических волн [3, 22, 27, 30, 32, 55]. Из выражения (57) для v_z имеем

$$\frac{2\gamma_0}{k_0^2} = V_\Phi, \qquad (62)$$

где V_Φ – фазовая скорость волны. Пусть заданы угловые скорости вращения жидкости при $r = r_1$ и $r = r_2$:

$$\frac{v_\varphi}{r}|_{r_1, r_2} = \omega_{*1}, \omega_{*2} \qquad (63)$$

Подставляя выражения (56) и (57) в условия (63), с учетом соотношений (59), имеем

$$q_0^2 + r_1^4\frac{\gamma_0^2}{k_0^2} = \omega_{*1}^2 r_1^4,$$

$$q_0^2 + r_2^4\frac{\gamma_0^2}{k_0^2} = \omega_{*2}^2 r_2^4. \qquad (64)$$

Вычитая из левой и правой частей второго соотношения (64) соответственно левую и правую части первого соотношения (64), получаем

$$\left(r_2^4 - r_1^4\right)\frac{\gamma_0^2}{k_0^2} = \omega_{*2}^2 r_2^4 - \omega_{*1}^2 r_1^4. \qquad (65)$$

Исключим величину γ_0 из соотношения (65) с помощью выражения (62) и из получившегося соотношения определим величину k_0. В результате получим

$$k_0 = \frac{2\Omega_*}{V_\Phi}, \qquad \gamma_0 = \frac{2\Omega_*^2}{V_\Phi},$$

$$\Omega_* \equiv \sqrt{\frac{\omega_{*2}^2 r_2^4 - \omega_{*1}^2 r_1^4}{r_2^4 - r_1^4}}. \qquad (66)$$

Учитывая выражения (66) в одном из соотношений (64), запишем

$$q_0^2 = \frac{\omega_{*1}^2 - \omega_{*2}^2}{r_2^4 - r_1^4} r_1^4 r_2^4. \qquad (67)$$

Из условий положительности правых частей соотношений (65) и (67) следуют неравенства

$$\frac{r_2^4}{r_1^4} > \frac{\omega_{*1}^2}{\omega_{*2}^2} > 1. \qquad (68)$$

Обратимся к соотношению (61). С учетом выражений (56) и (61) придадим ему форму

$$\gamma_\omega = \frac{\bar{k}_z}{\sqrt{\alpha^2(\varepsilon) + \vec{k}_z^2}}, \quad \gamma_\omega \equiv \frac{\omega}{2\Omega_*}, \quad \bar{k}_z = k_z r_1. \quad (69)$$

Решая уравнение (69) относительно волнового числа и выражая в получившемся соотношении волновое число через длину волны λ, находим

$$\bar{\lambda} = \frac{\sqrt{1-\gamma_\omega^2}}{\alpha(\varepsilon)\gamma_\omega}, \qquad \bar{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{2\pi r_1}. \qquad (70)$$

Сравнивая зависимости (69) и (70) с соответствующими зависимостями для известных внутренних гравитационных и гироскопических линейных [3, 22, 27] и нелинейных [30, 32, 38, 54, 55, 58] волн, убеждаемся в их полной аналогии. Анализ, проведенный на основе соотношений (61) и (70), показал, что величина λ является убывающей функцией параметров γ_ω и n, где n – номер гармоники, и нарастающей функцией параметра ε. Примеры дисперсионных зависимостей (70) представлены на рис. 1.

Как можно видеть из выражений (50) и уравнения (51), существование рассмотренных в данном параграфе волн обусловлено определенной стратификацией по модифицированной функции F обобщенного импульса единицы массы жидкости и напряженности магнитного поля.

