

## Поля напряжений высоких порядков в вершине трещины при ползучести в условиях двухосного нагружения

В. Н. Шлянников, Н. В. Бойченко

Исследовательский центр проблем энергетики КазНЦ РАН, Казань, Россия

*Разработан и реализован метод расчета полей параметров напряженно-деформированного состояния в области вершины трещины при ползучести путем непосредственного учета членов высоких порядков. Представлены результаты расчета полей напряжений, скоростей деформации ползучести и амплитудных коэффициентов в вершине трещины при ползучести. Оценено влияние двухосности нагружения на перераспределение напряжений по стадиям ползучести и на параметры стеснения при разрушении.*

**Ключевые слова:** члены высоких порядков, ползучесть, область вершины трещины, двухосное нагружение, метод конечных элементов.

В течение длительного времени считалось, что напряжения и деформации в нелинейной области вершины трещины с достаточной точностью можно описать при любых условиях внешнего нагружения на основе одночленного асимптотического представления типа Хатчинсона–Райса–Розенгрена (ХРР) [1–3]. Однако исследования [4–6] показали, что зона доминантности ХРР-решения занимает малую долю нелинейной области и сокращается при переходе от маломасштабной к развитой пластичности. Особенно жесткие ограничения по применению одночленного решения ХРР-типа имеют место в условиях ползучести при переходе от плоской деформации к плоскому напряженному состоянию или от изгиба к растяжению. По данным работ [5, 6], в образцах, используемых в экспериментальной механике трещин, зона доминантности ХРР-полей при ползучести полностью отсутствует. Поэтому внимание специалистов при решении нелинейных задач механики трещин обращено на модельные представления полей параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) с учетом членов высоких порядков [7–10]. Применение этих подходов к задачам ползучести имеет свои особенности.

Отправной точкой в построении модельных представлений при ползучести является анализ доминирующего механизма разрушения, по отношению к которому будут привлечены определяющие уравнения старения, упрочнения, течения и др., описывающие поведение среды. В фундаментальной работе Хатчинсона [11] выписаны подобные уравнения для нескольких доминирующих механизмов разрушения. В частности, для наиболее распространенной в расчетной практике второй установившейся стадии ползучести показано, что только для достаточно высоких уровней напряжений, когда влияние плотности фасеток и связанного с ними кавитационного стеснения на границах зерен невелико, применима известная аналогия Хоффа [12]. Этот вывод подводит теоретическую основу под высказанное Риделем и Райсом [13] предложение о трансляции для стационарной трещины упруго-

пластических решений по угловым распределениям полей параметров НДС на область ползучести с соответствующим переходом к скоростям перемещений и деформациям. Этот принцип сохранился и при построении структуры определяющих уравнений при разрушении в условиях ползучести с учетом членов высоких порядков [5, 6]. Именно с их помощью доопределяется одночленное решение для корректного учета влияния геометрии тела и условий его нагружения, особенно при развитой пластичности или ползучести. Следствием подобного подхода являются двухпараметрические критерии  $J - T$  [14],  $J - Q$  [8],  $J - A_2$  [15] и параметр трехосности (стеснения) при разрушении [16].

Традиционно задача анализа НДС с учетом членов высоких порядков включает в себя качественную составляющую, связанную с угловыми распределениями параметров и показателями степеней членов разложений, и количественную, относящуюся к расчету амплитудных коэффициентов. В отношении первой составляющей уже сложились достаточно строгие подходы при удержании первых двух [7, 17] или трех членов разложений [9, 10]. Расчет амплитудных коэффициентов носит менее определенный характер из-за неоднозначной интерпретации условий нагружения. Ранее [18–20] было показано, что достаточно убедительное обоснование структуры решений для плоской задачи можно получить при рассмотрении пластины при произвольном двухосном нагружении. Подобный вид нагружения является типовым для многих элементов конструкций.

Цель настоящей работы состоит в обосновании структуры модели НДС в нелинейной области вершины трещины с учетом членов высоких порядков путем расчета угловых распределений и амплитудных коэффициентов при непосредственном учете двухосности внешнего нагружения для среды, сочетающей свойства упругости, пластичности и ползучести. Рассматривается поведение материала в условиях мягкого нагружения при плоской деформации (ПД).

Исследование полей параметров НДС построено на сочетании аналитического и численного решений, т.е. осуществляется расчет параметров в области вершины трещины численно с помощью метода конечных элементов (МКЭ) и параллельно аналитически решается задача на основе трехчленного их представления в области вершины трещины при ползучести. Такой подход необходим для получения полного решения и обоснования элементов его структуры. Все расчеты по МКЭ выполнены на основе вычислительного комплекса ANSYS [21, 22].

Заметим, что наделение материала одновременно свойствами упругости, пластичности и ползучести предопределяет использование модели среды со сложной реологией. Для реологически сложных сред расчет деформаций может быть выполнен путем мультипликативной декомпозиции градиентов деформации или аддитивной декомпозиции деформаций на составляющие. Мультипликативная декомпозиция, как правило, используется в случае, когда имеют место большие упругие деформации. Аддитивное разложение более удобно при малых упругих деформациях. Поскольку металлические материалы в состояниях пластичности и ползучести имеют малые упругие

деформации, то в конечноэлементном комплексе ANSYS для реологически сложных сред (при сочетании ползучести и изотропного упрочнения) используется аддитивная декомпозиция деформаций в качестве модели описания неупругого поведения материалов [21, 22]:

$$\varepsilon_{total} = \varepsilon_{elastic} + \varepsilon_{plastic} + \varepsilon_{creep}. \quad (1)$$

Учитывая совместное представление нелинейных деформаций разной природы в одном уравнении, составляющие полной деформации, входящие в уравнение (1), в наиболее общем случае сложного напряженного состояния могут быть записаны следующим образом.

Модель упругопластического деформирования Рамберга–Осгуда:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma}{\sigma_y} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^m, \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $m$  – константы упрочнения;  $\sigma_y$  – предел текучести материала.

Обобщение соотношения (2) на случай произвольного сложного напряженного состояния записывается как

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_y} = (1 + \nu) \frac{S_{ij}}{\sigma_y} + \frac{1 - 2\nu}{3} \frac{\sigma_{pp}}{\sigma_y} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^{m-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_y}. \quad (3)$$

В инкрементальной форме согласно теории течения уравнение (3) примет вид

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_y} = (1 + \nu) \frac{d\sigma_{ij}}{\sigma_y} - \nu \frac{d\sigma_{kk}}{\sigma_y} \delta_{ij} + \frac{3}{2} m \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^{m-2} \frac{S_{ij}}{\sigma_y} \frac{d\sigma_e}{\sigma_y} \quad (4)$$

или

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (1 + \nu) \dot{\sigma}_{ij} - \nu \dot{\sigma}_{kk} \delta_{ij} + \frac{3}{2} m \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_y} \right)^{m-2} \frac{S_{ij}}{E} \frac{\dot{\sigma}_e}{\sigma_y}. \quad (5)$$

Определяющее соотношение ползучести при одноосном растяжении для нелинейно-упруговязкого материала согласно теории течения имеет вид

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \dot{\varepsilon}_0 \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^n \quad \text{или} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + B \sigma^n, \quad (6)$$

где  $B$  и  $n$  – соответственно коэффициент и показатель изохронной кривой ползучести при заданной температуре;  $\sigma_0$ ,  $\dot{\varepsilon}$  – взаимосвязанные характеристики для одной конкретной кривой ползучести при данной температуре.

