

## **Определение амплитудно-частотной характеристики виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем в линейной постановке**

**В. П. Легеза**

Национальный аграрный университет, Киев, Украина

*Рассматривается динамическое поведение виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем. С использованием метода осреднения Ритца определены уравнения амплитудно-частотных характеристик этой системы в линейной постановке. Предложен численный метод определения параметров настройки гасителя.*

**Ключевые слова:** виброзащитная система, двухмассовый маятниковый гаситель, амплитудно-частотная характеристика, метод осреднения Ритца, параметры настройки гасителя.

**Введение.** Ранее [1] была построена математическая модель динамики исследуемой виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем в виде нелинейных дифференциальных уравнений движения. На основе этих уравнений проанализированы преимущества указанной системы перед таковой с одномассовым маятниковым гасителем. Двухмассовые гасители целесообразно использовать с целью значительного снижения уровня вибродинамических нагрузок в низко- и среднечастотном диапазоне при вынужденных колебаниях таких крупногабаритных механических объектов, как несущие стволы ветроэлектростанций, телевизионные башни, радиовышки, пилоны мостов, вытяжные трубы, элементы транспортных систем и т.д.

Настоящая работа, в которой предлагается методика аналитического определения уравнений амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем в линейной постановке, является продолжением предыдущего исследования [1]. Поскольку без информации об АЧХ невозможна настройка любого гасителя на оптимальный режим виброзащиты заданной механической системы, ее получение, несомненно, является самостоятельной актуальной задачей.

В отечественных и зарубежных литературных источниках приводятся разнообразные методы определения АЧХ традиционных виброзащитных систем, а также их параметров для задач как в линейной, так и в нелинейной постановках [2–11].

Для вывода уравнения АЧХ исследуемой виброзащитной системы используется подход, известный как метод осреднения Ритца [10, 11]. При определении уравнения АЧХ в линейной постановке рассматриваются установившиеся колебания системы. Метод Ритца основан на предположении о том, что для установившихся колебаний механической системы среднее значение виртуальной работы на элементарных перемещениях всех масс системы за один период равно нулю. В общем случае при использовании

метода осреднения Ритца решение задачи о вынужденных колебаниях произвольной механической системы (не обязательно линейной) для каждой обобщенной независимой координаты задается в виде ряда:

$$X(t) = A_1\psi_1(t) + A_2\psi_2(t) + \dots + A_n\psi_n(t) = \sum_{i=1}^n A_i\psi_i(t),$$

где  $\psi_i(t)$  – функции времени, выбираемые из условия задачи;  $A_i$  – весовые коэффициенты, определяемые из условия равенства нулю среднего значения виртуальной работы за один период.

Такой подход для задачи в линейной постановке дает ее точное решение, в нелинейной – приближенное, причем тем точнее, чем больше членов вышезаписанного ряда учитывается при этом.

**Постановка задачи.** Рассматривается движение виброзащитной системы с двухмассовым гасителем вынужденных колебаний под действием внешнего гармонического воздействия  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  – рис. 1. Конструкция гасителя имеет вид гантели с неравными сосредоточенными массами на концах, причем большая масса  $M$  закреплена на нижнем конце, меньшая масса  $m$  – на верхнем ( $M > m$ ). Такой своеобразный двухмассовый маятник  $AB$  закреплен шарнирно на несущем теле массой  $M_0$  в точке  $O$ . Длина плеча  $AO$  нижней части маятника равна  $L$ , длина плеча  $BO$  верхней части –  $l$ . Предполагается, что плечи  $AO$  и  $BO$  абсолютно жесткие и невесомые. Настройка маятника выполняется достаточно просто за счет изменения масс  $M$  и  $m$ , а также длин  $L$  и  $l$ . Трение в шарнире  $O$  не учитывается. Поглощение энергии гасителем осуществляется за счет сил вязкого сопротивления в демпфере с коэффициентом вязкого сопротивления  $C_\varphi$ .

