

Методика определения закономерностей деформирования анизотропных материалов при кручении

В. С. Дзюба, Л. В. Кравчук

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Приведена методика определения закономерностей деформирования при кручении призматических образцов из анизотропного материала и построения диаграмм деформирования в этих условиях.

Ключевые слова: статическая прочность, кручение, модуль упругости, композиционные материалы, анизотропия.

Для расчета напряженно-деформированного и предельного состояний анизотропных материалов и выполненных из них конструктивных элементов необходимо знать модули упругости первого и второго рода (E , G), коэффициенты Пуассона (μ), диаграммы деформирования при растяжении, сжатии и кручении. Одним из способов нахождения модуля упругости при кручении (G) является расчетно-экспериментальный [1–3], который позволяет определять модули упругости G_1 и G_2 для анизотропного материала на призматических образцах. Достоинство метода состоит в использовании простой формы образцов, возможности определения G_1 и G_2 по данным двух или трех экспериментов, проводимых при одинаковых условиях нагружения (механическое и тепловое).

Ниже предлагается методика определения закономерностей деформирования при кручении призматических образцов из анизотропных материалов и построения диаграмм деформирования в этих условиях. Ее отличие от методики [2, 3] заключается в использовании и переработке результатов исследований [4, 5] по нагружению призматического бруса.

Эксперименты на кручение проводили на образцах из углерод-углеродного композиционного материала (УУКМ) – рис. 1 по схеме, показанной на рис. 2.

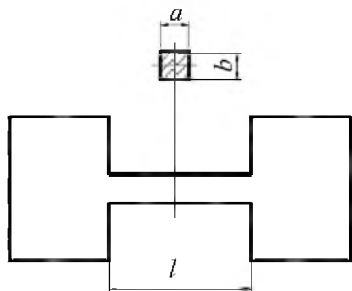


Рис. 1

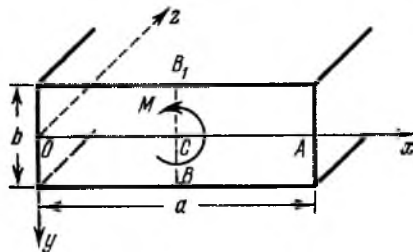


Рис. 2

Рис. 1. Форма образца для испытаний на кручение: a – ширина; b – высота; l – длина.

Рис. 2. Схема сечения рабочей зоны образца для испытаний на кручение.

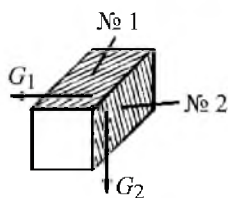


Рис. 3. Распределение модулей сдвига G_1 и G_2 на рабочей части образца.

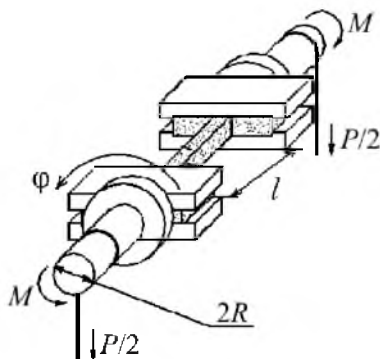


Рис. 4. Схема устройства для кручения.

В ходе эксперимента фиксировали нагрузку P и угол поворота образца φ . Касательные напряжения τ , угол сдвига h , модули упругости при кручении G (G_1, G_2) определяли с учетом представленных ниже соотношения [5]

$$h = \frac{\tau}{G} \quad (1)$$

и следующих обозначений: $\tau_{\max}^B, \tau_{\max}^A$ – напряжения в точках B и A соответственно (МПа); a – ширина образца; b – высота образца (рис. 2); G_1 – модуль сдвига на площадке № 1 (МПа); G_2 – модуль сдвига на площадке № 2 (рис. 3) (МПа); φ – угол поворота рабочей части образца; l – длина рабочей части образца; P – нагрузка; R – радиус вала (рис. 4); Θ – относительный угол закручивания (крутка – по Лехницкому [5]); M – крутящий момент,

$$\Theta = \frac{\varphi}{l}; \quad (2)$$

$$M = \frac{1}{2} P R; \quad (3)$$

$$g = \frac{G_2}{G_1}; \quad (4)$$

$$c = \frac{a}{b}; \quad (5)$$

$$d = \frac{c}{\sqrt{g}}; \quad (6)$$

$$\tau_{\max}^B = \frac{M}{ab^2} k_1; \quad (7)$$

$$\tau_{\max}^A = \frac{M}{ab^2 \sqrt{g}} k_2; \quad (8)$$

$$\Theta = \frac{M}{G_2 a b^3 \beta}, \quad (9)$$

где k_1, k_2, β – некоторые коэффициенты (функции параметра d).

