

Аналіз граничного стану циліндричних оболонок із тріщинами з урахуванням контакту берегів

І. П. Шацький, М. В. Маковійчук

Івано-Франківський сектор Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Івано-Франківськ, Україна

Досліджено напружено-деформований стан та граничну рівновагу циліндричних оболонок із тріщинами. Закриття тріщин, спричинене деформацією згином, урахується за допомогою моделі контакту берегів уздовж лінії. Із використанням енергетичного критерію руйнування побудовано діаграми граничної рівноваги для довільного співвідношення навантаження розтягом і згином.

Ключові слова: циліндрична оболонка, тріщина, контакт берегів, згин, міцність.

Вступ. Відомі розв'язки задач про згин оболоноквих елементів конструкцій з тріщиноподібними дефектами [1–4] є коректними за умови прикладання додаткових навантажень розтягу, необхідних для попередження контакту берегів тріщин. Дослідження неповного по товщині оболонки закриття тріщини у тривимірній постановці пов'язане зі значними обчислювальними труднощами. Заслужують на увагу підходи до наближеного розв'язання цієї проблеми в рамках класичної теорії оболонок.

У цьому повідомленні викладено методи і підсумовано результати досліджень напружено-деформованого стану та граничної рівноваги циліндричних оболонок із тріщинами за умови навантаження згином та при одночасному згині з розтягом (стиском). Закриття тріщин, спричинене деформацією згином, враховується за допомогою моделі контакту берегів [5]. Такий підхід дозволяє навіть у межах класичної теорії згину оболонок уникнути суперечностей, зумовлених взаємним прониканням протилежних країв тріщин у зоні стискальних напружень.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропну циліндричну оболонку радіусом R і товщиною $2h$, яка послаблена наскрізною тріщиною завдовжки $2l$, що розташована вздовж твірної або напрямної лінії. До країв тріщини прикладено рівні за значеннями та протилежно напрямлені згинальні моменти ($m = \text{const}$) і мембранні зусилля ($n = \text{const}$). На основі раніше запропонованої розрахункової схеми [5] в рамках теорії Кірхгоффа–Лява дослідимо вплив тріщини та контактної взаємодії її берегів на напружений стан і граничну рівновагу оболонки.

Припустимо, що оболонка в зоні збурення напружень полога, і введемо декартову систему координат $Oxuz$ із початком у центрі тріщини та віссю абсцис уздовж її лінії. Неповне по товщині закриття тріщини трактуємо як змикання її країв в одній з поверхонь оболонки $z = h$ або $z = -h$ (в залежності від знака моментів). З урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис задача зводиться до рівнянь статичної рівноваги оболонки з взаємозв'язаними мішаними крайовими умовами на розрізі [6]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta_k w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta_k\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2/L; \quad (1)$$

$$\begin{cases} [u_y] = h[\theta_y] > 0, & M_y = -m + h(n + N_y)\operatorname{sgn}[\theta_y], & N_y < 0, & x \in L_1; \\ M_y = -m, & N_y = -n, & [u_y] > h[\theta_y], & x \in L_2; \\ N_{xy} = 0, & Q_y^* = 0, & & x \in L; \end{cases} \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad Q_x^* = Q_y^* = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty, \quad (3)$$

де φ – функція напружень; w – прогин оболонки; $B = 2Eh$; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$; E ,

ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$;

$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – для поздовжніх, $\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – для поперечних тріщин; m, n –

параметри навантаження при згині та розтязі; $[u_y], [\theta_y]$ – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки та розрив кута повороту нормалі; N_x, N_{xy}, N_y – мембранні зусилля; M_x, M_{xy}, M_y – моменти; Q_x^*, Q_y^* – узагальнені поперечні сили; $L = (-l, l) = L_1 \cup L_2$ – контур тріщини; L_1 – лінія контакту берегів тріщини; L_2 – відкрита ділянка.