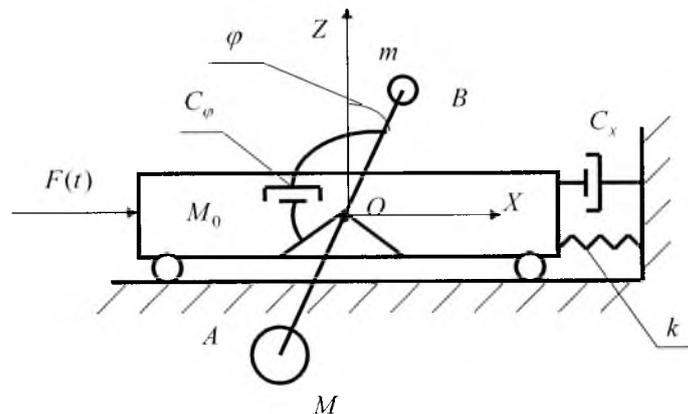


Рис. 1. Общий вид виброзащитной системы с двухмассовым гасителем.

В работе движение несущего тела  $x_0(t)$  рассматривается вдоль оси  $OX$ . Этому движению препятствует упругий элемент с коэффициентом жесткости  $k$ , а также вязкий демпфер с коэффициентом вязкого сопротивления  $C_x$  (рис. 1). Последний введен для учета демпфирования, обусловленного силами внутреннего трения в материалах конструкции или вертикального

ствола высотного объекта. Здесь виброзащищаемая конструкция или высотный объект моделируются в виде несущего тела с приведенной массой  $M_0$  и основной собственной частотой  $\omega_0$ .

Ранее [1] в общем виде были выведены дифференциальные уравнения движения исследуемой виброзащитной системы (рис. 1):

$$(1 + \nu + \mu_0)\ddot{x}_0 + 2n_x\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + p(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) = \overline{F_0} \sin(\omega t); \quad (1)$$

$$\ddot{x}_0 \cos \varphi = q\dot{\varphi} + 2n_\varphi \dot{\varphi} + g \sin \varphi, \quad (2)$$

где  $\nu = M/M_0$ ;  $\mu_0 = m/M_0$ ;  $\overline{F_0} = F_0/M_0$ ;  $2n_x = C_x/M_0$ ;  $\omega_0^2 = k/M_0$ ;  $p = \Delta/M_0$ ;  $\Delta = ML - ml$ ;  $q = \Sigma/\Delta$ ;  $\Sigma = ML^2 + ml^2$ ;  $2n_\varphi = C_\varphi/\Delta$ . При этом полагаем, что  $\Delta > 0$ .

Цель работы – аналитическим путем вывести уравнение АЧХ виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем в линейной постановке.

**Вывод уравнений АЧХ виброзащитной системы в линейной постановке.** Рассматриваются малые колебания исследуемой системы. Это обусловлено тем, что в соответствии с нормативными документами [12, 13] максимальное отклонение верхней точки высотного сооружения от вертикали не должно превышать 1% его высоты. Указанное нормативное требование накладывает ограничения на величины максимальных угловых отклонений двухмассового маятникового гасителя от вертикали. Согласно документу [14] отмеченные ограничения для одномассовых маятниковых гасителей определяются таким угловым диапазоном:  $0,05 \leq \varphi \leq 0,12$  (угол  $\varphi$  измеряется в радианах). В нашем случае будем использовать это же неравенство.

Кроме того, исследование задачи в линейной постановке представляет самостоятельный интерес, так как позволяет выявить главные характеристики и особенности динамического поведения новой виброзащитной системы уже известными методами.

Учитывая малость параметра  $\varphi$ , линеаризуем геометрические нелинейности уравнений системы (1), (2):

$$(1 + \nu + \mu_0)\ddot{x}_0 + 2n_x\dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 - p\ddot{\varphi} = \overline{F_0} \sin(\omega t); \quad (3)$$

$$\ddot{x}_0 = q\dot{\varphi} + 2n_\varphi \dot{\varphi} + g\varphi. \quad (4)$$

Для получения установившегося решения системы уравнений (3), (4) выберем следующие функции (для каждой независимой обобщенной координаты):

$$x_0(t) = A(\omega) \sin(\omega t - \alpha) = A_1 \psi_1(t) + A_2 \psi_2(t); \quad (5)$$

$$\varphi(t) = B(\omega) \sin(\omega t - \beta) = B_1 \psi_1(t) + B_2 \psi_2(t). \quad (6)$$