Суть предлагаемой методики состоит в том, что на основании данных двух экспериментов, полученных на двух образцах (один с сечением $a_1 \times b_1$, другой с сечением $a_2 \times b_2$ (рис. 1)) из одного материала, строятся диаграммы деформирования при кручении для точек A и B соответственно: $\tau_A - h_1$ и $\tau_B - h_2$ (рис. 2).

Предлагаемая методика реализуется следующим образом.

1. Проводятся испытания на кручение двух образцов из одного материала, но с разным поперечным сечением. Из формул (5), (6) следует

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{c_1}{\sqrt{g}} \frac{\sqrt{g}}{c_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}. \quad (10)$$

2. Полученные текущие экспериментальные значения (в п. 1), а именно: M_1, M_2 (крутящие моменты), φ_1, φ_2 (углы поворотов рабочей части образцов), Θ_1, Θ_2 (относительный угол закручивания) подставляются в формулы (9)–(15) и затем определяется значение β_2/β_1 для данного случая.

2.1. По полученным экспериментальным данным (в соответствии с п. 1) строятся графики $M_1^{\text{эксп}} - \varphi_1^{\text{эксп}}$, $M_2^{\text{эксп}} - \varphi_2^{\text{эксп}}$.

2.2. Определяются относительные углы закручивания:

$$\Theta_1 = \frac{\varphi_1}{l}; \quad (11)$$

$$\Theta_2 = \frac{\varphi_2}{l}. \quad (12)$$

2.3. С использованием данных двух экспериментов (выполняя условие $M_1/M_{1p} = M_2/M_{2p}$, где M_{1p}, M_{2p} – значения крутящих моментов при разрушении образцов) при подстановке их в (9) получим

$$\Theta_1^{\text{эксп}} = \frac{M_1^{\text{эксп}}}{G_2 a_1 b_1^3 \beta_1^{\text{эксп}}}, \quad \Theta_2^{\text{эксп}} = \frac{M_2^{\text{эксп}}}{G_2 a_2 b_2^3 \beta_2^{\text{эксп}}}. \quad (13)$$

2.4. Используется отношение двух формул (13):

$$\frac{\Theta_1^{\text{эксп}}}{\Theta_2^{\text{эксп}}} = \frac{M_1^{\text{эксп}} a_2 b_2^3 \beta_2^{\text{эксп}}}{M_2^{\text{эксп}} a_1 b_1^3 \beta_1^{\text{эксп}}} \quad (14)$$

2.5. Из (14) определяется

$$\frac{\beta_2^{\text{эксп}}}{\beta_1^{\text{эксп}}} = \frac{M_2^{\text{эксп}} a_1 b_1^3 \Theta_1^{\text{эксп}}}{M_1^{\text{эксп}} a_2 b_2^3 \Theta_2^{\text{эксп}}} \quad (15)$$

3. По данным табл. 1 [5] строится табл. 2 для испытанных образцов, для которых (формула (10)) получим $d_2/d_1 = (a_2 b_1)/(a_1 b_2)$. Для условий проведенных экспериментов образцы имели следующие размеры: $a_1 = 6$ мм; $b_1 = 6$ мм; $a_2 = 10$ мм; $b_2 = 6$ мм, при этом $d_2/d_1 = 1,667$.

