УДК 539.37

Построение определяющих соотношений изотропных упрочняющихся упругопластических материалов дифференциального типа сложности *n*. Сообщение 2. Бесконечно малые деформации

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

В рамках теории бесконечно малых деформаций разработан метод специализации построенных ранее автором физических уравнений изотропных упрочняющихся упругопластических материалов дифференциального типа сложности n для конечных деформаций. С использованием метода получен ряд определяющих соотношений в виде иерархии по уровню сложности реакции материала на деформирование. При $n = 1$ установлены условия существования поверхности нагружения.

Ключевые слова: определяющее соотношение, простой по Ноллу упрочняющийся упругопластический материал дифференциального типа сложности n, бесконечно малые деформации, изотропия, поверхность нагружения.

Ранее [1] с использованием подходов рациональной механики континуума разработана математическая теория строгого построения и специализации общих определяющих соотношений простых по Ноллу изотропных упрочняющихся упругопластических материалов дифференциального типа сложности n (аналоги твердых тел Ривлина–Эриксена сложности n) как наиболее важных представителей материалов с инфинитезимальной памятью формы траектории (памятью формы траектории на произвольно малом интервале прошлого). Деформации – конечные. Построена иерархия определяющих соотношений по уровню сложности реакции материала на деформирование.

В настоящей работе в рамках теории бесконечно малых деформаций разработан метод специализации построенных ранее [1] физических уравнений. С использованием метода получен ряд определяющих соотношений в виде иерархии по уровню сложности реакции материала на деформирование. При $n = 1$ установлены условия существования поверхности нагружения.

Построенные в [1] определяющие соотношения моделируют поведение широкого класса простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов с памятью формы траектории на произвольно малом интервале прошлого. Эти соотношения являются весьма сложными. В ряде случаев они могут быть упрощены посредством наложения ограничений на процесс деформирования и (или) свойства материала. В настоящей работе в качестве ограничения на процесс деформирования примем условие малости перемещений.

Построим, как и ранее [2], при заданном поле смещений $\mathbf{u}$ семейство полей смещений $\delta\mathbf{u}$ и рассмотрим связанные с ним величины в пределе при $\delta \to 0$. Индекс δ будем использовать для обозначения величин, определяемых по полю $\delta\mathbf{u}$. Например, для кинематических тензоров B_{ij}, $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$, $\widetilde{A}_{ij}^{(2)}$,..., $\widetilde{A}_{ij}^{(n)}$ [1] получим

$$B_{ij\,\delta}=\left(\delta_{ik}+\delta\frac{\partial u_i}{\delta X_k}\right)\left(\delta_{jk}+\delta\frac{\partial u_j}{\partial X_k}\right)=\delta_{ij}+\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)+0(\delta^2); \qquad (1)$$

$$\widetilde{A}_{ij\,\delta}^{(1)}=\delta\left(\frac{\partial\widetilde{V}_i^{(1)}}{\partial x_j}+\frac{\partial\widetilde{V}_j^{(1)}}{\partial x_i}\right); \qquad (2)$$

$$\widetilde{A}_{ij\,\delta}^{(r)}=\delta\left(\frac{\partial\widetilde{V}_i^{(r)}}{\delta x_j}+\frac{\partial\widetilde{V}_j^{(r)}}{\partial x_i}\right)+0(\delta^2), \qquad r=\overline{2,n}, \qquad (3)$$

где $u_i=x_i-X_i$ – компоненты $\mathbf{u}$; x_i и X_i – координаты частицы тела в системе отсчета в актуальной и отсчетной конфигурациях соответственно; $\widetilde{V}_i^{(1)}$, $\widetilde{V}_i^{(2)}$, ..., $\widetilde{V}_i^{(n)}$ – “скорость”, “ускорение”, ..., $(n-1)$-е “ускорение” рассматриваемой частицы тела в системе x_i в “момент” ξ; ξ – длина дуги траектории тензора деформаций Грина второго типа; δ_{ij} – компоненты символа Кронекера, определяемые следующим образом:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad i=j;\\ 0, & \text{если} \quad i\neq j.\end{cases}$$

Далее для обозначения равенства с точностью до $0(\delta^2)$ будем писать $\cong$. Тогда имеем

$$B_{ij\,\delta}\cong\delta_{ij}+\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right); \qquad (4)$$

$$\widetilde{A}_{ij\,\delta}^{(1)}=\delta\left(\frac{\partial\widetilde{V}_i^{(1)}}{\partial X_j}+\frac{\partial\widetilde{V}_j^{(1)}}{\partial X_i}\right); \qquad (5)$$

$$\widetilde{A}_{ij\,\delta}^{(r)}\cong\delta\left(\frac{\partial\widetilde{V}_i^{(r)}}{\partial X_j}+\frac{\partial\widetilde{V}_j^{(r)}}{\partial X_i}\right), \qquad r=\overline{2,n}. \qquad (6)$$

Анализ выражений (4)–(6) показал, что для заданного семейства полей смещений $\delta\mathbf{u}$ кинематические тензоры B_{ij}, $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$, $\widetilde{A}_{ij}^{(2)}$,..., $\widetilde{A}_{ij}^{(n)}$ при достаточно малом δ приближенно можно представить так:

$$B_{ij\,\delta}\cong\delta_{ij}+2\delta\varepsilon_{ij}; \qquad (7)$$

ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2009, № 4

$$\widetilde{A}_{ij\,\delta}^{(r)} \cong 2\delta\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(r)}, \qquad r = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где

$$\varepsilon_{ij} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right); \tag{9}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(r)} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{V}_i^{(r)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{V}_j^{(r)}}{\partial x_i}\right) \cong \frac{d^r \varepsilon_{ij}}{d\xi^r}; \tag{10}$$

ε_{ij}, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}$, ..., $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$ – тензоры бесконечно малой деформации, “скорости”, “ускорения”, ..., $(n-1)$-го “ускорения” деформации, называемые далее кинематическими тензорами бесконечно малых деформаций; $\dfrac{d^r}{d\xi^r}$ – r-я производная по ξ при X_j постоянных.