Інтегральні рівняння. Скористаємось інтегральними виразами зусиль та моментів через похідні від функцій стрибка [1, 3, 4]:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)c[\theta_y]'(\xi)\} d\xi;$$

$$M_y(x, 0) = \frac{Bc}{4\pi} \int_{-l}^l \{K_{31}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)c[\theta_y]'(\xi)\} d\xi,$$

де ядра $K_{ij}(\xi - x)$ виражаються через функції Кельвіна [1, 3] ($c = h\sqrt{3(1-\nu^2)}$), і зведемо задачу (1)–(3) до системи сингулярних інтегральних рівнянь з обмеженнями у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)c[\theta_y]'(\xi)\} d\xi = -n; \\ \frac{Bc}{4\pi} \int_{-l}^l \{K_{31}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)c[\theta_y]'(\xi)\} d\xi = -m; \end{cases} \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & [u_y](x) - h[\theta_y](x) \operatorname{sgn}[\theta_y](x) > 0, \quad x \in L_1; \\
 & [u_y](x) = h[\theta_y](x) \operatorname{sgn}[\theta_y](x); \\
 & - \operatorname{sgn}[\theta_y](x) \frac{Bh}{4\pi} \int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x)[u_y](\xi) - K_{13}(\xi - x)c[\theta_y](\xi)\} d\xi + \\
 & + \frac{Bc}{4\pi} \int_{-l}^l \{K_{31}(\xi - x)[u_y](\xi) - K_{33}(\xi - x)c[\theta_y](\xi)\} d\xi = \\
 & = -m + hn \operatorname{sgn}[\theta_y](x); \\
 & n + \frac{Bh}{4\pi} \int_{-l}^l \{K_{11}(\xi - x)[u_y](\xi) - K_{13}(\xi - x)c[\theta_y](\xi)\} d\xi \leq 0, \quad x \in L_2.
 \end{aligned} \right. \quad (46)$$

Точки розмежування областей L_1 , L_2 наперед невідомі і підлягають визначенню у ході розв'язання задачі. Окрім того, слід забезпечити додаткові умови:

$$[u_y](\pm l) = 0, \quad [\theta_y](\pm l) = 0.$$

Критерій руйнування. За стан граничної рівноваги оболонки з дефектами при комбінованому розтязі–згині приймали рівність потоку енергії у вершину тріщини його граничному значенню [3]:

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left\{ K_N^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right\} = 2\gamma^*, \quad (5)$$

де K_N , K_M – коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів,

$$\begin{aligned}
 K_N &= \mp \frac{B}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y](x); \\
 K_M &= \pm \frac{D(3-2\nu-\nu^2)}{4\sqrt{l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y](x);
 \end{aligned}$$

γ^* – ефективна поверхнева енергія матеріалу.

Аналіз результатів. Розв'язки системи інтегральних рівнянь (4) будували аналітично методом малого параметра та числовим методом квадратур.

Детально розглядали задачі чистого згину ($n = 0$) циліндричної оболонки з поперечним або поздовжнім розрізом [7, 8]. На основі енергетичного критерію (5) отримали значення руйнівного згинального моменту m_* (рис. 1). Для коротких тріщин побудували асимптотичні формули [5, 7, 8], що є зручними для інженерних оцінок руйнівних навантажень для поперечної та поздовжньої тріщин відповідно:

$$|m_*| = m^0 \sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}} \left[1 - \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2} \left[\frac{\pi}{64} (1+\nu+2\nu^2) + \right. \right.$$

$$+ \operatorname{sgn} m \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{1+\nu}{32} + \frac{1+\nu}{16} \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{8} \right) \Big] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \Big\};$$

$$m_* = m^0 \sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2} \left[\frac{\pi}{64} (7-\nu-10\nu^2) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \operatorname{sgn} m \sqrt{3(1-\nu^2)} \left(\frac{5+37\nu}{96} + \frac{1+5\nu}{16} \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{8} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right\},$$

де $m^0 = 2h^2 \sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$; $\lambda = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} l / \sqrt{Rh}$; $\ln \gamma_0 = 0,5772$ – стала Ейлера.