Обобщение на случай произвольного сложного напряженного состояния в соответствии с теорией течения может быть представлено следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{pp} \delta_{ij} + \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_0 \left( \frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} \frac{S_{ij}}{\sigma_0} \quad (7)$$

или

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \dot{\sigma}_{pp} \delta_{ij} + \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} S_{ij}. \quad (8)$$

В приведенных соотношениях:  $S_{ij}$  – девиатор напряжений;  $\sigma_e = (3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}$  – интенсивность, или эквивалентные напряжения. Согласно аддитивному принципу уравнения (1) полные деформации для вязкоупруго-пластичной среды определяются суммой уравнений (5) и (8).

Для компонент напряжений и скоростей деформаций в нелинейной области вершины трещины принимается как наиболее предпочтительная и обоснованная в литературных источниках трехчленная структура с разложением параметров в ряд по радиусу [9, 10]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = A_1(t) [\bar{r}^{s_1} \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2(t) \bar{r}^{s_2} \tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + A_3(t) \bar{r}^{s_3} \tilde{\sigma}_{ij}^{(3)}(\theta) + \dots]; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{ij} = & A_1^n(t) [\bar{r}^{s_1 n} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(\theta) + A_2(t) \bar{r}^{s_1(n-1)+s_2} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}(\theta) + \\ & + A_3(t) \bar{r}^{s_1(n-1)+2s_2-s_3} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(3)}(\theta) + A_2^2 \bar{r}^{s_1(n-2)+2s_2} \tilde{\xi}_{ij}^{(1)}(\theta)], \quad (10) \end{aligned}$$

где индексы  $k = 1, 2, 3$  соответствуют полям первого, второго и третьего порядка;  $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$  – амплитудные коэффициенты;  $s_1, s_2, s_3$  – показатели степени, причем  $s_1 < s_2 < s_3$ ;  $\bar{r} = r/L$ ;  $L$  – характеристический размер;  $t$  – время;  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta), \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$  – безразмерные угловые функции компонент напряжений и скоростей деформаций соответствующего порядка;  $r, \theta$  – полярные координаты, центрированные на вершину трещины. Первый член в разложениях (9), (10) является решением ХРР-типа.

Скорости деформации ползучести первого  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ , второго  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(2)}$  и третьего  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(3)}$  порядков, входящие в выражение (10), определены через компоненты безразмерных напряжений в соответствии со следующими зависимостями:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)} = \frac{3}{2} \tilde{s}_{ij}^{(1)} [\tilde{\sigma}_e^{(11)}]^{n-1}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \frac{3}{2} [\tilde{\sigma}_e^{(11)}]^{n-1} [\tilde{s}_{ij}^{(k)} + (n-1) \tilde{s}_{ij}^{(1)} \tilde{\sigma}_e^{(1k)}]; \quad (11)$$

$$\tilde{\xi}_{ij}^{(1)} = \frac{3}{2} \tilde{\sigma}_e^{(11)n-1} (n-1) \left\{ \tilde{\sigma}_e^{(11)} \tilde{s}_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2} [\tilde{\sigma}_e^{(12)} + (n-3)(\tilde{\sigma}_e^{(12)})^2] \tilde{s}_{ij}^{(1)} \right\}; \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_e^{(11)} &= \left( \frac{3}{2} \tilde{S}_{ij}^{(1)} \tilde{S}_{ij}^{(1)} \right)^{1/2}; & \tilde{\sigma}_e^{(1k)} &= \frac{3}{2} \tilde{S}_{ij}^{(1)} \tilde{S}_{ij}^{(k)} / (\tilde{\sigma}_e^{(11)})^2; \\ \tilde{S}_{ij}^{(k)} &= \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ii}^{(k)}, & k &= 2, 3.\end{aligned}\quad (13)$$

Входящие в уравнения (11)–(13) компоненты девиаторов напряжений определены в соответствии с общей структурой трехчленного решения (9).

Согласно структуре (9), (10), компоненты напряжений и деформаций в области вершины трещины определяются суммой трех слагаемых, в каждом из которых неизвестными являются показатели степени  $s_1, s_2, s_3$ , угловые функции распределения компонент напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta)$  и амплитудные коэффициенты  $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ . С помощью численного решения по МКЭ можно определить только полные (суммарные) напряжения в левой части уравнения (9) без разложения на составляющие какой-либо структуры. Следовательно, оно не позволяет самостоятельно определить составляющие структуры уравнения (9)  $s_{(k)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}, A_{(k)}$ . В противоположность численному методу с использованием аналитического можно определить показатели степеней  $s_1, s_2, s_3$  и угловых функций  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$  для каждого из трех слагаемых при условии наложения на них одинаковых граничных условий. В свою очередь, амплитудные коэффициенты  $A_1, A_2, A_3$  не могут быть найдены независимо только аналитически или только численно на основе МКЭ. Для их определения требуется знание полных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}$  (МКЭ) и аналитических результатов для  $s_{(k)}, \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$ . В этой связи характер рассматриваемой задачи предопределяет необходимость компиляции численных и аналитических решений.

Обоснование модели НДС в нелинейной области вершины трещины по уравнению (9) проведем по угловым распределениям компонент полных напряжений. В контексте структуры (9) таковыми являются напряжения в левой части уравнения  $\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta) = \sigma_{ij}(r, \theta) / \sigma_y$ . Для сравнения с теоретическими данными  $\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta)$ , рассчитанными по уравнению (9), используем численные результаты для компонент полных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}(r, \theta) = \sigma_{ij}^{FEM}(r, \theta) / \sigma_y$ , полученные по МКЭ. Теоретические и численные угловые распределения полных компонент напряжений пронормируем так, чтобы привести их к одному масштабу. Отметим, что подобное сравнение не является полностью независимым. Его особенность состоит в том, что для нахождения  $\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta)$  в уравнении (9) необходимо последовательно определить угловые распределения каждого из слагаемых  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1,2,3)}$ , а затем соответствующие амплитудные коэффициенты  $A_{(1,2,3)}$ . Расчет коэффициентов  $A_{(1,2,3)}$  осуществляется с учетом предварительно найденных  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1,2,3)}$  для одной или двух фиксированных точек по угловой координате ( $\theta = 0$  и (или)  $\theta = 45^\circ$ ) с использованием соответствующих значений  $\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}(r, \theta = 0(45^\circ))$  в этих точках. Такая произвольная трактовка считается допустимой, поскольку

ку по одной (двум) опорным точкам в дальнейшем получают теоретические распределения  $\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta)$  во всем диапазоне углов от верхней  $\theta = +\pi$  до нижней  $\theta = -\pi$  поверхностей трещины.

На первом этапе предлагаемой методики в порядке получения полей параметров НДС при ползучести согласно структуре решения (9), (10) необходимо рассчитать угловые распределения. Угловые распределения членов первого  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$ , второго  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}$  и третьего  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(3)}$  порядков предполагалось определить в результате решения системы дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями для трещины нормального отрыва по методу Никишкова [10]. Для этого решалась система уравнений, состоящая из уравнения равновесия

$$\sigma_{rr,r} + \frac{1}{r}\sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \frac{1}{r}\sigma_{\theta\theta,\theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} = 0, \quad (14)$$

уравнений Коши

$$\varepsilon_{rr} = u_{r,r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r}u_{\theta,\theta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}u_{r,\theta} + u_{\theta,r} - \frac{1}{r}u_{\theta}\right) \quad (15)$$

и определяющего уравнения среды по модели Рамберга–Осгуда (3) или (4). В результате совместного решения этих уравнений найдены показатели степени  $s_{(1,2,3)}$  и безразмерные угловые характеристики  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1,2,3)}$  первого, второго и третьего членов разложения (9).