Обозначим через $\overline{\mathbf{p}}_i$ и $\overline{\mathbf{p}}_i^{(r)}$ тройки ортонормированных векторов главных направлений B_{ij} и $\widetilde{A}_{ij}^{(r)}$ $(r = \overline{1, n})$ соответственно. В отсчетной конфигурации, которая соответствует значению $\xi = 0$ и в которой полагаем, что среда находится в ненапряженном и недеформированном состоянии, положения $\overline{\mathbf{p}}_i$ и $\overline{\mathbf{p}}_i^{(r)}$ не определены. В дальнейшем будем считать $\overline{\mathbf{p}}_i$, $\overline{\mathbf{p}}_i^{(r)}$, B_{ij} и $\widetilde{A}_{ij}^{(r)}$ $(r = \overline{1, n})$ гладкими функциями ξ. Тогда аналогично работе [3] можно ввести тройки единичных векторов $\mathbf{p}_i$, $\mathbf{p}_i^{(r)}$, которые определяются как пределы $\overline{\mathbf{p}}_i$, $\overline{\mathbf{p}}_i^{(r)}$ при $\xi \to 0$. Из вышеизложенного и соотношений (7)–(10) следует, что с точностью до $0(\delta^2)$ главные оси того или иного тензора из ряда B_{ij}, $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$, $\widetilde{A}_{ij}^{(2)}$, ..., $\widetilde{A}_{ij}^{(n)}$ совпадают с главными осями соответствующего кинематического тензора бесконечно малых деформаций, а также что в случае малости перемещений можно пренебречь отличием пространственных координат от материальных и заменить $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$ величинами $2\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ [4].

Теорию, в которой справедливы соотношения (7)–(10), а также принятые выше условия для $\overline{\mathbf{p}}_i$, $\overline{\mathbf{p}}_i^{(r)}$, B_{ij} и $\widetilde{A}_{ij}^{(r)}$ $(r = \overline{1, n})$ назовем теорией бесконечно малых деформаций. Причем иногда для краткости эту теорию будем отождествлять с возможностью использования (7)–(10).

В рамках теории бесконечно малых деформаций уравнение (7) [1] запишем следующим образом [2]:

$$\sigma_{mk} \cong k_{mk}(\varepsilon_{ij}, \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}, \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}, \ldots, \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}). \tag{11}$$

Здесь σ_{mk} – тензор напряжений Коши (в дальнейшем – просто тензор напряжений); k_{mk} – симметричная изотропная тензорная функция кинематических тензоров бесконечно малых деформаций ε_{ij}, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}$, ..., $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$.

Уравнение (11) назовем формальным приближением определяющего соотношения аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n. Аналогично [1] матрицы тензоров σ_{mk}, ε_{ij}, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}$, ..., $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(n)}$ обозначим так:

$$\sigma = [\sigma_{mk}]; \tag{12}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_{ij}]; \qquad \tilde{\varepsilon}_r = [\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(r)}], \qquad r = \overline{1, n}. \tag{13}$$

(Здесь и далее будем рассматривать только симметричные тензоры второго ранга в трехмерном физическом пространстве.)

Как и в [5], под произведением тензоров $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ следует понимать композицию $\mathbf{LM}$, матрица которой равна произведению матрицы тензора $\mathbf{M}$ на матрицу тензора $\mathbf{L}$. Скалярное произведение тензора аналогично [5] определим следующим образом:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{M} \equiv tr(\mathbf{L}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{L},$$

где $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$ – транспонированный к $\mathbf{M}$ тензор.

Норма $|\mathbf{L}|$ тензора $\mathbf{L}$ определяется через скалярное произведение:

$$|\mathbf{L}| \equiv \sqrt{\mathbf{L} \cdot \mathbf{L}} = \sqrt{tr\mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}.$$

В компонентах запишем:

$$(\mathbf{LM})^i_j = [L^i_k M^k_j], \qquad \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} = L^k_j M^j_k, \qquad |\mathbf{L}| \equiv \sqrt{L^k_j L^j_k}.$$

Все последующие результаты, как и ранее [1], получены для процессов деформирования, т.е. в случае, когда тот или иной вид определяющего соотношения и условия его построения справедливы в течение конечного интервала изменения ξ.

Далее в качестве исходных примем уравнения [1]. Подставляя в эти соотношения зависимости (7)–(10), после преобразований получаем некоторые формы специализации определяющих соотношений теории бесконечно малых деформаций (формальные приближения определяющих соотношений).

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 0. Приняв справедливыми зависимости (7)–(10), уравнение (14) [1] запишем так:

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon + \eta_3 \varepsilon^2, \tag{14}$$

где $I = ||\delta_{ij}||$ – единичная матрица; η_i $(i = \overline{1, 3})$ с учетом ряда (15) [1] определяются такими инвариантами:

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3. \tag{15}$$

В соотношении (14) и далее вместо знака $\cong$ будем писать =. При этом учитываем, что уравнения теории бесконечно малых деформаций являются аппроксимацией определяющих соотношений аналогов твердых тел Ривлина–Эриксена различной сложности.

При принятых в теории бесконечно малых деформаций предположениях уравнение (16) [1] можно представить в виде

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon, \tag{16}$$

где η_i $(i = \overline{1, 2})$, принимая во внимание ряд (17) из [1], зависят от инвариантов $tr\,\varepsilon$, $tr\,\varepsilon^2$.

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 1. Для рассматриваемого тела форм-инвариант (19) [1] в рамках справедливости соотношений (7)–(10) приводится к виду

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon + \eta_3 \tilde{\varepsilon}_1 + \eta_4 \varepsilon^2 + \eta_5 \tilde{\varepsilon}_1^2 + \eta_6 \varepsilon * \tilde{\varepsilon}_1 +$$

$$+ \eta_7 \varepsilon^2 * \tilde{\varepsilon}_1 + \eta_8 \varepsilon * \tilde{\varepsilon}_1^2 + \eta_9 \varepsilon^2 * \tilde{\varepsilon}_1^2, \tag{17}$$

где звездочка, как и ранее [1], здесь и далее служит символом симметрирования, $\varepsilon * \tilde{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon \tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_1 \varepsilon)$; η_i $(i = \overline{1, 9})$ с учетом целого рационального базиса (20) [1] зависят от инвариантов

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1^2,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1^3,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_1^2,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_1^2. \tag{18}$$