Как следует из формул (5), (6), в качестве функций  $\psi_i(t)$  выбраны две ортогональные на  $[0, 2\pi]$  тригонометрические функции:  $\psi_1(t) = \sin(\omega t)$  и  $\psi_2(t) = \cos(\omega t)$ , где  $\xi = \omega t$ ,  $\xi \in [0, 2\pi]$ .

Таким образом, решение системы (3), (4) будем искать в виде выражений (5), (6). Подставив (5), (6) в уравнения (3), (4), получим

$$A[\omega_0^2 - (1 + \nu + \mu_0)\omega^2] \sin(\omega t - \alpha) + 2n_x A \omega \cos(\omega t - \alpha) + pB\omega^2 \sin(\omega t - \beta) = \overline{F_0} \sin(\omega t); \quad (7)$$

$$-A\omega^2 \sin(\omega t - \alpha) = (g - q\omega^2)B \sin(\omega t - \beta) + 2n_\varphi B \omega \cos(\omega t - \beta). \quad (8)$$

Далее применим процедуру осреднения по  $\xi = \omega t$  в пределах одного периода. Домножим уравнения (7), (8) на  $\sin(\omega t)$  и проинтегрируем по  $\xi = \omega t$  от 0 до  $2\pi$ . Затем аналогичное интегрирование осуществим после домножения уравнений (7), (8) на  $\cos(\omega t)$ . В результате преобразований получим четыре алгебраических уравнения:

$$A[\omega_0^2 - (1 + \nu + \mu_0)\omega^2] \cos \alpha + 2n_x A \omega \sin \alpha + pB\omega^2 \cos \beta = \overline{F_0}; \quad (9)$$

$$A[\omega_0^2 - (1 + \nu + \mu_0)\omega^2] \sin \alpha - 2n_x A \omega \cos \alpha + pB\omega^2 \sin \beta = 0; \quad (10)$$

$$A\omega^2 \cos \alpha = qB\omega^2 \cos \beta - 2n_\varphi B \omega \sin \beta - gB \cos \beta; \quad (11)$$

$$A\omega^2 \sin \alpha = qB\omega^2 \sin \beta + 2n_\varphi B \omega \cos \beta - gB \sin \beta. \quad (12)$$

На основе алгебраических уравнений (9)–(12) и будем определять АЧХ  $A(\omega)$  исследуемой виброзащитной системы в линейной постановке. Для этого следует освободиться от лишних переменных ( $B$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ) методом последовательного исключения.

Домножим уравнение (11) на  $\sin \alpha$ , (12) – на  $\cos \alpha$ , после чего вычтем второе из первого. В результате получим первое тригонометрическое соотношение:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{2n_\varphi B}{A\omega}. \quad (13)$$

Для получения второго тригонометрического соотношения домножим уравнение (11) на  $\cos \alpha$ , (12) – на  $\sin \alpha$ , после чего сложим их:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{qB\omega^2 - gB}{A\omega^2}. \quad (14)$$

С использованием соотношений (13), (14) определим первое уравнение, которое связывает амплитуды  $A$  несущего тела (в метрах) и  $B$  гасителя (в радианах):

$$\frac{B}{A} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(2n_\varphi\omega)^2 + (q\omega^2 - g)^2}}. \quad (15)$$

Определим второе уравнение, которое связывает амплитуды  $A$  и  $B$ . Для этого домножим уравнение (9) на  $\sin \alpha$ , (10) – на  $\cos \alpha$ , после чего вычтем второе из первого. С учетом выражения (13) получим

$$2n_x A\omega + pB\omega^2 \frac{2n_\varphi B}{A\omega} = \overline{F_0} \sin \alpha. \quad (16)$$