Вторым этапом определения параметров НДС является расчет амплитудных коэффициентов. Структура уравнения (9) для нахождения амплитудных коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  ( $A_3 = A_2^2$ ) предполагает, что левая часть этого уравнения известна, т.е. определены компоненты полных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  в нелинейной области вершины трещины. Для получения этих напряжений, как отмечалось выше, удобно воспользоваться методом конечных элементов, который, по сути, позволяет рассчитать только полные поля параметров НДС без разложения на составляющие. Таким образом, для определения искомым амплитудных коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  требуется использовать численное МКЭ-решение в отношении  $\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta = 0) = \bar{\sigma}_{ij}^{FEM}(r, \theta = 0)$  в сочетании с аналитическим решением для угловых безразмерных функций  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta = 0)$ .

Развернув уравнение (9) в явном виде для компонент нормальных напряжений, можно записать

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{\theta\theta} = A_1(t)[\bar{r}^{s_1}\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)} + A_2(t)\bar{r}^{s_2}\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(2)} + A_2^2(t)\bar{r}^{2s_2-s_1}\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(3)}]; \\ \bar{\sigma}_{rr} = A_1(t)[\bar{r}^{s_1}\tilde{\sigma}_{rr}^{(1)} + A_2(t)\bar{r}^{s_2}\tilde{\sigma}_{rr}^{(2)} + A_2^2(t)\bar{r}^{2s_2-s_1}\tilde{\sigma}_{rr}^{(3)}]. \end{cases} \quad (16)$$

Решая систему уравнений (16) с использованием полученных на предыдущем этапе угловых распределений  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta = 0)$ , определяем амплитудные

коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$ . Затем с помощью значений  $A_1$  и  $A_2$  и угловых безразмерных функций напряжений  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$  находим значения полных компонент напряжений и скоростей деформаций согласно моделям (9), (10). Предложенный порядок решения, объединенный в блок-схему (рис. 1), применялся к расчету полей НДС в нелинейной области вершины трещины при сочетании упругости, пластичности и ползучести.

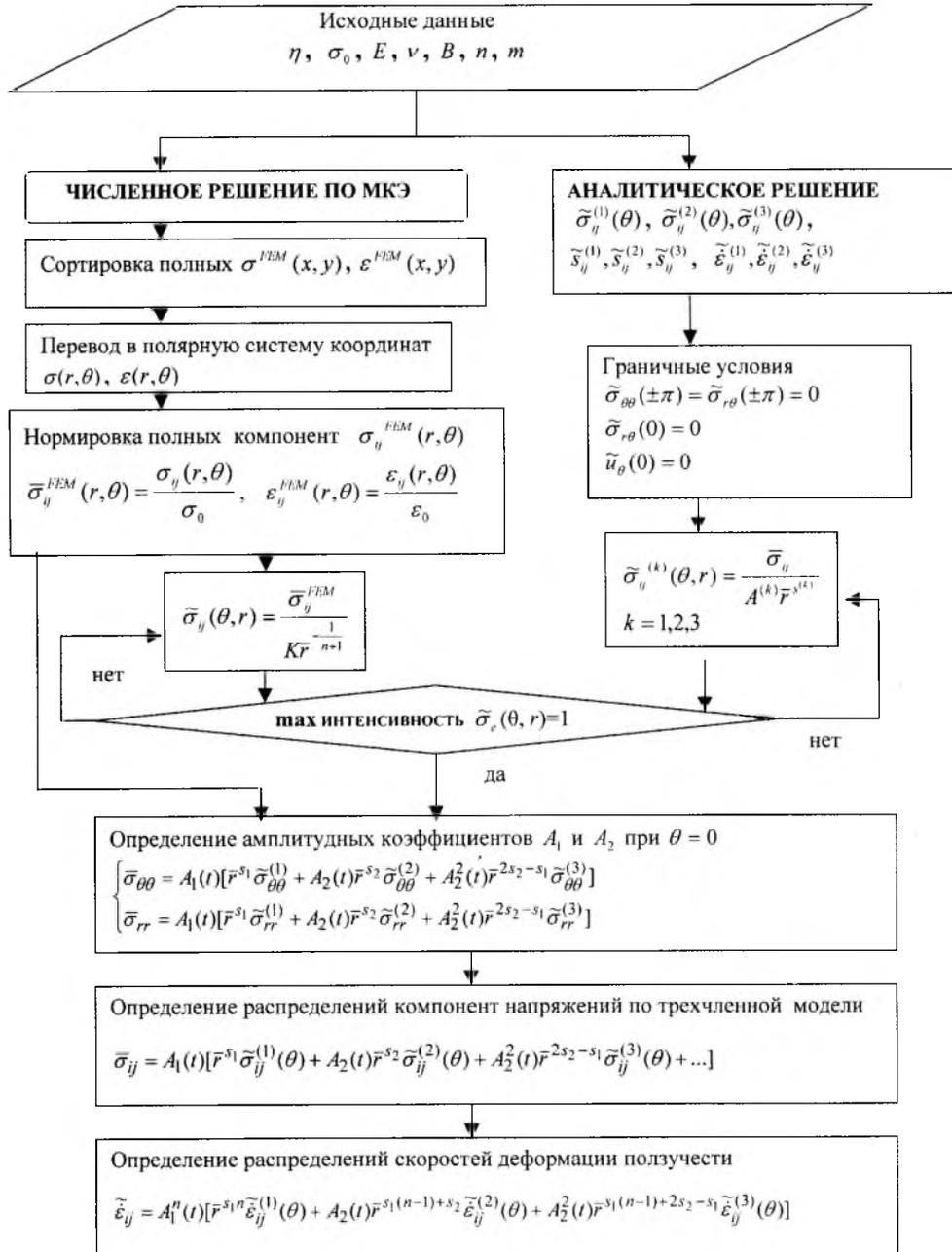


Рис. 1. Блок-схема методики расчета полей параметров НДС в области вершины трещины.

Рассматривается пластина конечных размеров с центральной трещиной в условиях мягкого нагружения. Нагрузки или номинальные напряжения приложены на внешних границах пластины по взаимно перпендикулярным направлениям. Соотношение номинальных напряжений определяется коэффициентом двухосности  $\eta = \sigma_{xx}^{\infty} / \sigma_{yy}^{\infty}$ .

Поведение тела с трещиной анализировалось для трех различных значений коэффициента двухосности:  $\eta = 1$  (равнодвухосное растяжение),  $\eta = 0$  (одноосное растяжение) и  $\eta = -1$  (равнодвухосное растяжение–сжатие) при уровне приложенного номинального напряжения  $\sigma / \sigma_y = 0,22$ . Исследование проводилось при использовании свойств пластичности и ползучести роторной стали Р2М с пределом текучести  $\sigma_y = 460$  МПа при температуре  $T = 550^{\circ}\text{C}$  в условиях плоской деформации. Путем аппроксимации экспериментальных диаграмм деформирования и кривых ползучести определялись коэффициент деформационного упрочнения для пластичности  $m = 3,96$  и константы ползучести по теории течения  $B = 1,4 \cdot 10^{-10}$  и  $n = 2,47$ , где  $B$  и  $n$  – соответственно коэффициент и показатель ползучести. Диапазон времени выдержки под нагрузкой, или время ползучести последовательно увеличивалось от  $10^2$  до  $5 \cdot 10^4$  ч. Долговечность выбиралась таким образом, чтобы покрывался диапазон эксплуатационной наработки теплогенерирующего оборудования.