При этом уравнение (22) [1] примет вид

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon + \eta_3 \tilde{\varepsilon}_1 + \eta_4 \varepsilon^2 + \eta_5 \varepsilon * \tilde{\varepsilon}_1 + \eta_6 \varepsilon^2 * \tilde{\varepsilon}_1, \tag{19}$$

где η_i $(i = \overline{1, 6})$ с учетом ряда (21) [1] зависят от инвариантов

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1^2,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_1^2,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_1^2. \tag{20}$$

Уравнение (24) [1] в рамках теории бесконечно малых деформаций запишем так:

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon + \eta_3 \tilde{\varepsilon}_1 + \eta_4 \varepsilon^2, \tag{21}$$

где η_i $(i = \overline{1, 4})$ с учетом ряда (23) [1] определяются инвариантами

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1^2,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_1. \tag{22}$$

Соотношение (26) с коэффициентами, определяемыми инвариантами (25) [1], в рамках теории бесконечно малых деформаций преобразуется к виду (14) с коэффициентами, зависящими от

$$tr\,\varepsilon,\;\; tr\,\varepsilon^2,\;\; tr\,\varepsilon^3,\;\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_1,\;\; tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_1,\;\; tr\,\varepsilon^2\widetilde{\varepsilon}_1. \tag{23}$$

Тогда уравнение (29) [1] запишем следующим образом:

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon + \eta_3 \widetilde{\varepsilon}_1, \tag{24}$$

где η_i $(i = \overline{1, 3})$ с учетом ряда (28) [1] определяются инвариантами

$$tr\,\varepsilon,\;\; tr\,\varepsilon^2,\;\; tr\,\varepsilon^3,\;\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_1,\;\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_1^2,\;\; tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_1. \tag{25}$$

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 2. Для рассматриваемого тела соотношение (34) [1] в рамках справедливости зависимостей (7)–(10) принимает вид

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon + \eta_3 \widetilde{\varepsilon}_1 + \eta_4 \widetilde{\varepsilon}_2, \tag{26}$$

где η_i $(i = \overline{1, 4})$ с учетом ряда (33) [1] зависят от инвариантов

$$\begin{gathered} tr\,\varepsilon,\; tr\,\varepsilon^2,\; tr\,\varepsilon^3,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_1,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_1^2,\; tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_1,\; tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_2,\; tr\,\varepsilon^2\widetilde{\varepsilon}_1, \\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_2,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_2^2. \end{gathered} \tag{27}$$

Как следует из [6], рассмотрением аналогов твердых тел Ривлина–Эриксена сложности 0, 1 и 2 можно ограничиться при построении наиболее важных в приложениях определяющих соотношений простых по Ноллу изотропных упрочняющихся упругопластических твердых тел дифференциального типа. Для полноты анализа рассмотрим случай деформирования аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n.

Аналог твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n. Ранее [1] показано, что в рамках теории бесконечно малых деформаций форм-инвариант для тензора напряжений, зависящего от $(n+1)$-го кинематического тензора, включает I, ε, $\widetilde{\varepsilon}_1$, $\widetilde{\varepsilon}_2$, ..., $\widetilde{\varepsilon}_n$ и другие тензоры, которые в силу громоздкости не приводятся, а коэффициенты форм-инварианта определяются, как следует из ряда (35) [1], следующими инвариантами:

$$\begin{gathered} tr\,\varepsilon,\; tr\,\varepsilon^2,\; tr\,\varepsilon^3,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_r,\; tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_r,\; tr\,\varepsilon^2\widetilde{\varepsilon}_r,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_r,\; tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_r,\; tr\,\varepsilon^2\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_r, \\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_n,\; tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_n,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_n,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_n,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_3\widetilde{\varepsilon}_n,\; tr\,\widetilde{\varepsilon}_4\widetilde{\varepsilon}_n,\; \sum,\quad r = \overline{1, n-1}, \end{gathered} \tag{28}$$

где $\sum$ – набор образованных из элементов $(n+1)$-й кинематической матрицы [1] в рамках теории бесконечно малых деформаций инвариантов, дополняющих совокупность из $(6n+3)$-х элементов (28) до полученных из целого рационального базиса (35) инвариантов.

В рамках теории бесконечно малых деформаций уравнение (38) [1] принимает вид

$$\sigma = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon + \eta_3 \tilde{\varepsilon}_1 + \eta_4 \tilde{\varepsilon}_2 + \eta_5 \tilde{\varepsilon}_3 + \eta_6 \tilde{\varepsilon}_4, \tag{29}$$

где η_i $(i = \overline{1, 6})$ с учетом ряда (37) [1] зависят от инвариантов

$$\begin{gathered} tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_r, \\ tr\,\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_3\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_4\tilde{\varepsilon}_n,\quad r = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{30}$$

Отметим, что соотношение (38) с коэффициентами, определяемыми инвариантами (37) [1], справедливо для аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n при выполнении в течение конечного интервала изменения ξ (процессе деформирования) условия (36) [1] и отсутствии нулевых недиагональных элементов $\bar{\tilde{A}}_{ij}^{(1)}$. (Здесь и далее, как и в [1], черточка над тензором или его компонентой обозначает их значение в главных осях B_{ij}.)

В случае, когда в процессе деформирования выполняется условие (36) [1] и один из недиагональных элементов $\bar{\tilde{A}}_{ij}^{(1)}$ равен нулю, в рамках справедливости соотношений (7)–(10) опять приходим к уравнению (29) с коэффициентами, зависящими с учетом инвариантов (39) [1] от

$$\begin{gathered} tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_r, \\ tr\,\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_3\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_4\tilde{\varepsilon}_n,\quad r = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{31}$$

Если для рассматриваемого тела в течение конечного интервала изменения ξ тензор B_{ij} обладает простым спектром, а B_{ij} и $\tilde{A}_{ij}^{(1)}$ имеют одно и только одно общее главное направление, то в рамках теории бесконечно малых деформаций с учетом данных [1] приходим к уравнению (26) с коэффициентами, определяемыми, как следует из ряда (40) [1], инвариантами

$$\begin{gathered} tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon^2\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_r, \\ tr\,\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_n,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_2\tilde{\varepsilon}_n,\quad r = \overline{1, n-1}. \end{gathered} \tag{32}$$

При $n = 2$ инварианты (32) и (27) совпадают.