Т а б л и ц а 1

Значения коэффициентов d , β , k_1 , k_2 [2]

d	β	k_1	k_2	d	β	k_1	k_2
1,00	0,141	4,804	4,804	3	0,263	3,742	2,538
1,25	0,172	4,521	4,141	4	0,281	3,550	2,644
1,50	0,196	4,330	3,767	5	0,291	3,430	2,548
1,75	0,214	4,186	3,434	10	0,312	3,202	2,379
2,00	0,229	4,068	3,234	20	0,323	3,098	2,274
2,50	0,249	3,882	2,975	∞	0,333	3,000	0

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициентов d_1 , β_1 , d_2 , β_2 , β_2/β_1 для отношения $d_2/d_1 = 1,667$

d_1	β_1	d_2	β_2	β_2/β_1
1,0	0,141	1,667	0,208	1,4752
1,25	0,172	2,083	0,232	1,3388
1,50	0,196	2,499	0,249	1,2704
1,75	0,214	2,916	0,261	1,2196
2,0	0,229	3,332	0,269	1,1746
2,5	0,249	4,165	0,283	1,1365
3	0,263	4,998	0,291	1,1065
4	0,281	6,664	0,298	1,0605
5	0,291	8,330	0,305	1,0481
10	0,312	16,66	0,319	1,0224
20	0,323	33,33	0,333	1,0000
> 20	0,333	> 40	0,333	1,0000

Табл. 2 строится на основании данных табл. 1 следующим образом. Первый и второй столбцы табл. 2 (для 1-го образца d_1, β_1) полностью соответствуют первому и второму столбцам табл. 1; третий и четвертый столбцы табл. 2 (для 2-го образца, d_2, β_2) взяты также из табл. 1 (первый и второй столбцы), но с поправочным коэффициентом из формулы (10). Для проводимых экспериментов он составляет 1,667. Таким образом, в первой строке табл. 2 имеем $d_1 = 1; \beta_1 = 0,141; d_2 = 1,667; \beta_2 = 0,208$ ($d_2/d_1 = 1,667$), во второй – соответственно 1,25; 0,172; 2,083; 0,232 ($d_2/d_1 = 1,667$) и т.д. В пятом столбце табл. 2 приводятся отношения β_2/β_1 из рассматриваемой строки: например, в первой строке – $\beta_2/\beta_1 = 0,208/0,141 = 1,4752$, во второй – $\beta_2/\beta_1 = 0,232/0,172 = 1,3388$ и т.д.

Следовательно, табл. 2 строится на основании данных табл. 1, но для одного определенного отношения d_2/d_1 , которое было получено в эксперименте, проводимом на двух образцах (в нашем случае оно равно 1,667). Представленные на рис. 5 данные свидетельствуют об однозначной связи между параметрами d_1 и β_2/β_1 (табл. 2). Видно, что все кривые представляют собой плавные непересекающиеся линии. Это означает, что каждому значению d_1 соответствует одно значение β_2/β_1 , и наоборот, каждому значению β_2/β_1 соответствует единственное значение d_1 при данном отношении d_2/d_1 и при других отношениях d_2/d_1 оно не повторяется.

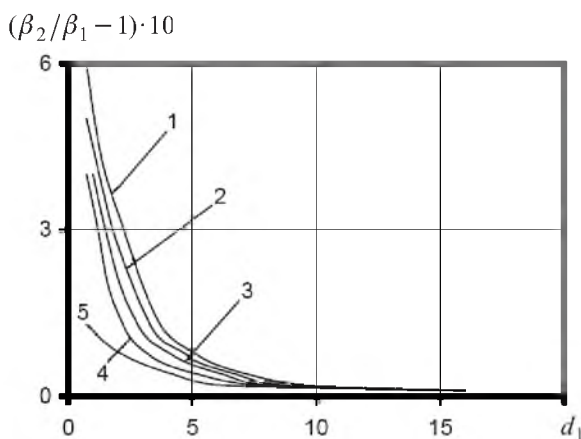


Рис. 5. Графическое представление связи между параметрами d_1 и β_2/β_1 при разных отношениях d_2/d_1 : 1 – $d_2/d_1 = 20$; 2 – $d_2/d_1 = 5$; 3 – $d_2/d_1 = 2$; 4 – $d_2/d_1 = 1,667$; 5 – $d_2/d_1 = 1,1$ (табл. 2).