Численные расчеты проводились на основе инженерного компьютерного комплекса ANSYS [21, 22]. Моделирование расчетной схемы пластины с центральной трещиной в рамках МКЭ (рис. 2) выполнялось в два этапа: первоначально формировалась область, окружающая вершину трещины (рис. 2,а), затем – расчетная схема пластины с центральной трещиной (рис. 2,б). Вершина трещины сформирована с малым, но конечным радиусом кривизны  $\rho = R \cdot 10^{-3}$ .

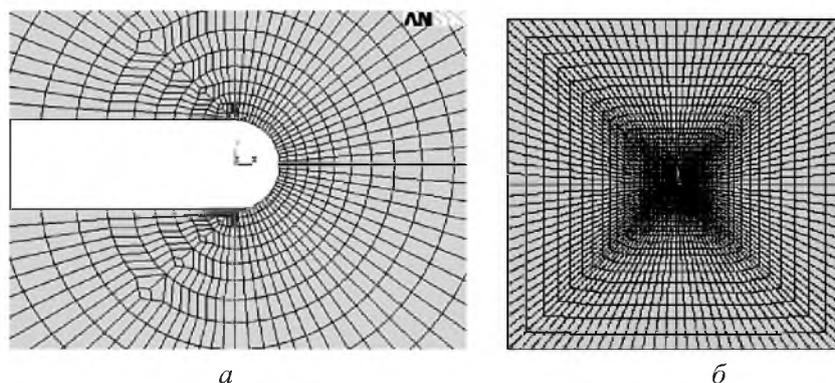


Рис. 2. Расчетная схема пластины с трещиной.

При интерпретации аналитических и численных результатов далее используются нормированные или безразмерные координаты по углу, расстоянию и времени. Нормировка угловых распределений компонент напряжений производится таким образом, чтобы максимальное значение интенсивности напряжений было равно единице ( $\tilde{\sigma}_e^{FEM} = \tilde{\sigma}_e^{(k)} = 1$ ) при  $\theta \in (+\pi,$

$-\pi$ ), что осуществляется путем подбора значений произведений  $K\bar{r}^{-1/n+1}$  и  $A^{(k)}\bar{r}^{s^{(k)}}$ , имеющих смысл масштабных множителей. В этом случае имеем

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{FEM}(\theta, r) = \frac{\bar{\sigma}_{ij}^{FEM}(r, \theta)}{K\bar{r}^{-1/n+1}}, \quad \tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}(\theta, r) = \frac{\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta)}{A^{(k)}\bar{r}^{s^{(k)}}}, \quad (17)$$

где  $k = 1, 2, 3$ .

Расстояние до вершины трещины приведено к безразмерному виду с помощью следующей нормировки:

$$\bar{r} = \frac{r}{[C/(\sigma_0 \dot{\epsilon}_0)]}, \quad (18)$$

где  $\sigma_0$  и  $\dot{\epsilon}_0$  – взаимосвязанные характеристики ползучести для роторной стали Р2М при температуре  $T = 550^\circ\text{C}$ ,  $\sigma_0 = 100$  МПа,  $\dot{\epsilon} = 1 \cdot 10^{-7}$  ч<sup>-1</sup>;  $C$  – амплитудный коэффициент для пластины бесконечных размеров, находящейся в условиях плоской деформации, описываемый по выражению [4]

$$C = \sigma_0 \dot{\epsilon}_0 \pi a \sqrt{n} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{n+1}. \quad (19)$$

Нормировка (18) удобна тем, что позволяет сопоставлять между собой результаты для материалов с различными свойствами, полученные при расчетах, в которых варьировались длина трещины  $a$  и уровень приложенных номинальных напряжений  $\sigma$ .

В теоретическом плане для решения нелинейных задач разрушения в условиях ползучести принципиальным является случай перехода от мало-масштабной к развитой ползучести. Приблизительно время подобного перехода  $t_T$  определяется соотношением [4], которое далее используется для нормировки текущего времени ползучести  $t$ :

$$t_T = \frac{K(1-\nu^2)}{E(n+1)C}, \quad (20)$$

где  $K$  – упругий коэффициент интенсивности напряжений. Для номинальных напряжений  $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_y = 0,22$  имеем  $t_T = 1081$  ч. Программа численных расчетов предусматривала анализ девяти стадий долговечности, значения для которых приведены в таблице в абсолютных  $t$  и нормированных на  $t_T$  форматах.

В соответствии с предложенным алгоритмом (рис. 1) первоначально решалась система уравнений (3), (14), (15) по методу Никишково [10], в результате чего находились показатели степеней  $s_{(1,2,3)}$  и угловые функции

распределения напряжений первого  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$ , второго  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}$  и третьего  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(3)}$  порядков, входящие в уравнение (9). Расчет безразмерных угловых функций напряжений проводился для широкого диапазона свойств материала, а именно: показатель ползучести  $n$  изменялся от 1 до 20. Результаты расчета приведены на рис. 3 в виде зависимости функций напряжений от полярного угла  $\theta$  для различных свойств материала.

Стадии расчетной долговечности при ползучести

№ стадии долговечности	$t$ , ч	$t/t_T$
1	$1 \cdot 10^2$	0,0925
2	$3 \cdot 10^2$	0,2775
3	$5 \cdot 10^2$	0,4625
4	$1 \cdot 10^3$	0,9250
5	$3 \cdot 10^3$	2,7750
6	$5 \cdot 10^3$	4,6250
7	$1 \cdot 10^4$	9,2500
8	$3 \cdot 10^4$	27,7500
9	$5 \cdot 10^4$	46,2500

Представленные результаты (рис. 3) воспроизводят алгоритм [10], в котором первый член разложения  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$  является решением ХРР-типа [1–3]. Распределение функции напряжений второго порядка  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(2)}$  практически не зависит от свойств материала. Наибольшему влиянию свойств материала подвержен третий член  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(3)}$  разложения (9).

Компоненты полных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}(r, \theta)$  в (9), необходимые для определения амплитудных коэффициентов  $A_{(1,2,3)}$ , в соответствии с предложенной методикой рассчитывались по МКЭ для различных вариантов двухосного нагружения. Рис. 4 иллюстрирует распределение окружной компоненты напряжений на продолжении трещины. Совершенно очевидно влияние вида нагружения, долговечности и расстояния до вершины трещины на поведение окружной компоненты напряжений. Состояние равнодвухосного растяжения ( $\eta = +1$ ) проявляет наибольшую чувствительность к времени ползучести. Так, в диапазоне  $t \in (10^2 \dots 5 \cdot 10^4)$  ч значения компоненты напряжений  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  изменяются почти в два раза. Менее зависимой от времени ползучести является случай равнодвухосного растяжения–сжатия ( $\eta = -1$ ). Одноосное растяжение ( $\eta = 0$ ) занимает в этом ряду промежуточное положение.

Отметим, что при положительных коэффициентах двухосности ( $\eta = +1$  и  $\eta = 0$ ) четко наблюдается явление разгрузки в области вершины трещины на расстояниях до  $\bar{r} \approx 0,004$ . Это связано с увеличением радиуса кривизны вершины трещины при ползучести и, как следствие, локальным уменьшением концентрации упругопластических напряжений. Видно, что в этих

случаях максимум напряжений  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  располагается на некотором удалении от вершины трещины. При равнодвухосном растяжении–сжатии или сдвиге максимум  $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$  смещается уже на контур трещины, хотя небольшая локальная разгрузка также имеет место.