Приняв во внимание данные [1], и, предположив в процессе деформирования простоту спектра тензора B_{ij}, а также соосность B_{ij} и $\tilde{A}_{ij}^{(1)}$, в рамках теории бесконечно малых деформаций приходим к уравнению (24) с коэффициентами η_i $(i = \overline{1, 3})$, зависящими, как следует из (41) [1], от

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon^3,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\varepsilon\tilde{\varepsilon}_r,\ tr\,\tilde{\varepsilon}_1\tilde{\varepsilon}_r,\quad r = \overline{1, n}. \tag{33}$$

При $n = 1$ инварианты (33) и (25) совпадают.

Полагая тензоры B_{ij} и $\widetilde{A}_{ij}^{(1)}$ осесимметричными, т.е. имеющими равных два и только два главных значения в течение конечного интервала изменения ξ, с учетом данных [1] в рамках теории бесконечно малых деформаций получаем уравнение (16) с коэффициентами, определяемыми согласно (42) [1] инвариантами

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_r,\quad tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_r,\quad r=\overline{1,n}. \tag{34}$$

При $n=0$ инварианты (34) приводятся к $tr\,\varepsilon$ и $tr\,\varepsilon^2$.

При построении приведенных выше определяющих соотношений в рамках теории бесконечно малых деформаций принимаем, что все слагаемые в уравнениях имеют одинаковый порядок малости.

Представленные выше определяющие соотношения получены при весьма общих предположениях о свойствах деформируемого тела, охватывают в рамках теории бесконечно малых деформаций целые классы моделей простых по Ноллу изотропных упрочняющихся упругопластических тел дифференциального типа различной сложности и являются весьма сложными для использования в приложениях. Поэтому выполним дальнейшее упрощение определяющих соотношений.

Предположение 1. Как и ранее [2], примем, что при построении определяющих соотношений некоторого класса простых по Ноллу изотропных упрочняющихся упругопластических тел дифференциального типа различной сложности спецификой структуры тензорного пространства, связанной с произведением тензоров, можно пренебречь.

Предположение 1, как следует из данных [7], позволяет исключить в приведенных выше уравнениях все элементы, образованные посредством умножения тензоров, т.е. оставить только “тензорно-линейные” слагаемые (слагаемые в виде произведения некоторого скалярного коэффициента на ту или иную матрицу из ряда $I,\ \varepsilon,\ \widetilde{\varepsilon}_1,\ \widetilde{\varepsilon}_2, \ldots,\ \widetilde{\varepsilon}_n$) и инварианты в форме $tr\,\varepsilon$, $tr\,\widetilde{\varepsilon}_l$, $tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_l$, $tr\,\widetilde{\varepsilon}_l\widetilde{\varepsilon}_k$, $l,k=\overline{1,n}$.

В случае справедливости предположения 1 соотношения (14) и (16) приводятся к форме (16) с зависящими от $tr\,\varepsilon$ и $tr\,\varepsilon^2$ коэффициентами. Причем определяющее соотношение (16) становится тензорно-линейным для всех процессов деформирования.

Поскольку уравнение (14) и инварианты (15) [1] представляют собой соответственно форм-инвариант и функциональный базис, (16) с зависящими от первых двух членов (15) коэффициентами описывает общий случай деформирования тела, подчиняющегося предположению 1 и уравнению (11) для $n=0$.

При этом зависимости (17), (19), (21) и (24) не отличаются одна от другой для сплошной среды, подчиняющейся предположению 1 и формальному приближению определяющего соотношения аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 1, а ее поведение в общем случае деформирования описывается соотношением (24) с коэффициентами, определяемыми инвариантами

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1^2. \tag{35}$$

В случае справедливости предположения 1 и уравнения (14) с зависящими от ряда (23) коэффициентами приходим к соотношению (16) с коэффициентами, определяемыми первыми четырьмя инвариантами (35).

С математической точки зрения уравнения (26) и (29) [1] равноценны в смысле строгости описания процесса деформирования аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 1. С прикладной точки зрения предпочтение отдавалось тензорно-линейному соотношению (29). Подобное заключение относится, конечно, и к соответствующим формам записи (26) и (29) [1] в виде (14) и (24) в рамках теории бесконечно малых деформаций. Однако кроме отмеченного ранее [1] преимущества тензорно-линейного уравнения с прикладной точки зрения при условии справедливости предположения 1 уравнение (24) приводится по сравнению с соотношением (14) к зависимости, более полно описывающей особенности поведения тела. Действительно, из (24) следует совпадающее с ним трехчленное соотношение, из (14) – двухчленное, включающее только два первых слагаемых (24). Причем коэффициенты последнего зависят лишь от первых четырех инвариантов ряда (35).

Вышеизложенное и анализ результатов [2] показывают, что при построении определяющих соотношений, подчиняющихся уравнению (11) и предположению 1 сплошных сред, в качестве исходных необходимо выбирать формальные приближения тех или иных физических уравнений аналогов твердых тел Ривлина–Эриксена различной сложности, правые части которых содержат для данных набора тензор-аргументов и размерности пространства напряжений максимально возможное число тензорно-линейных слагаемых, включающих кроме члена с единичной матрицей члены с матрицами кинематических тензоров бесконечно малых деформаций, расположенными в порядке их следования в (13). Тогда физические уравнения наиболее полно опишут особенности поведения тела и, как следует из [1], будут наиболее пригодными для приложений. При этом в общем случае деформирования достаточно рассмотреть только определяющее соотношение с числом слагаемых, равным размерности пространства напряжений. Далее физические уравнения разрабатываются с соблюдением отмеченных правил их построения.

С учетом вышеизложенного и данных [1] в общем случае деформирования тела, подчиняющегося предположению 1 и формальному приближению физического уравнения аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 2, приходим к соотношению в форме (26) с коэффициентами, зависящими, как следует из (27), от инвариантов

$$tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1^2,\ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_1,\ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_2,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_2,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_2,\ tr\,\widetilde{\varepsilon}_2^2. \qquad (36)$$

Рассмотрим сплошную среду, подчиняющуюся предположению 1 и формальному приближению определяющего соотношения аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности n.

