

УДК 536.25

ЛАМИНАРНОЕ СМЕШИВАНИЕ ЖИДКОСТЕЙ. ЧАСТЬ 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ СТОКСА В КЛИНООБРАЗНОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПОЛОСТИ

Т. С. КРАСНОПОЛЬСКАЯ, В. В. МЕЛЕШКО

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 22.03.2004 ◊ Пересмотрено 24.09.2004*

Работа посвящена исследованию основных свойств дистрибутивного ламинарного смешивания в двумерных областях на примере периодического перемешивания в кольцевой клинообразной полости. Для определения когерентных структур смесей методология анализа ламинарного смешивания, изложенная в части 1 настоящего исследования [1], дополняется необходимыми этапами для анализа периодических процессов смешивания. Получено аналитическое решение для поля скоростей в полости и использован алгоритм слежения за деформированием контурной линии раздела смешиваемых компонентов. Приводится техника обнаружения всех периодических точек потока и анализируются когерентные структуры. Строятся статистические количественные меры оценки качества перемешивания в любой момент времени и обосновывается их применение.

Робота присвячена дослідженню основних властивостей дистрибутивного ламинарного змішування у двумірних областях на прикладі періодичного перемішування в кільцевій клинообразній порожнині. Для визначення когерентних структур сумішей методологія аналізу ламинарного змішування, що викладена в частині 1 даного дослідження [1], доповнюється необхідними етапами для аналізу періодичних процесів змішування. Отримано аналітичний розв'язок для поля швидкостей в порожнині та використаний алгоритм слідкування за деформуванням контурної лінії розподілу змішуваних компонентів. Приводиться техніка знаходження усіх періодичних точок течії та аналізуються когерентні структури. Побудовані статистичні кількісні міри оцінки якості перемішування у будь-який момент часу та обґрунтовується їх використання.

The paper describes the new methodology for investigating and evaluating the basic properties of distributive laminar mixing in creeping flows [1] by analysing a periodic flow in a wedge annular cavity. The study is based on the construction of Eulerian and Lagrangian representations of mixing process, determination of periodic points, and quantification of the mixed state. It addresses problems: how to organize steady or periodic distributive mixing in a two-dimensional wedge cavity (a prototype for an extruder mixer) and where to put a blob (or blobs) in order to achieve the best result of mixing in finite time. The central question is what determines coherent structures in mixing patterns. Numerical data are presented showing the change in time of the statistical values of the square density, the entropy and the intensity of segregation. These data permit to estimate the dynamics of mixing and deviation from a uniform state at any moment in time. Time reversibility is an important issue in numerical simulations, it concerns the reversibility both of individual points and quality measures. We have concluded that computation of the measures shows a complete reversibility in spite of irreversibility of some individual points.

ВВЕДЕНИЕ

Процессы смешивания жидкостей большой вязкости лежат в основе различных технологий в пищевой, химической, нефтехимической промышленности и в современных биотехнологиях [2]. К настоящему времени накоплены обширные экспериментальные данные о закономерностях ламинарного смешивания [3] и развита методология [1] оценки качества смеси.

В данной статье излагаются дополнительные к изложенным в части 1 настоящего исследования [1] аспекты методологии исследования дистрибутивного ламинарного механического смешивания двух одинаковых по плотности и вязкости жидкостей применительно к периодическим процессам. Полученные знания могут служить первым шагом в исследовании смешивания в различных технологических процессах. При этом отметим, что характерная особенность многих типичных течений в промышленных миксерах заключается в том, что

они являются очень медленными (ползущими) с существенным преобладанием сил вязкости над инерционными силами. Такие течения с малыми числами Рейнольдса в ограниченной области, вызываемые движениями ее границы, могут в первом приближении описываться линейными уравнениями Стокса. Знание поля эйлеровой скорости жидкости в этом приближении для канонических геометрий области может быть получено либо из строгого аналитического решения соответствующих линейных граничных задач [4–8], либо прямым численным моделированием с помощью современных прикладных пакетов [9]. Следует подчеркнуть, что приближенная аппроксимация поля скорости [3] приводит к значительным отличиям от реальной картины смеси [10]. Кроме того, поле скорости в области принимается периодическим во времени, задаваемым периодическим движением границы области, что большей частью и осуществляется технологически.