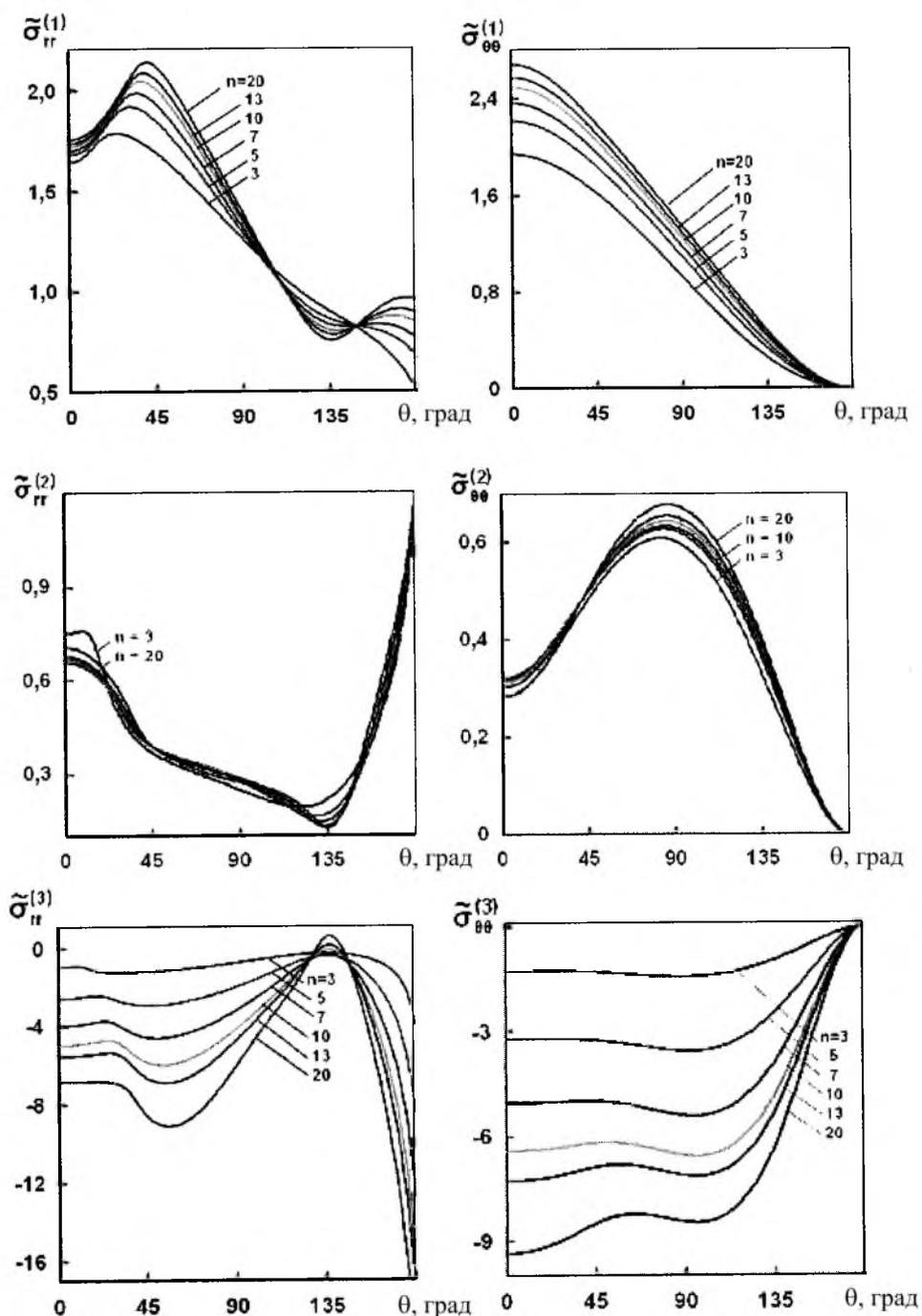


Рис. 3. Угловые распределения напряжений первого, второго и третьего порядков.

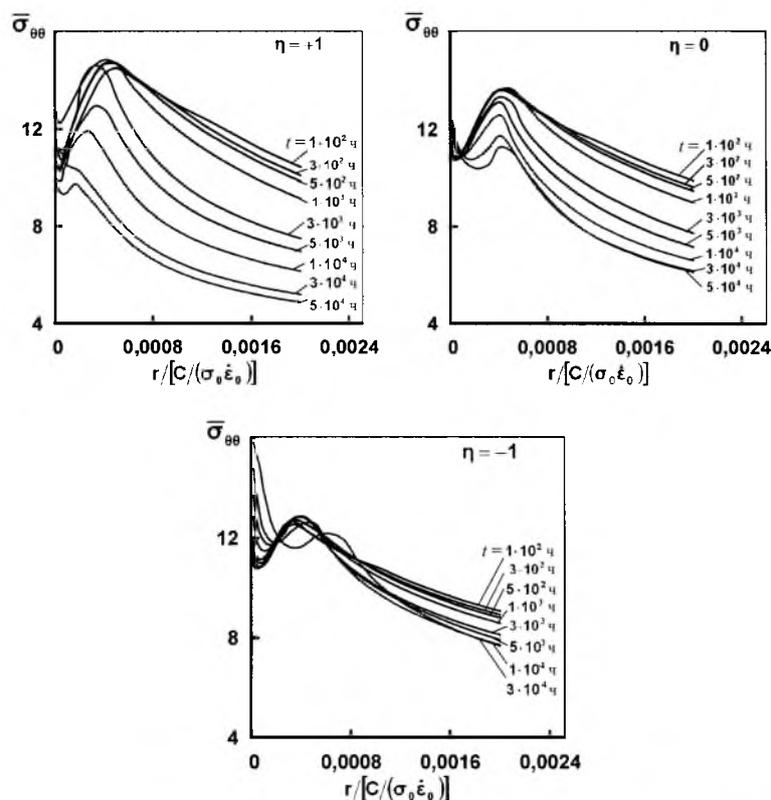


Рис. 4. Распределение окружных напряжений на продолжении трещины ( $\bar{\sigma} = 0,22$ ).

Следующим этапом при определении параметров НДС в области вершины трещины при ползучести согласно предложенному алгоритму (рис. 1) является нахождение амплитудных коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$ . Расчет коэффициентов осуществляется по уравнениям (16) с учетом представленных на рис. 4 результатов для полных компонент напряжений. На рис. 5 показаны поверхности зависимостей амплитудных коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  от расстояния до вершины трещины  $r/\rho$  ( $\rho$  – радиус кривизны вершины трещины) и времени выдержки под нагрузкой  $t/t_T$  для различных значений коэффициента двухосности. Эти поверхности дают наглядное представление о влиянии рассматриваемых факторов на амплитудные коэффициенты. По мере перехода от равнодвухосного растяжения к равнодвухосному растяжению–сжатию влияние времени выдержки под нагрузкой уменьшается. Если в случае равнодвухосного растяжения ( $\eta = 1$ ) наблюдается наибольшая зависимость амплитудных коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  от времени выдержки под нагрузкой, то в случае равнодвухосного растяжения–сжатия ( $\eta = -1$ ) влияние времени практически отсутствует, вариант одноосного растяжения ( $\eta = 0$ ) занимает промежуточное положение. Наиболее ярко это выражается при рассмотрении поведения коэффициента  $A_2$ : при  $\eta = -1$  влияние долговечности на коэффициент практически отсутствует. Ранее в литературных источниках предполагалось, что коэффициент  $A_2$  не зависит от расстояния до вершины трещины, однако, очевидно, что такое влияние имеет место.