В случае справедливости уравнения (29), выполнив аналогичный вышеизложенному анализ, получим, что это уравнение сохраняет свой вид, а его коэффициенты определяются посредством инвариантов

$$tr\,\varepsilon,\ \ tr\,\varepsilon^2,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_n,\ \ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_n,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_n,$$
$$tr\,\widetilde{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_n,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_3\widetilde{\varepsilon}_n,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_4\widetilde{\varepsilon}_n,\qquad r=\overline{1,\,n-1}, \tag{37}$$

как для случая зависимости коэффициентов от ряда (30), так и (31).

Как показывает анализ, соотношение (29) с коэффициентами, определяемыми инвариантами (37), описывает общий случай деформирования тела, подчиняющегося предположению 1 и уравнению (11).

При выполнении условий построения уравнения (26) с коэффициентами, определяемыми инвариантами (32), приняв справедливым предположение 1, приходим к сохранению формы последнего и зависимости коэффициентов от

$$tr\,\varepsilon,\ \ tr\,\varepsilon^2,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_n,\ \ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_n,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_n,$$
$$tr\,\widetilde{\varepsilon}_2\widetilde{\varepsilon}_n,\qquad r=\overline{1,\,n-1}. \tag{38}$$

При $n=2$ ряд (38) приводится к инвариантам (36).

В случае справедливости уравнения (24) с коэффициентами, зависящими от инвариантов (33), при выполнении предположения 1 получим сохраненную форму этого соотношения и зависимость его коэффициентов от

$$tr\,\varepsilon,\ \ tr\,\varepsilon^2,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\varepsilon\widetilde{\varepsilon}_r,\ \ tr\,\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{\varepsilon}_r,\qquad r=\overline{1,\,n}. \tag{39}$$

При $n=1$ инварианты (35) и (39) совпадают.

Выполнив подобный вышеизложенному анализ для процессов деформирования, которые описываются соотношением (16) с определяемыми рядом (34) коэффициентами, приходим к сохранению формы (16) и зависимости коэффициентов от инвариантов (34). При $n=0$ ряд (34) приводится к инвариантам $tr\,\varepsilon,\ tr\,\varepsilon^2$.

Прежде чем перейти к построению других форм специализации определяющих соотношений, проанализируем некоторые особенности поведения упругопластического материала при деформировании. Как следует из принятого определения упругопластического материала [1], его ключевыми свойствами, в частности, являются возможность тем или иным способом разделить деформацию на упругую и пластическую составляющие и наличие поверхности нагружения. Далее будем считать, что упругие компоненты деформации подчиняются законам деформирования упругого тела.

Запишем определяющее соотношение упругопластического материала в форме [8]

$$\sigma=\mathbf{G}(\mathbf{F}^{\xi}), \tag{40}$$

где $\mathbf{F}^{\xi}$ – параметризованная посредством ξ история изменения градиента деформации $\mathbf{F}$ (траектория деформирования).

Зафиксировав пластическую составляющую деформации, будем изменять упругую. По определению для материалов с упругопластическим поведением в этом случае имеет место пассивный (упругий) процесс деформирования на поверхности нагружения и внутри нее. С помощью развитого в [9–11] способа разделения конечных упругих и пластических деформаций и принципа независимости от системы отсчета [5] после преобразований получим

$$\sigma^{\mathbf{R}^*} = \widetilde{\mathbf{g}}(\overline{\mathbf{C}}^e), \tag{41}$$

где $\overline{\mathbf{C}}^e$ – вычисленный относительно разгруженной конфигурации правый тензор Коши–Грина упругих деформаций; $\mathbf{R}^*$ – тензор поворота главных осей деформации в точке $\mathbf{X}^*$ разгруженной конфигурации к главным осям в точке $\mathbf{x}$ актуальной конфигурации; $\widetilde{\mathbf{g}}$ – тензорная функция тензорного аргумента.

Уравнение (41) в общем случае включает зависимость упругих свойств материала от истории изменения пластических деформаций.

Аналогично [9–11] можно показать, что для континуумов с зависящими от истории изменения пластических деформаций и сохраняющими изотропию в процессе деформирования упругими свойствами уравнение (41) принимает вид

$$\sigma = \mathbf{g}(\overline{\mathbf{B}}^e), \tag{42}$$

где $\mathbf{g}$ – изотропная тензорная функция тензорного аргумента; $\overline{\mathbf{B}}^e$ – левый тензор Коши–Грина упругих деформаций, $\overline{\mathbf{B}}^e = \mathbf{R}^* \overline{\mathbf{C}}^e (\mathbf{R}^{\mathrm{T}})^*$. Причем, как показано в [9–11], в этом случае разгруженная конфигурация является неискаженной, согласно терминологии [5], и свободной от напряжений.

В рамках теории бесконечно малых деформаций с учетом ненапряженности и неискаженности разгруженной конфигурации, а также допущения о возможности линеаризации уравнения упругой связи соотношение (42) с использованием подобного [5] подхода может быть с точностью до бесконечно малых второго порядка малости записано в матричном виде так:

$$\sigma = \lambda^{\xi^p} (tr\, \varepsilon^e) I + 2\mu^{\xi^p} \varepsilon^e, \tag{43}$$

где ε^e – матрица упругой составляющей тензора бесконечно малой деформации; λ^{ξ^p}, μ^{ξ^p} – зависящие от истории изменения пластической составляющей деформации коэффициенты, вычисленные относительно данной разгруженной конфигурации и не изменяющиеся при фиксированном значении пластической деформации, т.е. на поверхности нагружения и внутри нее. При бесконечно малых деформациях не делают различия между актуальной, разгруженной и отсчетной конфигурациями и полагают первые две совпадающими с ненапряженной и недеформированной отсчетной конфигурацией.

В уравнении (43) и далее, как и ранее, в рамках теории бесконечно малых деформаций знак $\cong$ заменяем знаком =, учитывая приближенный характер зависимостей такой теории.

Для континуумов с независящими от истории изменения пластических деформаций упругими свойствами уравнение (43) принимает вид

$$\sigma = \lambda(tr\,\varepsilon^e)I + 2\mu\varepsilon^e, \tag{44}$$

где λ и μ – постоянные Ламе, вычисленные относительно отсчетной конфигурации.