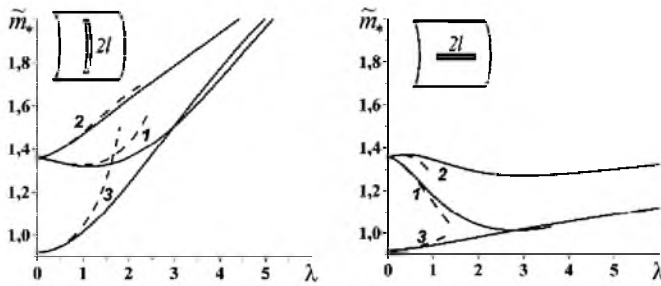


Рис. 1. Руйнівний момент для поперечної і поздовжньої тріщини: 1, 2 – з урахуванням контакту відповідно по внутрішній ($m > 0$) та зовнішній ($m < 0$) поверхнях оболонки; 3 – без урахування контакту; суцільні лінії – числові результати, пунктирні – асимптотичні ($\tilde{m}_* = |m_*|/m^0$).

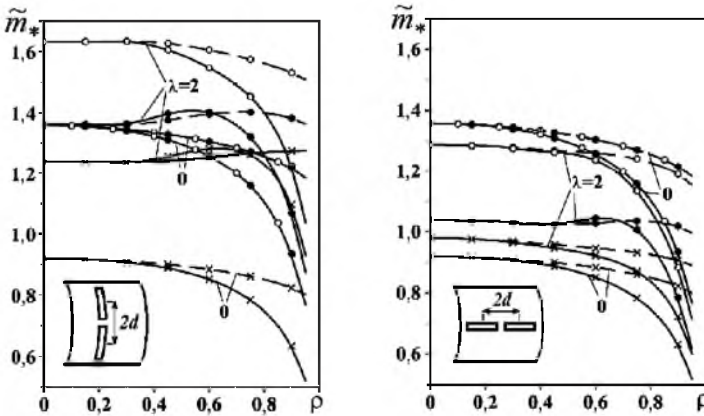


Рис. 2. Руйнівне навантаження для циліндричної оболонки з колінеарними тріщинами: ●, ○ – з урахуванням контакту відповідно при $m > 0$ та $m < 0$; × – без урахування контакту (суцільні лінії – внутрішні вершини тріщин, пунктирні – зовнішні).

Розглядали також задачі про згин циліндричної оболонки з двома однаковими поперечними або поздовжніми колінеарними дефектами, що взаємодіють між собою. Нехай $2d$ – відстань між центрами дефектів. Тоді у співвідношеннях (1), (2) слід прийняти $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$ – сукупність розрізів, а в інтегральних рівняннях (4) ядра $K_{ij}(\xi - x)$ замінити

$\tilde{K}_{ij}(\xi, x) = K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d)$ [9]. Залежності безрозмірних значень руйнівного навантаження від параметра взаємного розташування дефектів $\rho = l/d$ будували при фіксованих значеннях параметра кривини λ (рис. 2).