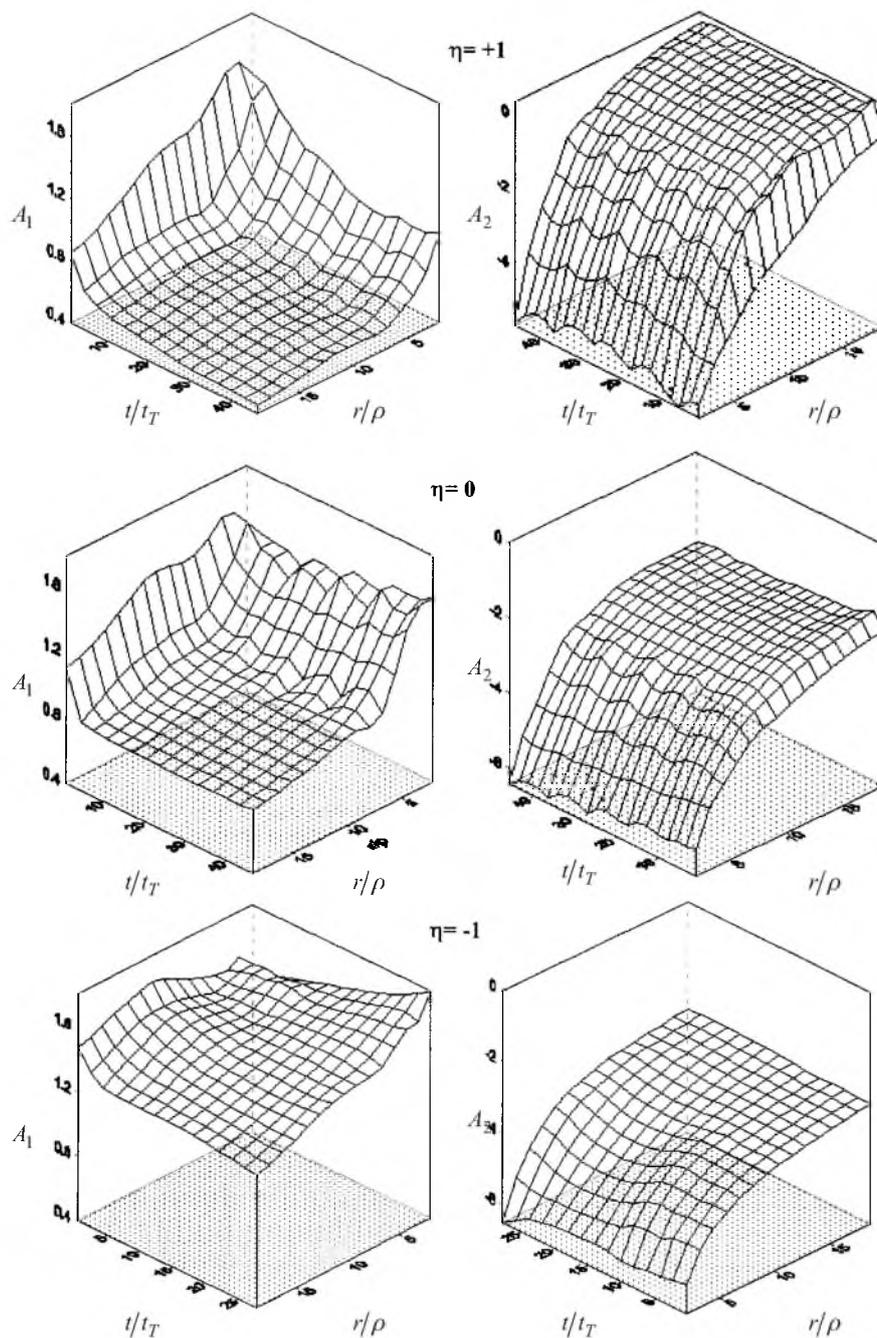


Рис. 5. Зависимости амплитудных коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  от расстояния до вершины трещины и времени выдержки под нагрузкой для различных условий нагружения.

В области маломасштабной ползучести при  $t/t_T \leq 1$  амплитуда второго и третьего членов разложения (9)  $A_2$  при равнодвухосном растяжении имеет устойчивое ненулевое значение. В области  $t/t_T \approx 1$  отмечается переход значений  $A_2$  на уровень, близкий к нулю, который сохраняется при дальнейшем увеличении долговечности. По мере удаления от вершины трещины

этот процесс приобретает все более выраженный характер. Заметим, что при других видах номинальных напряженных состояний ( $\eta = 0$  и  $\eta = -1$ ) подобных переходов не наблюдается, что подчеркивает особый случай равнодвухосного растяжения ( $\eta = 1$ ), когда члены высоких порядков обращаются в нуль.

Полученные на предыдущих этапах результаты в соответствии с предложенным алгоритмом (рис. 1) позволяют перейти к анализу и обоснованию структуры модели с учетом членов высоких порядков (9), (10). Для сравнения используются полные напряжения, полученные численно на основе МКЭ. На распределения для компонент напряжений накладывались аналитические результаты одночленного решения ХРР-типа и трехчленного представления по модели (9) с учетом найденных по системе (3), (14), (15) безразмерных угловых распределений напряжений первого, второго и третьего порядков  $\tilde{\sigma}_{ij}^{(k)}$  и амплитудных коэффициентов, рассчитанных по уравнению (16). На рис. 6 представлены результаты сравнения безразмерных угловых распределений компонент тензора напряжений, полученных численно и аналитически.

В отношении решения ХРР-типа теоретический анализ показывает, что оно является асимптотическим и сингулярным при  $\bar{r} \rightarrow 0$  и может быть получено как частный случай уравнения (9), когда амплитуда второго и третьего членов разложения равна нулю. Из упругого анализа известно, что амплитуда второго члена (или несингулярный член) определяется как  $\bar{T} = -\bar{\sigma}(1 - \eta)$ . Следовательно, одночленное решение ХРР-типа справедливо и может быть достигнуто для задач нормального отрыва только при равнодвухосном растяжении ( $\eta = +1$ ), когда  $A_2 = \bar{T} = 0$ . Этот случай хорошо проиллюстрирован на рис. 6: решение ХРР-типа приемлемо описывает вариант равнодвухосного растяжения ( $\eta = +1$ ).

При небольшом удалении от вершины трещины ( $\bar{r} = 7,17 \cdot 10^{-4}$ ) в области разгрузки ни одно из модельных представлений в виде трехчленного разложения (9) или одночленного решения ХРР-типа не совпадает с численными результатами. Эти данные подтверждают тот факт, что асимптотические решения неприемлемы для описания поведения материала в области разгрузки из-за затупления вершины трещины. По мере удаления от вершины трещины на расстояние, кратное 2-3 радиусам кривизны, совпадение модельных трехчленных представлений (9) и результатов по МКЭ становится хорошим. Из этого следует, что асимптотическое решение (9) справедливо только в определенной области, называемой зоной доминантности.

Данные на рис. 6,з-е получены для расстояния  $\bar{r} = 2 \cdot 10^{-3}$ , которое на порядок больше радиуса кривизны вершины трещины при одинаковой долговечности. В противоположность этому случаю при  $\bar{r} = 7,17 \cdot 10^{-4}$  наблюдается качественное согласование между численными результатами и моделью с учетом членов высоких порядков (9). Подобная ситуация характерна как в области интенсивной ползучести, так в области маломасштабной ползучести с той лишь разницей, что степень соответствия между результатами по МКЭ и асимптотическим трехчленным разложением (9) для области однородного изменения НДС ( $\bar{r} = 2 \cdot 10^{-3}$ ) становится достаточно хорошей с увеличением времени выдержки под нагрузкой. Из представленных на рис. 6,з результатов

татов видно, что ХРР-решение является частным случаем двухосного нагружения, которое соответствует именно равнодвухосному растяжению, а не одноосному растяжению ( $\eta = 0$ ) при  $\bar{T} \neq 0$ . Как и следовало ожидать, численные и аналитические результаты полностью совпадают между собой, что еще раз подчеркивает особый случай равнодвухосного растяжения.