4. С помощью данных табл. 2 находятся все необходимые коэффициенты ($d_1, d_2, \beta_1, \beta_2$) для дальнейших расчетов. Для этого по экспериментальным данным ($M_1^{\text{эксп}}, M_2^{\text{эксп}}, \Theta_1^{\text{эксп}}, \Theta_2^{\text{эксп}}, a_1, a_2, b_1, b_2$), полученным в соответствии с п. 2 данной методики, после их подстановки в (15) определяется $\beta_2^{\text{эксп}}/\beta_1^{\text{эксп}}$. Это значение подставляется в табл. 2 (столбец 5) и затем в этой же строке находятся искомые значения $d_1, d_2, \beta_1, \beta_2$.

Приведем пример. Предположим, что из (15) имеем $\beta_2^{\text{эксп}}/\beta_1^{\text{эксп}} = 1,2704$. Тогда в 3-й строке 5-го столбца (табл. 2) находим значение 1,2704 и далее в

этой же строке – $d_1 = 1,50$; $\beta_1 = 0,196$; $d_2 = 2,499$; $\beta_2 = 0,249$. Далее определяются значения k_1, k_2 (табл. 1). По формулам, приведенным ниже, вычисляются τ, G_1, G_2, h и строятся графики $G - h$ и $\tau - h$.

Вычисления τ, G_1, G_2, h осуществляются следующим образом:

подставляя $\beta_1^{\text{эксп}}$ в первое уравнение (13), определяется $G_2^{\text{эксп}}$;

подставляя c_1 и $d_1^{\text{эксп}}$ в (6), определяется g ;

значения g и $G_2^{\text{эксп}}$ подставляются в (4) и определяется $G_1^{\text{эксп}}$,

$$g^{\text{эксп}} = \frac{G_2^{\text{эксп}}}{G_1^{\text{эксп}}}; \quad (16)$$

значения k_1 и $M_1^{\text{эксп}}$ подставляются в (7) и находятся τ_{max}^B ,

$$\tau_{\text{max}}^B = \frac{M_1^{\text{эксп}}}{a_1 b_1} k_1; \quad (17)$$

значения $k_2, M_1^{\text{эксп}}$ и $g^{\text{эксп}}$ подставляются в (8) и определяется τ_{max}^A ,

$$\tau_{\text{max}}^A = \frac{M_1^{\text{эксп}}}{a_1 b_1 \sqrt{g^{\text{эксп}}}} k_2^{\text{эксп}}; \quad (18)$$

τ_{max}^B и $G_1^{\text{эксп}}$ подставляются в (1):

$$h_{11} = \frac{\tau_{\text{max}}^B}{G_1^{\text{эксп}}}; \quad (19)$$

τ_{max}^A и $G_2^{\text{эксп}}$ подставляются в (1):

$$h_{21} = \frac{\tau_{\text{max}}^A}{G_2^{\text{эксп}}}. \quad (20)$$

5. По найденным численным значениям τ, G_1, G_2, h (п. 4) строятся графики $\tau_{\text{max}}^B - h_1, \tau_{\text{max}}^A - h_2, G_1 - h_1, G_2 - h_2$.

6. Точность измерения и определения значений τ, G_1, G_2, h (п. 4) зависит от двух факторов: использования экспериментальных средств и точности расчетных формул.

Суммарная погрешность измерения усилия на образец и определения угла его поворота в экспериментах, проводимых на испытательном комплексе (разработан в Институте проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины), составляет 1%, точность расчетных данных, используемых в [5], –

0,15%. Наибольшая среднеквадратичная погрешность измерений при эксперименте и расчете составляет

$$\nabla_{\text{ср.кв}} = 1/3 \sqrt{1^2 + 1^2 + (0,15)^2} = 0,47\%. \quad (21)$$

Для проверки работоспособности данной методики были проведены эксперименты на описанной ранее [6] установке. При принятой конструкции образца (рис. 1) всю его рабочую зону (l) нельзя использовать в расчетах для нахождения Θ по формулам (3), (14), (15) ввиду действия краевых эффектов. Поэтому для определения расчетной длины рабочей части образца (l_p) на установке [6] был проведен методический эксперимент при $T = 293$ К. По длине рабочей части образца $l = 50$ мм на одной из его граней были жестко установлены светодиоды, лучи которых направлялись на экран. При кручении образца лучи отклонялись от своего нулевого значения, и их значения фиксировались. Наибольшая зона рабочей части образца, в которой значение Θ было постоянным при заданном значении крутящего момента, принималась за расчетную. Для образца из УУКМ сечением 6×6 мм эта зона составляет 35 мм, а сечением 6×10 мм – 28 мм. Проводя эксперименты для указанных двух типов образцов, определяли Θ_i , M_i и затем строились графики $G - h$, $\tau - h$ (рис. 6). Отметим, что графики построены для точек A и B (рис. 2).