Аналогично [12] можно показать, что

$$\lambda^{\xi^p} = \frac{\nu^{\xi^p} E^{\xi^p}}{(1+\nu^{\xi^p})(1-2\nu^{\xi^p})}; \qquad \mu^{\xi^p} = G^{\xi^p} = \frac{E^{\xi^p}}{2(1+\nu^{\xi^p})}, \tag{45}$$

где E^{ξ^p}, ν^{ξ^p} и G^{ξ^p} – коэффициенты, которые зависят от истории изменения пластической деформации и не изменяются при постоянном ее значении.

Тогда уравнение (43) с учетом (45) может быть преобразовано следующим образом:

$$\sigma = 2G^{\xi^p}\left[\frac{\nu^{\xi^p}}{1-2\nu^{\xi^p}}\varepsilon_0^e I + \varepsilon^e\right], \tag{46}$$

а шаровые компоненты тензора напряжения с использованием уравнения (46) определены так:

$$\sigma_{\text{ш}} = \frac{1}{3}\sigma_0 I = K^{\xi^p}\varepsilon_0^e I \tag{47}$$

или

$$\sigma_0 = 3K^{\xi^p}\varepsilon_0^e, \tag{48}$$

где σ_0, ε_0^e – первые инварианты тензоров напряжений и упругих деформаций соответственно, $\sigma_0 = tr\,\sigma$, $\varepsilon_0^e = tr\,\varepsilon^e$;

$$K^{\xi^p} = \lambda^{\xi^p} + \frac{2}{3}\mu^{\xi^p} - \tag{49}$$

модуль объемного сжатия, зависящий от истории изменения пластических деформаций.

Тогда компоненты девиатора напряжения с учетом (43) и (47) могут быть определены так:

$$s = \sigma - \frac{1}{3}\sigma_0 I = 2\mu^{\xi^p} e^e, \tag{50}$$

где s и e^e – матрицы девиаторов напряжений и бесконечно малых упругих деформаций соответственно,

$$e^e = \varepsilon^e - \frac{1}{3}\varepsilon_0^e I. \tag{51}$$

В случае независимости упругих свойств материала от истории изменения пластической деформации уравнение (49) примет вид

$$K^{\xi^p} = K = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

Разделим деформации на упругие и пластические составляющие. Тогда в рамках теории бесконечно малых деформаций, как следует из [13], с точностью до бесконечно малых второго порядка малости в системе координат x_i можно записать

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p; \\ \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^e + \varepsilon_{kk}^p; \\ e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p. \end{cases} \tag{52}$$

Здесь и далее индекс p обозначает пластическую составляющую деформации.

Формально можно предположить, что упругопластический материал в разгруженном состоянии сжимаемый или несжимаемый.

В первом случае имеем

$$\varepsilon_{kk}^p \neq 0, \tag{53}$$

и ε_{kk} согласно (52) включают в общем случае не равные нулю ε_{kk}^e и ε_{kk}^p.

Для несжимаемых в разгруженном состоянии упругопластических материалов получим

$$\varepsilon_{kk}^p = 0; \qquad \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^e; \qquad \varepsilon_{kk}^p = e_{kk}^p. \tag{54}$$

В последнем случае первый инвариант тензора деформации является упругим, а тензор пластических деформаций – девиатором.

Продолжим специализацию построенных ранее определяющих соотношений. Рассмотрим уравнение (29) с зависящими от инвариантов (37) коэффициентами. Заменим σ и каждую из матриц правой части (29):

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_0 I + s; \qquad \varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon_0 I + e; \qquad \tilde{\varepsilon}_1 = \frac{1}{3}\tilde{\varepsilon}_0^{(1)} I + \tilde{e}_1;$$

$$\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{1}{3}\tilde{\varepsilon}_0^{(2)} I + \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{\varepsilon}_n = \frac{1}{3}\tilde{\varepsilon}_0^{(n)} I + \tilde{e}_n,$$

где $\frac{1}{3}\varepsilon_0 I$, $\frac{1}{3}\tilde{\varepsilon}_0^{(1)} I$, $\frac{1}{3}\tilde{\varepsilon}_0^{(2)} I$, ..., $\frac{1}{3}\tilde{\varepsilon}_0^{(n)} I$ и e, $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, ..., $\tilde{e}_n$ – шаровые и девиаторные составляющие матриц кинематических тензоров бесконечно малых деформаций; $\varepsilon_0 = \varepsilon_{ll} = tr\,\varepsilon$, $\widetilde{\varepsilon}_0^{(1)} = \widetilde{\varepsilon}_{ll}^{(1)} = tr\,\widetilde{\varepsilon}_1, \ldots, \widetilde{\varepsilon}_0^{(n)} = \widetilde{\varepsilon}_{ll}^{(n)} = tr\,\widetilde{\varepsilon}_n$ – первые инварианты кинематических тензоров бесконечно малых деформаций;

$$\widetilde{\varepsilon}_0^{(i)} = \frac{d^i \varepsilon_0}{d\xi^i}; \qquad \widetilde{e}_i = \frac{d^i e}{d\xi^i}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Выполнив преобразования, и, приравняв шаровые и девиаторные составляющие правой и левой частей (29), получим

$$\sigma_0 I = \eta_1 I + \eta_2 \varepsilon_0 I + \eta_3 \widetilde{\varepsilon}_0^{(1)} I + \eta_4 \widetilde{\varepsilon}_0^{(2)} I + \eta_5 \widetilde{\varepsilon}_0^{(3)} I + \eta_6 \widetilde{\varepsilon}_0^{(4)} I, \tag{55}$$

$$s = \eta_2 e + \eta_3 \widetilde{e}_1 + \eta_4 \widetilde{e}_2 + \eta_5 \widetilde{e}_3 + \eta_6 \widetilde{e}_4, \tag{56}$$

где η_i $(i = \overline{1, 6})$ зависят от инвариантов (37).

Предположение 2. На основании данных [3, 14] полагаем, что девиатор напряжений при упругопластическом деформировании не зависит от первых инвариантов, а среднее напряжение – от девиаторных составляющих кинематических тензоров бесконечно малых деформаций. Это предположение для рассматриваемого здесь случая малых средних деформаций получило экспериментальное подтверждение в широком диапазоне изменения средних напряжений [3].