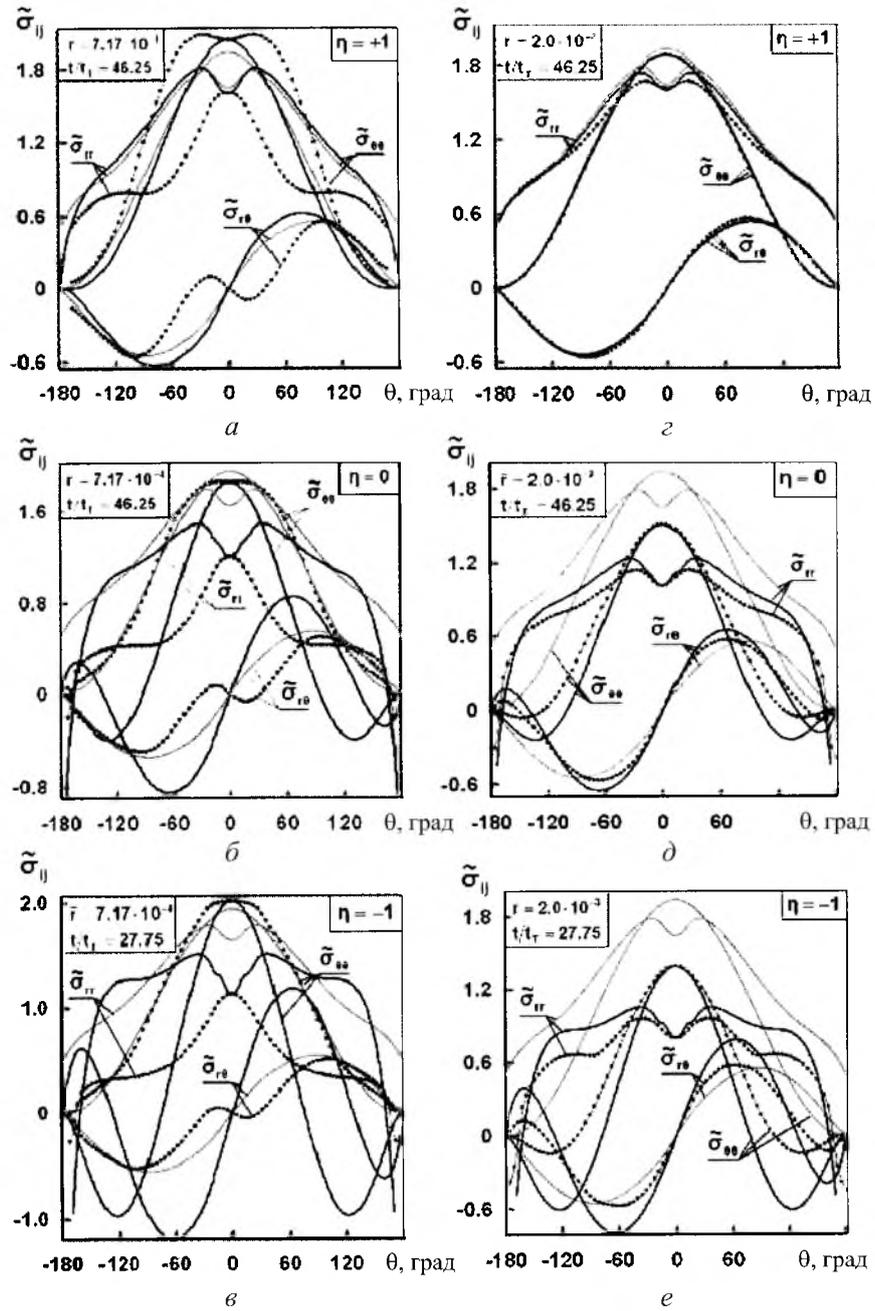


Рис. 6. Сравнение численных и аналитических результатов расчета угловых распределений компонент напряжений для различных вариантов двухосного нагружения (точки – данные по МКЭ, жирные линии – результаты расчета по трехчленному разложению (9), тонкие – решение ХРР-типа).

С учетом найденных по уравнениям (10)–(13) угловых распределений безразмерных компонент напряжений первого, второго и третьего порядков (рис. 6) проведен анализ распределения скоростей деформаций в области вершины трещины при ползучести. На рис. 7 представлены результаты сопоставления аналитических решений (10)–(13) с численным. Компоненты тензора скоростей деформаций ползучести, полученные численно с помощью системы ANSYS, определялись следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{FEM} = \frac{\varepsilon_{ij}^{k+1} - \varepsilon_{ij}^k}{t^{k+1} - t^k} = \frac{\Delta \varepsilon_{ij}}{\Delta t}, \quad (21)$$

где  $k$  – стадия долговечности;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций ползучести;  $t$  – долговечность. Заметим, что расчеты проводились для девяти стадий долговечности в диапазоне  $10^2 \dots 5 \cdot 10^4$  ч.

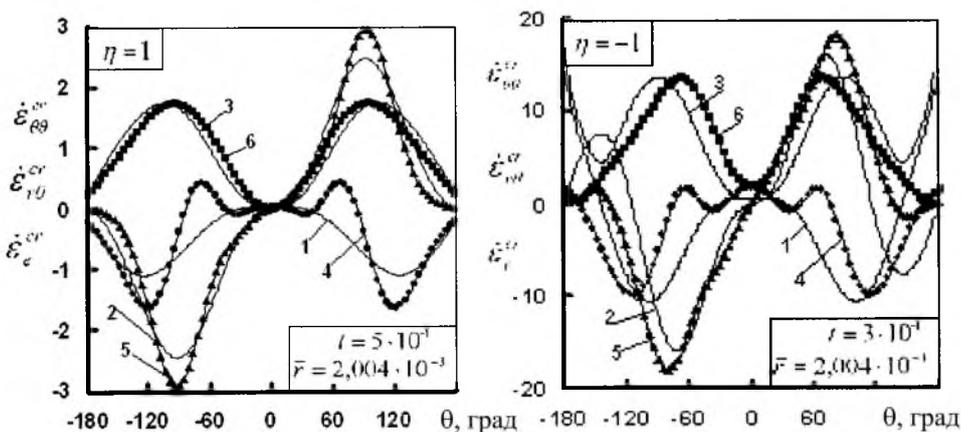


Рис. 7. Угловые распределения компонент скорости деформации ползучести, полученные аналитически (линии) и численно с помощью МКЭ (точки): 1, 4 – скорость окружной деформации  $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}^{cr}$ ; 2, 5 – скорость деформаций сдвига  $\dot{\varepsilon}_{\phi\theta}^{cr}$ ; 3, 6 – скорость интенсивности деформаций ползучести  $\dot{\varepsilon}_e^{cr}$ .