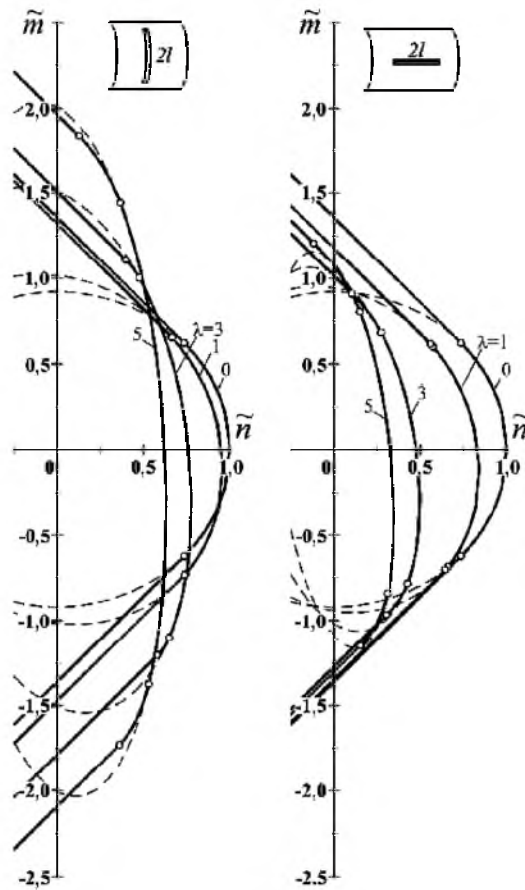


Рис. 3. Діаграми граничної рівноваги для циліндричних оболонок із тріщинами: суцільні лінії – з урахуванням закриття тріщини, штрихові – без урахування; $\tilde{n} = n/n^0$, $\tilde{m} = m/(hn^0)$, $n^0 = 2h\sqrt{2E\gamma^*}/(\pi l)$ – Гріффітсове зусилля розтягу для безмежної пластини з тріщиною.

Досліджували ефект закриття тріщини при двопараметричному навантаженні типу розтягу–згину [6]. На площині безрозмірних параметрів навантаження побудували діаграми граничної рівноваги за довільного співвідношення навантажень розтягу та згину (рис. 3).

Висновки

1. Розроблено модель контакту берегів тріщин уздовж лінії, що дозволило отримати розв’язки задач про згин циліндричних оболонок із тріщинами за відсутності кінематичних суперечностей.

2. Установлено, що контакт берегів тріщин при згині загалом призводить до підвищення рівня критичного навантаження і його немонотонної залежності від кривини оболонки.

3. Досліджено взаємодію колінеарних дефектів з урахуванням налягання їх поверхонь.

4. Побудовано діаграми граничної рівноваги циліндричних оболонок із поперечною та поздовжньою тріщиною за довільного співвідношення параметрів навантаження розтягу та згину.

5. Виявлено діапазон зміни параметрів комбінованого навантаження, в якому закриття тріщин призводить до зменшення несучої здатності оболонки.

Резюме

Исследованы напряженно-деформированное состояние и граничное равновесие цилиндрических оболочек с трещинами. Закрытие трещин вследствие деформации изгибом учитывается с помощью модели контакта берегов вдоль линии. С использованием энергетического критерия разрушения построена диаграмма граничного равновесия для произвольного соотношения нагружения растяжением и изгибом.

1. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
2. *Фолиас Е. С.* Разрушение сосудов высокого давления // Тонкостенные оболочечные конструкции. – М.: Машиностроение, 1980. – С. 481 – 508.
3. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
4. *Механика композитов: В 12 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя.* – Киев: Наук. думка, 1993. – Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с.
5. *Шацький І. П.* Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 164 – 173.
6. *Шацький І. П., Маковійчук М. В.* Контактна взаємодія берегів тріщин у пологих оболонках за згину з розтягом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 4. – С. 45 – 52.
7. *Шацький І. П.* Закриття поперечної тріщини при згині пологої циліндричної оболонки // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 2. – С. 149 – 154.
8. *Шацький І. П.* Закриття поздовжньої тріщини в пологій циліндричній панелі під час її згину // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – 41, № 2. – С. 45 – 48.
9. *Маковійчук М. В.* Інтегральні рівняння задачі про закриття колінеарних тріщин в пологій оболонці при згині // Конф. молодих учених із сучасних проблем механіки і математики ім Я. С. Підстригача: Тези доп. – Львів, 2005. – С. 80 – 81.

Поступила 05. 01. 2009