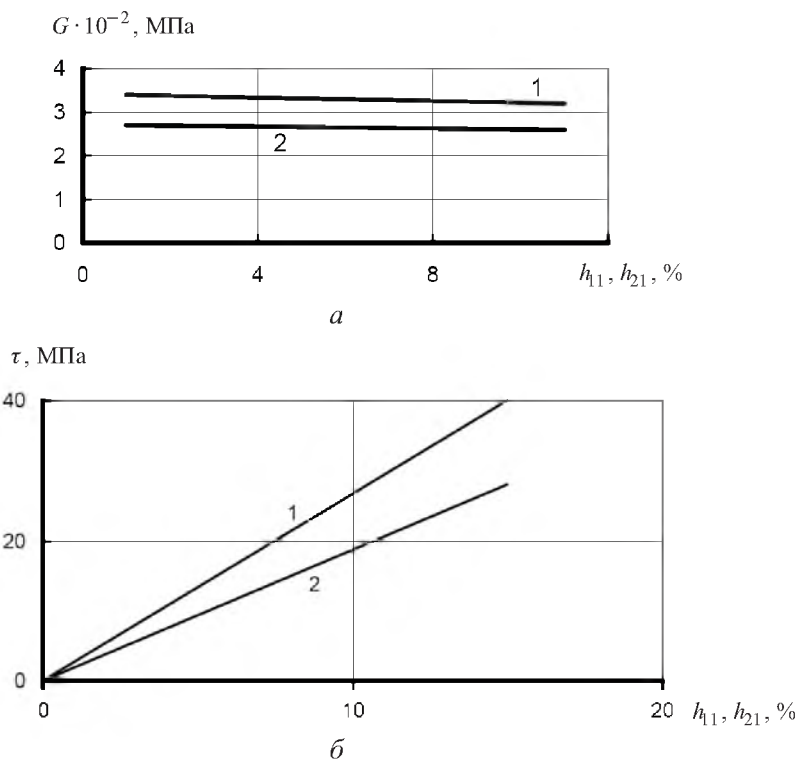


Рис. 6. Зависимости при кручении модулей сдвига G_1 (кривая 1) и G_2 (кривая 2) от углов сдвига h_{11} и h_{21} соответственно (а) и касательных напряжений (сечение образца 10×6 мм) от угла сдвига h на 1-й площадке (точка A на рис. 2) – кривая 1 и на 2-й площадке (точка B) – кривая 2 (б). Материал УУКМ, $T = 293$ К.

Полученные результаты свидетельствуют о корректном определении модулей G при кручении образцов из ортотропного материала и построении диаграмм $\tau - h$, $G - h$.

Резюме

Запропоновано методику визначення закономірностей деформування при крученні призматичних зразків з анізотропного матеріалу і побудови діаграм деформування у цих умовах.

1. Богомолов А. В., Борисенко В. А. Установка для испытания композиционных материалов на кручение при температурах до 3300 К // Пробл. прочности. – 1992. – № 1. – С. 87 – 88.
2. Богомолов А. В., Борисенко В. А. Повышение точности определения модуля сдвига ортотропных стержней при кручении // Там же. – 1994. – № 3. – С. 60 – 62.
3. Николаев В. П., Новичков Ю. Н. Экспериментальное определение модулей сдвига стеклопластиков // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1968. – Вып. 13. – С. 361 – 369.
4. Сен-Венан Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм. – М.: Физматгиз, 1961. – 620 с.
5. Лехницкий С. Г. Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
6. Дзюба В. С., Оксюк С. В. Методика и установка для исследования композиционных материалов при кручении в условиях температур до 3300 К // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 141 – 145.

Поступила 16. 07. 2008