Далее домножим уравнение (9) на  $\cos \alpha$ , (10) – на  $\sin \alpha$ , после чего сложим их. С использованием выражения (14) имеем

$$A[\omega_0^2 - (1 + \nu + \mu_0)\omega^2] + pB^2 \frac{q\omega^2 - g}{A} = \overline{F_0} \cos \alpha. \quad (17)$$

Перепишем соотношения (16), (17) с учетом (15) в таком виде:

$$\frac{A}{\overline{F_0}} [2n_x\omega + 2n_\varphi p\omega\Phi_0(\omega)] = \sin \alpha; \quad (18)$$

$$\frac{A}{\overline{F_0}} \{[\omega_0^2 - (1 + \nu + \mu_0)\omega^2] + p(q\omega^2 - g)\Phi_0(\omega)\} = \cos \alpha, \quad (19)$$

где

$$\Phi_0(\omega) = \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{\omega^4}{(2n_\varphi\omega)^2 + (q\omega^2 - g)^2}.$$

Исключив тригонометрические функции  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , получим уравнение АЧХ для исследуемой виброзащитной системы (для амплитуды  $A(\omega)$  несущего тела):

$$A(\omega) = \frac{\overline{F_0}}{\sqrt{\Phi_1^2(\omega) + \Phi_2^2(\omega)}}, \quad (20)$$

где

$$\Phi_1(\omega) = 2n_x\omega + 2n_\varphi p\omega\Phi_0(\omega);$$

$$\Phi_2(\omega) = [\omega_0^2 - (1 + \nu + \mu_0)\omega^2] + p(q\omega^2 - g)\Phi_0(\omega).$$

Уравнение АЧХ углового отклонения  $B(\omega)$  оси гасителя от вертикали имеет вид

$$B(\omega) = \frac{\overline{F_0} \sqrt{\Phi_0(\omega)}}{\sqrt{\Phi_1^2(\omega) + \Phi_2^2(\omega)}}. \quad (21)$$

**Численный анализ.** Качественный и количественный анализы полученной АЧХ виброзащитной системы (20) проводили на основе численных методов с использованием сертифицированного пакета прикладных программ MathCAD [15]. Главная задача численного эксперимента состояла в подборе таких частотных параметров  $m$ ,  $M$ ,  $l$ ,  $L$  двухмассового маятникового гасителя, при которых график АЧХ виброзащитной системы имел бы симметричную форму с равными значениями максимальных амплитуд на двух частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , одна из которых соответствует несущему телу, другая – гасителю [2, 3]. Физически это означает, что энергия вынужденных колебаний для каждого цикла распределяется поровну между несущим телом и гасителем, что и приводит к снижению уровня амплитуды вынужденных колебаний несущего тела. На следующем этапе после установления такой симметричной формы АЧХ осуществляется минимизация величины амплитуды несущего тела за счет выбора оптимального значения  $n_\varphi$  [2, 3, 16]. С другой стороны, если графики АЧХ системы имеют несимметричную форму, это означает, что параметры гасителя выбраны не оптимальными.

В результате численного эксперимента на частоте  $\omega_0 = 1,5$  рад/с получены следующие параметры двухмассового гасителя:  $L = 2$  м;  $l = 1,5$  м;  $\nu = 0,05$ ;  $\mu_0 = 0,03$ ;  $n_\varphi = 0,45$  м/с. Кроме того, параметры несущего тела  $n_x = 0,03$  с<sup>-1</sup> и  $\overline{F_0} = 0,003g$  выбирали в соответствии с нормативными требованиями [12].

На рис. 2 показаны сравнительные графики АЧХ виброзащитной системы для задач в линейной и нелинейной постановках. Численный анализ показывает, что расхождение в максимальных величинах амплитуд (в метрах) для таких задач составляет приблизительно 6%.