Установлено, что в случае равнодвухосного растяжения–сжатия ( $\eta = -1$ ) деформации достигают наибольших значений из рассмотренных вариантов нагружения. Равнодвухосное растяжение ( $\eta = 1$ ) характеризуется наименьшим уровнем деформаций ползучести. Вариант одноосного нагружения ( $\eta = 0$ ) занимает промежуточное положение. При увеличении времени выдержки под нагрузкой и по мере удаления от вершины трещины максимальные значения безразмерных компонент скорости деформации ползучести значительно уменьшаются. Наиболее близкое соответствие численного решения с аналитическим имеет место в случае равнодвухосного растяжения ( $\eta = 1$ ) при больших значениях выдержки под нагрузкой и при большом удалении от вершины трещины. Такая же тенденция отмечается при анализе распределений полей напряжений в области вершины трещины.

Анализ результатов расчетов распределений напряжений и скоростей деформаций ползучести позволил установить область доминантности трехчленного разложения, для которой характерно совпадение аналитического и численного решений, что имеет место при удалении от вершины трещины на расстояние  $\bar{r} = 1,211 \cdot 10^{-3}$  и долговечности порядка  $t/t_T = 27$ . Кроме того, проводился расчет процентного соотношения вкладов каждого из членов трехчленного представления напряжений (9) в общее решение. Установлено, что суммарный вклад членов высоких порядков в общее решение для полей параметров НДС при двухосном нагружении достигает 40%. Эти данные свидетельствуют о необходимости записи параметров НДС в области вершины трещины с учетом членов высоких порядков по отношению к традиционному одночленному представлению посредством решения ХРР-типа.

С целью последующего применения полученных результатов в расчетной практике аналитические и численные данные обобщены в форме математического описания зависимости амплитудного коэффициента  $A_2$  от исследованных факторов двухосности нагружения  $\eta$ , долговечности  $\bar{t} = t/t_T$  и расстояния до вершины трещины  $\bar{r}$  в виде аппроксимационного уравнения, полученного методом регрессионного анализа:

$$A_2 = F(\bar{t}, \eta, \bar{r}), \quad (22)$$

где

$$F = 1283,33 + F_\eta \left( \frac{F_t}{\bar{r}^{0,0014}} - \frac{651,398}{\bar{t}^{0,0035}} \right);$$

$$F_\eta = 0,0422 - 2,54 \cdot 10^{-5} \eta - 1,18 \cdot 10^{-5} \eta^2;$$

$$F_t = 0,725\bar{t} - 0,0453\bar{t}^2 + 6,06 \cdot 10^{-4} \bar{t}^3 - 28770,2.$$

Полученные функции изменения амплитудного коэффициента  $A_2$ , приведенные к удобному для использования виду, предполагают их непосредственное введение в вычислительные комплексы по анализу НДС в нелинейной области вершины трещины. Это особенно актуально для экспериментальной механики трещин, поскольку коэффициент  $A_2$  используется в качестве параметра стеснения в двухпараметрических критериях разрушения [15].

Таким образом, проведенный комплекс аналитических и численных расчетов свидетельствует о возможности представления поля параметров НДС в области вершины трещины при двухосном нагружении с учетом членов высоких порядков. Установлено, что классическое решение ХРР-типа справедливо только при равнодвухосном растяжении, когда отсутствует вклад слагаемых высоких порядков. Во всех остальных случаях двухосность нагружения как фактор, влияющий на несущую способность материала в условиях ползучести, реализуется именно посредством удержания членов высоких порядков, вклад которых является существенным в большинстве случаев нелинейного деформирования.

## Резюме

Розроблено і реалізовано метод розрахунку полів параметрів напружено-деформованого стану в області вістря тріщини при повзучості шляхом безпосереднього врахування членів високого порядку. Представлено результати розрахунку полів напружень, швидкостей деформації повзучості та амплітудних коефіцієнтів у вістрі тріщини при повзучості. Оцінено вплив двовісності навантаження на перерозподіл напружень за стадіями повзучості і на параметри стиснення при руйнуванні.

1. *Hutchinson J. W.* Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1968. – **16**. – P. 13 – 31.
2. *Rice J. R. and Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material // *Ibid.* – P. 1 – 12.
3. *Hutchinson J. W.* Plastic stress and strain fields at a crack tip // *J. Mech. Phys.* – 1968. – **16**. – P. 337 – 347.
4. *Li F. Z., Needleman A., and Shih C. F.* Characterization of near tip stress and deformation fields in creeping solids // *Int. J. Fract.* – 1988. – **36**. – P. 163 – 186.
5. *Nguyen B. N., Onck P. R., and Van der Giessen.* On higher-order crack-tip fields in creeping solids // *J. Appl. Mech., Trans. ASME*. – 2000. – **67**. – P. 372 – 382.
6. *Chao Y. J., Zhu X. K., and Zhang L.* Higher-order asymptotic crack-tip fields in power-law creeping material // *Int. J. Solids Struct.* – 2001. – **38**. – P. 3853 – 3875.
7. *Li Y. and Wang Z.* Higher order asymptotic field of tensile plane strain nonlinear crack problem // *Scient. Sin. (Ser. A)*. – 1986. – **29**. – P. 941 – 955.
8. *O'Dowd N. P. and Shih C. F.* Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter. Pt. I: Structures of fields // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1991. – **39**. – P. 989 – 1015.
9. *Yang S., Chao Y. J., and Sutton N. A.* Higher order asymptotic fields in power law hardening material // *Eng. Fract. Mech.* – 1993. – **45**. – P. 1 – 20.
10. *Nikishkov G. P.* An algorithm and computer program for the three-term asymptotic expansion of elastic-plastic crack-tip stress and displacement fields // *Eng. Fract. Mech.* – 1995. – **50**. – P. 65 – 83.
11. *Hutchinson J. W.* Constitutive behavior and crack tip fields for materials under going creep-constrained grain behavior boundary cavitation // *Acta Met.* – 1983. – **31**. – P. 1079 – 1088.
12. *Hoff N. J.* Approximate analysis of structures in the presence of moderately large creep deformation // *Quarterly Appl. Mech.* – 1954. – **12**. – P. 49 – 55.
13. *Riedel H. and Rice J. R.* Tensile crack in creeping solids // *Fracture Mechanics (ASTM STP 700)*. – 1980. – P. 112 – 130.
14. *Betegon C. and Hancock J. W.* Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields // *J. Appl. Mech.* – 1991. – **58**. – P. 104 – 110.

15. *Anderson T. L.* Elastic-plastic fracture mechanics // *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications.* – CRC Press, 1995. – P. 139 – 181.
16. *Henry B. S. and Luxmoore A. R.* The stress triaxiality constraint and the  $Q$ -value as fracture parameter // *Eng. Fract. Mech.* – 1997. – **57**. – P. 375 – 390.
17. *Sharma S. M. and Aravas N.* Determination of higher-order terms in asymptotic elasto-plastic crack tip solutions // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1991. – **39**. – P. 1043 – 1072.
18. *Шлянников В. Н.* Метод расчета регулярных составляющих поля напряжений в пластической зоне у вершины трещины отрыва // *Пробл. прочности.* – 2006. – № 3. – С. 43 – 59.
19. *Шлянников В. Н., Ильченко Б. В., Бойченко Н. В.* Расчет амплитудных коэффициентов при ползучести для материала диска паровой турбины // *Изв. РАН. Энергетика.* – 2006. – № 2. – С. 83 – 90.
20. *Шлянников В. Н., Ильченко Б. В., Бойченко Н. В.* Влияние вида напряженного состояния на поведение роторной стали при ползучести в условиях, близких к разрушению // *Там же.* – С. 91 – 100.
21. *ANSYS Structural Analysis Guide.* 001245. – Fifth Edition. – SAS IP Inc., 1999.
22. *ANSYS Theory Reference.* 001242. – Eleventh Edition. – SAS IP Inc., 1999.

Поступила 12. 09. 2007