С учетом предположения 2 соотношения (55) и (56) примут вид

$$\sigma_0 I = \breve{\eta}_1 I + \breve{\eta}_2 \varepsilon_0 I + \breve{\eta}_3 \breve{\varepsilon}_0^{(1)} I + \breve{\eta}_4 \breve{\varepsilon}_0^{(2)} I + \breve{\eta}_5 \breve{\varepsilon}_0^{(3)} I + \breve{\eta}_6 \breve{\varepsilon}_0^{(4)} I; \tag{57}$$

$$s = \hat{\eta}_2 e + \hat{\eta}_3 \hat{e}_1 + \hat{\eta}_4 \hat{e}_2 + \hat{\eta}_5 \hat{e}_3 + \hat{\eta}_6 \hat{e}_4, \tag{58}$$

а их коэффициенты, принимая во внимание (37), зависят соответственно от ε_0, $\breve{\varepsilon}_0^{(1)}$, $\breve{\varepsilon}_0^{(2)}$, ..., $\breve{\varepsilon}_0^{(n)}$ и

$$\begin{gathered} tr\,e^2,\ tr\,e\hat{e}_r,\ tr\,\hat{e}_1\hat{e}_r,\ tr\,e\hat{e}_n,\ tr\,\hat{e}_1\hat{e}_n,\ tr\,\hat{e}_2\hat{e}_n,\ tr\,\hat{e}_3\hat{e}_n, \\ tr\,\hat{e}_4\hat{e}_n, \quad r = \overline{1, n-1}; \end{gathered} \tag{59}$$

$$\breve{\varepsilon}_0^{(i)} = \frac{d^i \varepsilon_0}{(d\xi_0)^i}; \qquad \hat{e}_i = \frac{d^i e}{(d\xi_D)^i} \qquad i = \overline{1, n}; \tag{60}$$

ξ_0 и ξ_D – длины дуг траекторий шарового тензора и девиатора бесконечно малой деформации.

При записи коэффициентов уравнений (57), (58), подчиняющихся предположению 2, использовалось разложение кинематических тензоров бесконечно малых деформаций на шаровые и девиаторные составляющие.

Как следует из [2], физическое соотношение (58) с коэффициентами, определяемыми инвариантами (59), допускает векторное представление, в частности в пространстве Ильюшина [15–17]. Для ряда материалов возможность такого представления обоснована экспериментально [16, 18–20].

Предположение 3. Полагаем, что предыстория изменения упругих составляющих тензора деформации не влияет на напряжения в упругопластическом материале.

Тогда уравнения (57) и (58) примут вид

$$\sigma_0 I = \overline{\overline{\eta}}_1 I + \overline{\overline{\eta}}_2 \varepsilon_0 I + \overline{\overline{\eta}}_3 \breve{\varepsilon}^{(1)}_{0_p} I + \overline{\overline{\eta}}_4 \breve{\varepsilon}^{(2)}_{0_p} I + \overline{\overline{\eta}}_5 \breve{\varepsilon}^{(3)}_{0_p} I + \overline{\overline{\eta}}_6 \breve{\varepsilon}^{(4)}_{0_p} I, \tag{61}$$

$$s = \eta'_2 e + \eta'_3 \hat{e}^p_1 + \eta'_4 \hat{e}^p_2 + \eta'_5 \hat{e}^p_3 + \eta'_6 \hat{e}^p_4, \tag{62}$$

где $\overline{\overline{\eta}}_i$ $(i = \overline{1, 6})$ зависят от ε_0, $\breve{\varepsilon}^{(1)}_{0_p}$, $\breve{\varepsilon}^{(2)}_{0_p}$, ..., $\breve{\varepsilon}^{(n)}_{0_p}$; η'_i $(i = \overline{2, 6})$ –

$$\begin{gathered} tr\, e^2,\ tr\, e\hat{e}^p_r,\ tr\, \hat{e}^p_1 \hat{e}^p_r,\ tr\, e\hat{e}^p_n,\ tr\, \hat{e}^p_1 \hat{e}^p_n,\ tr\, \hat{e}^p_2 \hat{e}^p_n, \\ tr\, \hat{e}^p_3 \hat{e}^p_n,\ tr\, \hat{e}^p_4 \hat{e}^p_n, \quad r = \overline{1, n-1}; \end{gathered} \tag{63}$$

$$\breve{\varepsilon}^{(l)}_{0_p} = \frac{d^l \varepsilon_{0_p}}{(d\xi_{0_p})^l}, \qquad \hat{e}^p_l = \frac{d^l e^p}{(d\xi^p)^l}, \qquad l = \overline{1, n};$$

ξ_{0_p} и ξ^p – длины дуг траекторий шарового тензора и девиатора бесконечно малой пластической деформации соответственно.

Под предысторией изменения упругих составляющих тензора деформации следует понимать всю историю изменения упругой составляющей тензора деформации, за исключением ее значения в конце процесса деформирования.

Предположение 4. Полагаем упругопластический материал несжимаемым в разгруженном состоянии (пластически несжимаемым). Такое предположение экспериментально обосновано для целого ряда материалов [4, 21–23].

При условии справедливости предположения 4 выполняются соотношения (54), уравнение (62) не изменится, а зависимость (61), с учетом данных [24], с точностью до $O(\delta^2)$ запишем так:

$$\sigma_0 = 3K\varepsilon_0. \tag{64}$$

В (64) модуль объемного сжатия не зависит от истории изменения пластических деформаций. Это следует из того, что при активном деформировании среднее напряжение согласно предположению 2, как следует из (57), зависит только от истории изменения шарового тензора бесконечно малой деформации, включающего упругую и пластическую составляющие. Тогда для материала, подчиняющегося предположению 3, среднее напряжение зависит только от шарового тензора бесконечно малой деформации в конце процесса деформирования и предыстории изменения его пластической составляющей. При выполнении предположения 4 среднее напряжение зависит только от упругой составляющей шарового тензора бесконечно малой деформации в конце процесса деформирования и не зависит от истории изменения пластической деформации. С учетом вышеизложенного получим

$$K^{\xi^p} = K. \tag{65}$$

Далее ограничимся рассмотрением аналога твердого тела Ривлина–Эриксена сложности 1, для которого уравнение (62) примет вид

$$s = \eta'_2 e + \eta'_3 \hat{e}_1^p, \tag{66}$$

где η'_2 и η'_3, как следует из (63), зависят от инвариантов

$$tr\, e^2, \;\; tr\, e\hat{e}_1^p. \tag{67}$$

При записи (67) принято во внимание условие

$$tr\, (\hat{e}_1^p)^2 = 1. \tag{68}$$

Разложим в (66) и (67) девиатор деформации на упругую и пластическую составляющие и выразим на основе закона Гука девиатор упругой составляющей деформации через девиатор напряжений. Затем, решив полученное алгебраическое уравнение относительно девиатора напряжений, из (66) получим

$$s = f(e^p, \hat{e}_1^p), \tag{69}$$

где вид и свойства тензорной функции f зависят от η'_2 и η'_3 (66).