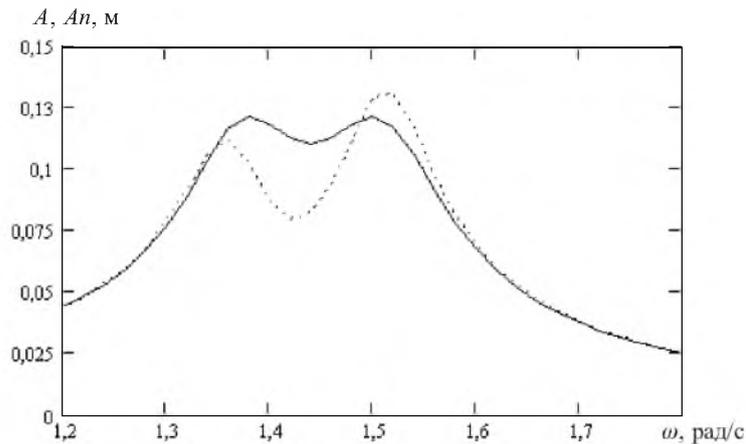


Рис. 2. Графики АЧХ, построенные для виброзащитной системы. Здесь и на рис. 3:  $\omega_0 = 1,5$  рад/с;  $L = 2$  м;  $l = 1,5$  м;  $\nu = 0,05$ ;  $\mu_0 = 0,03$ ;  $n_\varphi = 0,45$  м/с;  $n_x = 0,03$  с<sup>-1</sup>;  $\overline{F_0} = 0,003g$ . (Сплошная линия –  $A$ , линейная постановка; штриховая линия –  $An$ , нелинейная постановка.)

На рис. 3 представлены сравнительные графики АЧХ углового отклонения оси гасителя от вертикали. Численный анализ свидетельствует о том, что расхождение в максимальных величинах соответствующих амплитуд (в радианах) для задач в линейной и нелинейной постановках составляет примерно 10%.

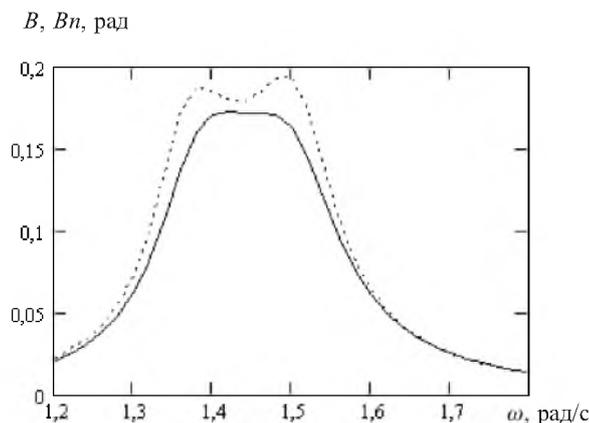


Рис. 3. Графики АЧХ углового отклонения оси гасителя от вертикали для виброзащитной системы. (Сплошная линия –  $B$ , линейная постановка; штриховая линия –  $Bn$ , нелинейная постановка.)

Указанные расхождения обусловлены тем, что графики АЧХ были построены для оптимальных параметров настройки гасителя только для задачи в линейной постановке. Из-за отсутствия соответствующей методики настройки параметров гасителя для задачи в нелинейной постановке использовали те же параметры, что и для линейной. Это видно из графиков АЧХ, построенных в нелинейной постановке: они имеют несимметричный характер. Такая же несимметричность отмечается для графиков на рис. 2 и 3. Поэтому для задачи в нелинейной постановке необходимо разработать отдельную методику оптимальной настройки регулирующих параметров виброзащитной системы, что является самостоятельной задачей. Кроме того, указанные расхождения можно объяснить также тем, что параметр  $\varphi$  превысил пределы приведенного выше углового диапазона ( $\varphi_{\max} = 0,194$ ), поэтому в данном случае геометрические нелинейности оказывают существенное влияние.

В численном эксперименте задача по определению оптимального значения коэффициента  $n_\varphi$  представляла самостоятельный интерес. На рис. 4 показано, как изменяется максимальная амплитуда  $A$  несущего тела в зависимости от изменения величины коэффициента  $n_\varphi$  при фиксированных значениях других параметров. Как видно, функция  $A = A(n_\varphi)$  имеет явно выраженный локальный минимум в точке  $n_\varphi = 0,45$  м/с, который равен  $A \cong 0,122$  м. Такое поведение функции позволяет путем соответствующего изменения коэффициента  $n_\varphi$  определять минимальное значение амплитуды вынужденных колебаний для конкретно заданного набора параметров виброзащитной системы. Если бы выражение (20) для амплитуды  $A$  было не таким громоздким, то точную величину оптимального коэффициента  $n_\varphi$  можно определить из алгебраического уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial n_\varphi} = 0.$$

Как оказалось, данная задача решается намного проще с высокой степенью точности с помощью численного эксперимента.