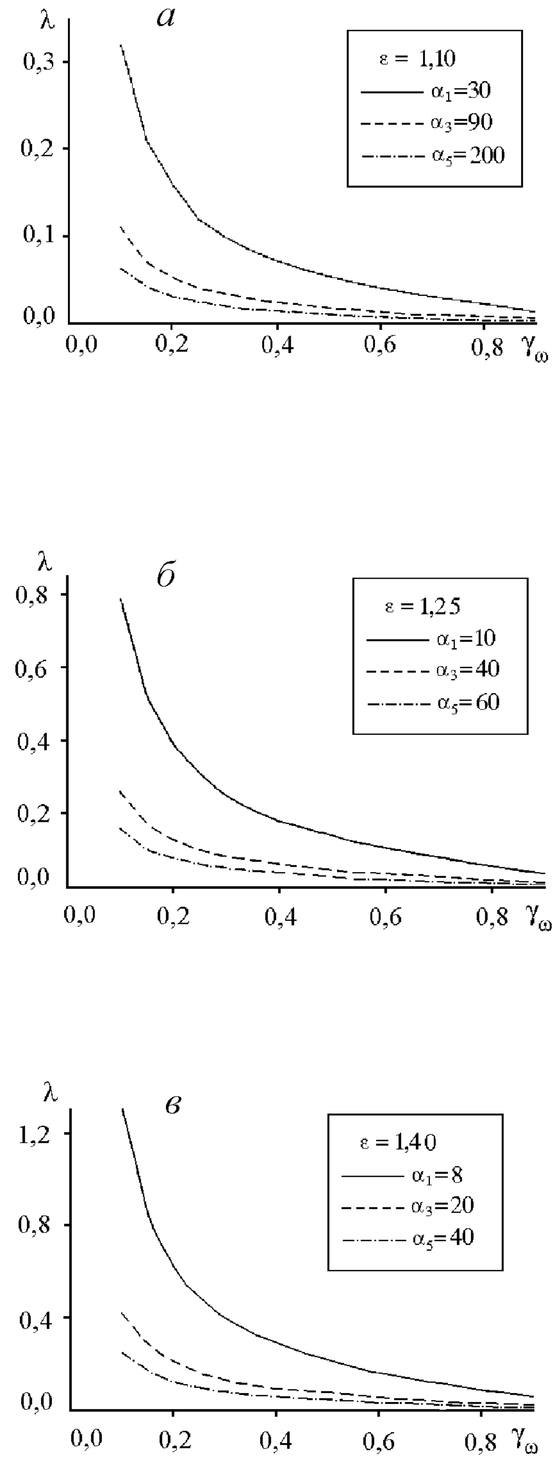

Рис. 1. Зависимости длины волны от частоты:
а $-\epsilon = 1.1$, б $-\epsilon = 1.25$, в $-\epsilon = 1.4$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Осуществлен аналог преобразования Громеки в двухпараметрической стационарной задаче магнитной гидродинамики неоднородной вращающейся жидкости. Получены интегралы симметрии (соотношения, выражающие плотность, аналог функции Бернулли, третьи компоненты скорости и напряженности магнитного поля, магнитный и электрический потенциалы через функцию тока, а также через третью компоненту векторного потенциала и коэффициент Ламе h_3, являющиеся заданными функциями пространственных координат x_1 и x_2). С помощью интегралов симметрии задача сведена к одному нелинейному уравнению в частных производных второго порядка, служащему для определения функции тока ψ.

2. Введена модифицированная функция тока $F = F(\psi)$. Зависимость $F = F(\psi)$ выбрана такой, что коэффициент при $(\nabla F)^2$ в уравнении для модифицированной функции тока обращается в нуль. В результате задача сведена к квазилинейному уравнению в частных производных второго порядка. Это уравнение включает в себя две заданные функции координат (скалярный $G(x_1, x_2)$ и векторный $\vec{W}(x_1, x_2)$ потенциалы внешних объемных сил) и произвольно заданные функции модифицированной функции тока: плотность $\rho(F)$, аналог функции Бернулли $w_{em}(F)$, третью компоненту обобщенного импульса единицы массы жидкости $q(F)$, магнитный потенциал $A(F)$ и электрический потенциал $\Phi_e(F)$. Произвол в выборе зависимостей $\rho(F)$, $w_{em}(F)$, $q(F)$, $A(F)$ и $\Phi_e(F)$ может быть использован для аппроксимации реальных параметров среды. При определенном задании этих зависимостей уравнение для модифицированной функции тока становится линейным, что предоставляет существенные преимущества в решении краевых задач.

3. Рассмотрены волны конечной амплитуды в замагниченном вращающемся цилиндрическом слое однородной жидкости. Существование этих волн обусловлено определенной стратификацией по модифицированной функции тока F обобщенного импульса единицы массы жидкости и напряженности магнитного поля. При этом роль гравитационного ускорения играет центростремительное ускорение. Отмечено, что полученное дисперсионное соотношение полностью аналогично дисперсионному соотношению (138) и (154) работы [55]. Отмечено также, что существование внутренних волн, описываемых дисперсионным соотношением (138) и (154) работы [55], обусловлено определенной стратификацией по модифицированной функции тока F обобщенного импульса единицы массы жидкости и функции Бернулли.

Авторы посвящают это исследование памяти И. С. Громеки. В 2001 году исполнилось 150 лет со дня его рождения (08.02.1851 г.), а в 2002 – 120 лет со времени опубликования им мемуара "Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости".