Приведенные выше определяющие соотношения упругопластического материала построены отдельно для активного и пассивного участков деформирования, что обусловлено различной реакций материала на этих участках. Построенных определяющих соотношений не всегда достаточно для описания произвольных процессов деформирования упругопластического материала. В ряде случаев их необходимо дополнить условием текучести (поверхностью нагружения) и законом течения. Возможность введения поверхности нагружения, как отмечалось ранее [1], следует из ключевых свойств упругопластического материала как материала с поверхностью нагружения. Для активных процессов деформирования нет необходимости вводить поверхность нагружения. Это связано с тем, что в активных процессах деформирования напряжения в упругопластическом материале в каждой точке траектории деформации соответствуют точке нагружения – точке, которая принадлежит поверхности нагружения.

Далее ограничимся анализом физического уравнения (69).

Рассмотрим пятимерное девиаторное пространство напряжений. Расписав (69) покомпонентно, получим пять линейно независимых уравнений:

$$s_{ij} = f_{ij}(e_{kl}^p;\ \hat{e}_{1mn}^p). \tag{70}$$

Поскольку траекторию пластической деформации полагают заданной вплоть до заданного ξ^p в конце процесса деформирования, все e_{kl}^p при фиксированном значении ξ^p в правых частях (70) являются известными. В левосторонней окрестности $(\xi^p - 0)$ конца рассматриваемой траектории известны также все $\hat{e}_{1mn}^p$. Таким образом, с помощью (70) получим вполне определенную изображающую точку в девиаторном пространстве, соответствующую девиатору напряжений при заданном значении ξ^p.

Предположим, что дальнейший путь деформирования в правосторонней окрестности $(\xi^p + 0)$ конца траектории пластической деформации не известен. Тогда в правой части (70) имеем e_{kl}^p – фиксированные параметры (константы) и $\hat{e}_{1mn}^p$ – произвольные или независимые параметры, причем из-за условия нормировки (68) число независимых параметров равно четырем, т.е. на единицу меньше размерности рассматриваемого девиаторного пространства напряжений. Таким образом, согласно [25] (70) представляют собой уравнения параметрически заданной поверхности нагружения в девиаторном пространстве напряжений для текущей изображающей точки ξ^p. В общем случае на активном участке деформирования поверхность нагружения для данного упрочняющегося упругопластического материала будет изменяться вместе с изменением ξ^p, на пассивном – оставаться неизменной.

Для более детального анализа свойств поверхности нагружения (замкнутость, выпуклость, гладкость, выполнение или нарушение ассоциированного закона течения и т.д.) необходима в большей или меньшей мере специализация функции f_{ij} (70), что связано с заданием функций η'_2 и η'_3 (66).

Автор признателен В. А. Ромащенко за анализ уравнения (69).

Резюме

У рамках теорії нескінченно малих деформацій розроблено метод спеціалізації побудованих раніше автором фізичних рівнянь ізотропних зміцнюваних пружно-пластичних матеріалів диференційного типу складності n для скінченних деформацій. Із використанням методу отримано ряд визначальних співвідношень у вигляді ієрархії за рівнем складності реакції матеріалу на деформування. При $n=1$ установлено умови існування поверхні навантаження.

1. *Лепихин П. П.* Построение определяющих соотношений изотропных упрочняющихся упругопластических материалов дифференциального типа. Сообщ. 1. Конечные деформации // Пробл. прочности. – 2009. – № 2. – С. 27 – 42.

2. *Лепихин П. П.* Структура определяющих соотношений вязкоупруговязкопластического состояния материалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 32 с.
3. *Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
4. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
5. *Truesdell C. and Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – Berlin: Springer, 1992.
6. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математическая теория неупругой сплошной среды. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 432 с.
7. *Новожилов В. В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 5. – С. 794 – 812.
8. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
9. *Lucchesi M. and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 1 // Arch. Rat. Mech. Analysis. – 1988. – **102**. – P. 23 – 43.
10. *Lucchesi M. and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 2 // Ibid. – 1990. – **110**. – P. 9 – 42.
11. *Lucchesi M., Owen D. R., and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 3. Approximate constitutive relations // Ibid. – 1992. – **117**. – P. 53 – 96.
12. *Блох В. И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1964. – 483 с.
13. *Casey J.* Approximate kinematical relation in plasticity // Int. J. Solids Struct. – 1985. – **21**, No. 7. – P. 671 – 682.
14. *Ильюшин А. А., Ленский В. С.* О соотношениях и методах современной теории пластичности // Успехи механики деформируемых сред. – М.: Наука, 1975. – С. 240 – 255.
15. *Ильюшин А. А.* Об основах общей теории пластичности // Вопр. теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 3 – 29.
16. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
17. *Ильюшин А. А.* О связи между напряжениями и деформациями в механике сплошных сред // Прикл. математика и механика. – 1954. – **18**, № 6. – С. 641 – 666.
18. *Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.

19. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопр. теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58 – 82.

20. *Ohashy Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metels // Memoirs of the Faculty of Engineering Nagoya University. – 1982. – **34**, No. 1. – P. 1 – 76.

21. *Ольшак В.*, *Мруз З.*, *Пежина П.* Современное состояние теории пластичности. – М.: Мир, 1964. – 243 с.

22. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

23. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 407 с.

24. *Трусделл С.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.

25. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 656 с.

Поступила 01. 02. 2008