График на рис. 4 отражает также следующую особенность исследуемой системы: постепенное увеличение коэффициента  $n_\varphi$  приводит к повышению амплитуды  $A$  вынужденных колебаний несущего тела по достижении ею минимального значения. Ранее факт существования локального минимума, но в системе с сухим трением, был отмечен в работе [17]. Физически это означает, что гаситель встречает все увеличивающееся сопротивление вязкого демпфера. При больших значениях коэффициента  $n_\varphi$  гаситель практически удерживается последним, не производя относительных колебательных движений, т.е. гаситель “передемпфирован”. В этом случае двухмассовый маятниковый гаситель не функционирует надлежащим образом, а рабочие массы  $m$  и  $M$  только создают дополнительное динамическое нагружение на несущий ствол виброзащищаемого объекта.

Для сравнения на рис. 5 приведен график АЧХ  $AN(\omega)$  механической системы без гасителя. В этом случае максимальное значение амплитуды несущего тела равно  $AN_{\max} = 0,327$  м и достигается на частоте  $\omega_{\max} = 1,5$  рад/с, что примерно в 2,7 раза больше, чем для механической системы с гасителем.

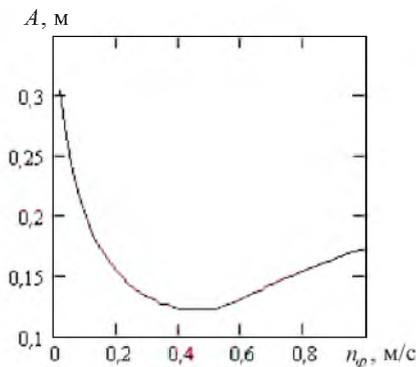


Рис. 4

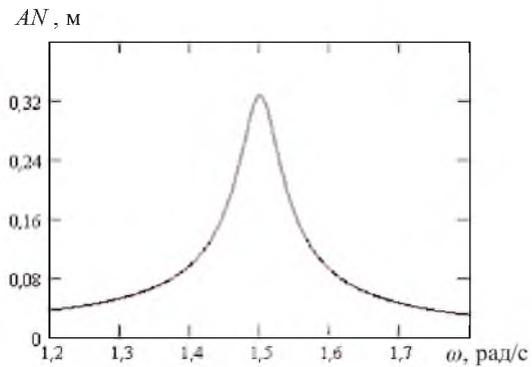


Рис. 5

Рис. 4. Изменение максимальной амплитуды  $A = A(n_\varphi)$  несущего тела в зависимости от величины коэффициента  $n_\varphi$  для системы со следующими параметрами:  $\omega_0 = 1,5$  рад/с;  $L = 2$  м;  $l = 1,5$  м;  $\nu = 0,05$ ;  $\mu_0 = 0,03$ ;  $n_x = 0,03$  с<sup>-1</sup>;  $F_0 = 0,003g$ .

Рис. 5. График АЧХ  $AN(\omega)$  исследуемой механической системы без гасителя.

**Закключение.** Предложенная методика определения уравнения АЧХ исследуемой виброзащитной системы в линейной постановке позволяет оптимизировать выбор регулирующих параметров при настройке двухмассового маятникового гасителя на необходимый режим виброзащиты высотных объектов. Основным критерий такого режима – соответствие величин максимальных амплитуд несущего тела требованиям существующих нормативных документов. Проведенный на основе полученного в данной работе

уравнения АЧХ численный эксперимент показал, что предложенная система виброподавления вынужденных колебаний позволяет приблизительно в 2,7 раза снизить уровень амплитуд вынужденных колебаний несущих тел. Это достигается за счет специальной настройки параметров гасителя на соответствующую частоту собственных колебаний несущего тела.