1. *Бетчэлор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 600 с.
2. *Биркгоф Г.* Гидродинамика.– М.: Изд–во иностр. лит., 1963.– 244 с.
3. *Бреховских Л. М., Гончаров В. В.* Введение в механику сплошных сред.– М: Наука, 1982.– 366 с.
4. *Бруяцкий Е. В.* Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов.– Киев: Ин–т гидромеханики НАН Украины, 2000.– 444 с.
5. *Васильев О. Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков.– М.: Госэнергоиздат, 1958.– 144 с.
6. *Волшаник В. В., Зуйков А. Л., Мордасов А. П.* Закрученные потоки в гидротехнических сооружениях.– М.: Энергоатомиздат, 1999.– 280 с.
7. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки.– Новосибирск: Наука. СО, 1981.– 368 с.
8. *Громека И. С.* Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости // Собрание сочинений.– М.: Изд–во АН СССР.– 1952.– С. 76–148.
9. *Ерманюк Е. В., Гаврилов Н. В.* О колебаниях цилиндров в линейно стратифицированной жидкости // ПМТФ.– 2002.– 43, N 4.– С. 15–26.
10. *Жуковский Н. Е.* Избранные сочинения, Т. 2.– М.; Л: Гостехтеориздат, 1948 .– 424 с.
11. *Жуковский Н. Е.* Избранные сочинения, Т. 1.– М.; Л: Гостехтеориздат, 1948 .– 392 с.
12. *Келдыш М. В., Седов Л. И.* Приложения теории функции комплексного переменного в гидродинамике и аэродинамике // В кн.: М. В. Келдыш Избранные труды.– М.: Наука.– 1985.– С. 160–186.
13. *Кирхгоф Г.* Механика.– М.: Изд–во АН СССР, 1962.– 404 с.
14. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, Т.1.– М.–Л.: Гостехтеориздат, 1948.– 536 с.
15. *Кочина П. Я.* Избранные труды. Гидродинамика и теория фильтрации.– М.: Наука, 1991.– 352 с.
16. *Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1965.– 680 с.
17. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели.– М.: Наука, 1973.– 416 с.
18. *Ламб Г.* Гидродинамика.– М.–Л.: Гостехтеориздат, 1947.– 928 с.

19. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика.– М.: Наука, 1986.– 736 с.
20. *Лебединский А. В.,Франкфурт У.И., Френк А. М.* Гельмгольц.– М.: Наука, 1966.– 320 с.
21. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
22. *Мадерич В. С., Никишов В. И., Стеценко А. Г.* Динамика внутреннего перемешивания в стратифицированной среде.– Киев: Наук. думка, 1988.– 240 с.
23. *Макаренко Н. И.* Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // ПМТФ.– 1999.– 40, N 2.– С. 69–78.
24. *Мартынов Ю. В.* О некоторых обобщениях задачи о сферических вихрях // ПМТФ.– 1974.– N 2.– С. 56–59.
25. *Мелешко В. В., Константинов М. Ю.* Динамика вихревых структур.– Киев: Наук. думка, 1993.– 280 с.
26. *Милн–Томсон Л. М.* Теоретическая гидродинамика.– М.: Мир, 1964.– 656 с.
27. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане.– Л.: Гидрометеоиздат, 1981.– 304 с.
28. *Никифорович Е. И., Приходько Н. А., Федоровский А. Д.* Процессы переноса в системах газ–жидкость.– Киев: Наук. думка, 1988.– 256 с.
29. *Садовский В. С.* Плоские вихрепотенциальные течения невязкой жидкости и их приложения // Труды ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского.– 1989.– Вып. 2447.– С. 108.
30. *Салтанов Н. В.* Аналитическая гидромеханика.– Киев: Наук. думка, 1984.– 200 с.
31. *Салтанов Н. В.* Влияние вторичного течения у полусферы на плоскости на силу разрежения, действующую на нее со стороны потока // Математ. моделир. в образовании, науке и промышленности.– Сб.научн.трудов.-Санкт-Петербургское отделение МАН.- Высш. шк.– 2000.– С. 164–167.
32. *Салтанов Н. В., Горбань В. А.* Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– Киев: Наук.думка, 1993.– 244 с.
33. *Салтанов Н. В., Ефремова Н. С., Салтанов В. Н.* Численно–аналитическое исследование потенциального обтекания цилиндра, окруженного вихревым слоем // Труды Международной конференции "Математика в индустрии".– Таганрог: Пед. ин–т.– 1998.– С. 275–277.
34. *Салтанов Н. В., Ефремова Н. С., Салтанов В. Н.* Вторичный поток вокруг цилиндра при наличии азимутальной закрутки и его связь с вихрем Чаплыгина // Нелинейные граничные задачи матем. физики и их приложение.– Сб. научн. трудов Института математики НАНУ.– 1999.– С. 213–216.
35. *Салтанов Н.В., Ефремова Н. С., Салтанов В. Н.* Вторичное течение вокруг сферы при наличии спиральности // Доклады НАН Украины.– 1999.– 9.– С. 59–63.
36. *Салтанов Н. В., Салтанов В. Н.* Вихрь с азимутальной закруткой на сфере во внешнем потенциальном потоке и его связь с вихрем Хилла // ДАН (Россия).– 1999.– 367, N 3.– С. 349–352.
37. *Салтанов Н. В., Салтанов В. Н.* Вторичное течение у полуцилиндра на плоскости // Проблемы теор. и прикл. гидродинамики.– Тезисы докл. Всерос.научн.- техн. конф. - Краснодар: Кубанск.гос. агр. ун-т.– 2000.– С. 27.
38. *Салтанов Н. В., Шестопал П. А.* Волны конечной амплитуды во вращающемся цилиндрическом слое неоднородной и однородной жидкости // Гидромеханика.– 1995.– N 69.– С. 28–32.
39. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.– М.: Наука, 1966.– 448 с.
40. *Селезов И. Т., Корсунский С. В.* Нестационарные и нелинейные волны в электропроводящих средах.– Киев: Наук. думка, 1991.– 200 с.
41. *Степанов Г. Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин.– М.: Физматгиз, 1962.– 512 с.
42. *Сычев В.В., Рубан А.И., Королев Г.Л.* Асимптотическая теория отрывных течений.– М.: Наука, 1987.– 256 с.
43. *Таганов Г. И.* О предельных течениях вязкой жидкости со стационарными срывными зонами при $Re \to \infty$ // Уч. зап. ЦАГИ.– 1971.– 1, N 3.– С. 1–14.
44. *Ткалич В. С.* Стационарные с циклической координатой задачи анизотропно проводящих жидкостей. Обтекание тел. Волноводы // Современные вопросы гидродинамики.– Киев: Наук. думка.– 1967.– С. 66–87.
45. *Чаплыгин С. А.* Один случай вихревого движения жидкости //Собрание сочинений. Т.II..– М.–Л.: Гостехтеориздат, 1948.– 155–165 с.
46. *Чаплыгин С. А.* Избранные труды по математике и механике.– М: Гостехтеориздат, 1954.– 568 с.
47. *Ярмицкий А. Г.* Обобщение классических задач гидромеханики вихревых течений.– Мариуполь: ПГТУ, 1997.– 140 с.
48. *Ярмицкий А. Г.* Спиральные волны в трехмерных винтовых течениях вязкой жидкости // Изв. РАН.– МЖГ.– 1998. N 5.– С. 25–29.
49. *Ярмицкий А. Г.* Истечение захкрученного потока жидкости через круговое отверстие в дне полубесконечного цилиндра (модификация одной задачи Слезкина) // Изв.РАН.– МЖГ.– 2002. N 2.– С. 90–96.
50. *Long R.R.* Some aspects of the flow of stratified fluids // Tellus.– 1953.– 5.– P. 42–58.
51. *Meleshko V.V. and van Heijst G. J. F.* On Chaplygin's investigations of two–dimensional vortex structures in an inviscid fluid // J.Fluid Mech.– 1994.– 272.– P. 157–182.
52. *Narimousa S., Long R. R., Kitaigorodsky S.* Entrainmet due to turbulent shear flow at the interface of a stably stratified fluid // Tellus.– 1986.– A38, N 1.– P. 76–87.
53. *Nigam S. D.* Motion of a body revolution in rotating fluid // Proc. Intern. Congr. Math. Vol. 2.– Amsterdam.– 1954.– P. 367–386.
54. *Rehm R. G.* A survey of selected aspects of stratified and rotating fluids // J. Res. Nat. Dur. Stand., B.– 1976.– 80, 3.– P. 353–402.
55. *Saltanov N. V. and Saltanov V. N.* To Magnetohydrodynamics of rotating nonhomogeneous Fluid in stationary case // Int. J. of Fluid Mech. Res.– 2001.– 28, N 3.– P. 410–433.
56. *Stepanov G. Yu.* The Wing Theory in the Works of N. E. Zhukovsky and S. A. Chaplygin // Int. J. of Fluid Mech. Res.– 1999.– 26, N 4.– P. 450–464.
57. *Van Heijst G. T. F.* Voortgezette Stromingsleer.– Eindhoven:: Technische Universitet, 1992.– 184 p.
58. *Yih C. – S.* Dynamics of nonhomogeneous Fluids // New York.– Academic Press.– 1989.– P. 316 p.