Настройку двухмассового гасителя по частоте следует выполнять с помощью оптимального выбора четырех основных его параметров:  $m$ ,  $M$ ,  $l$ ,  $L$ . Подбор этих частотных параметров необходимо осуществлять таким образом, чтобы график АЧХ виброзащитной системы имел симметричную форму с равными значениями максимальных амплитуд на двух частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , одна из которых соответствует несущему телу, другая – гасителю. Физически это означает, что энергия вынужденных колебаний для каждого цикла распределяется поровну между несущим телом и гасителем, что и позволяет снижать уровень амплитуд вынужденных колебаний несущего тела.

Для диапазона малых углов ( $0,05 \leq \varphi \leq 0,12$ ) расхождение в максимальных амплитудах несущего тела для задач в линейной и нелинейной постановках является незначительным, и результаты определения АЧХ системы для задачи в линейной постановке можно использовать при прогнозировании динамических характеристик рассматриваемой виброзащитной системы.

Представляет интерес одна из особенностей исследуемой системы: функция  $A = A(n_\varphi)$  имеет явно выраженный локальный минимум, который и позволяет осуществлять настройку гасителя по уровню вязкого демпфирования вынужденных колебаний.

Разработка методики определения АЧХ виброзащитной системы и оптимальной настройки параметров двухмассового гасителя для задачи в нелинейной постановке является отдельной актуальной проблемой, которая будет поставлена и решена в последующих исследованиях.

Результаты исследования могут быть интересны специалистам в области динамики и прочности машин и механизмов, теоретической механики, а также рекомендуются для использования разработчиками и проектировщиками виброгасителей при определении их оптимальных характеристик.

## Резюме

Розглядається динамічна поведінка віброзахисної системи з двомасовим маятниковим гасником. Із використанням методу осереднення Рітца визначено рівняння амплітудно-частотних характеристик цієї системи у лінійній постановці. Запропоновано числовий метод визначення параметрів налаштування гасника.

1. Легеза В. П. Эффективность виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем // Пробл. прочности. – 2007. – № 5. – С. 121 – 131.
2. Обморшев А. Н. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1965. – 276 с.
3. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

4. *Магнус К.* Колебания. Введение в исследование колебательных систем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
5. *Василенко М. В., Алексейчук О. М.* Теорія коливань і стійкості руху. – Київ: Вища шк., 2004. – 526 с.
6. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. – Л.: Наука, 1968. – 650 с.
7. *Постнов В. А., Калинин В. О., Ростовцев Д. М.* Вибрации корабля. – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
8. *Левитский Н. И.* Колебания в механизмах. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
9. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 272 с.
10. *Ritz W.* Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variations – Probleme der mathematischen Physik // *Z. für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*. – 1909. – **V135**, No. 1. – S. 1 – 61.
11. *Klotter K.* Non-linear vibration problems treated by the averaging method of W. Ritz // *Proc. 1st U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.* – Chicago, Illinois: Edwards Brothers Inc., 1951. – P. 125 – 131.
12. *СНиП 2.01.07-85.* Нагрузки и воздействия. Нормы проектирования. – М.: Госстрой СССР, 1987. – 35 с.
13. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия.* Справочник проектировщика / Под ред Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1981. – 216 с.
14. *Сысоев В. И.* Устройства для гашения колебаний. Справочник проектировщика / Под ред Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1984. – 278 с.
15. *Дьяконов В. В.* MathCAD-2001. Специальный справочник. – СПб.: ПИТЕР, 2002. – 832 с.
16. *Легеза В. П.* Влияние шарового гасителя вынужденных колебаний с линейновязким трением на динамическое поведение несущего тела // *Пробл. управления и информатики*. – 2003. – № 4. – С. 44 – 52.
17. *Легеза В. П.* Регулирование динамического поведения несущего тела на основе применения циклоидального гасителя вынужденных колебаний с сухим трением // *Там же*. – 2002. – № 1. – С. 99 – 106.

Поступила 05. 06. 2007