В качестве базового объекта для представления

данной методологии мы выбрали двумерное течение в полости в виде части кольца, ограниченной двумя радиусами, в которой движение жидкости задается попеременным касательным движением круговых границ, что в первом приближении моделирует один из возможных видов промышленных миксеров. Кроме того, такая геометрия весьма удобна для сравнительного экспериментального анализа процесса смешения для разных начальных положений пятна при одинаковом протоколе движения границ. Следует особо подчеркнуть, что проблема механического смешивания, которая рассматривается в данной статье, отличается по существу от математических задач по изучению систем с перемешиванием (где традиционно рассматривается предельное поведение систем при стремлении времени к бесконечности), причем большей частью хаотических, обладающих положительной К-энтропией. Мы же ограничиваем рассмотрение *конечными* отрезками времени и главным образом интересуемся тем, как организовать смешивание и где поместить пятно добавки (или пятна), чтобы достичь лучшего результата смешивания этого пятна за конечное время.

На рис. 1 для иллюстрации сказанного представлены четыре типичных картины смешивания начальных круглых пятен (показанных темными кругами) в кольцевой полости после периодического поочередного движения внутренней и внешней границ с равным совокупным перемещением обеих границ для каждой полости. При этом рассматриваются различные протоколы смешивания, различные скорости и периоды движений границ каждой полости, но приложенная энергия, которая пропорциональна совокупному перемещению границ, одинакова для представленных картин смесей. Сравнение картин показывает, что, несмотря на равную потребленную энергию, результаты смешивания являются различными. Они существенно зависят от начального положения круглого пятна и протокола смешивания. Данная статья посвящена объяснению причин получения различных результатов смешивания и их количественной оценке.

Предлагаемая методология включает в себя выполнение следующих шагов в исследовании:

- (1) построение аналитического решения для поля скоростей;
- (2) определение положения контура границы смешиваемых жидкостей в заданные моменты времени;
- (3) нахождение периодических точек и инвариантных многообразий;
- (4) оценка качества смешивания в любой момент

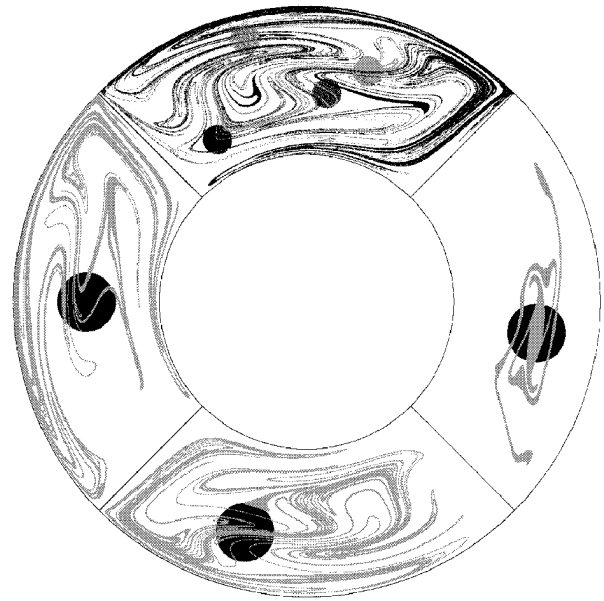


Рис. 1. Четыре клиновидных полости со смесями, полученными при равной затраченной энергии на перемешивание начальных круглых пятен

времени.

В первой части нашей работы [1] мы подробно с привлечением конкретных примеров показали применение второго и четвертого из указанных этапов методологии. В настоящей статье поясним применение остальных двух. Как отмечалось выше, нахождение аналитического решения является базовым шагом, позволяющим выполнение всех последующих этапов исследования.

Когда движение границ полости оказывается периодическим во времени, поле скоростей внутри её тоже будет периодическим. Изучение движений частицы в периодически заданном скоростном поле может быть сведено к изучению поведения в дискретном времени посредством анализа серии положений выбранной одной точки, полученных стробоскопически через каждый период времени. Такой подход сводит изучение динамической системы во времени к изучению последовательности дискретных отображений точек на плоскости (так называемых отображений Пуанкаре [11]), но все же сохраняет существенные закономерности процесса. Фиксированная неподвижная точка такого сечения соответствует замкнутой периодической траектории рассматриваемой частицы, в которую точка возвращается после одного, двух или более полных периодов. Точка на такой периодической траектории в начальный момент времени называется периодической точкой. Поэтому важной за-

дачей является отыскание всех таких периодических точек. Если заданное поле скоростей обладает некоторой пространственной симметрией в рассматриваемой области, то для отыскания положений периодических точек можно применить метод, разработанный для задач смешивания в работах [12–15], как существенная модификация подхода, предложенного в работах [16, 17]. Кроме определения позиций каждой периодической точки, важным шагом исследования является классификация их типов (эллиптический, параболический или гиперболический), изучая линеаризованные динамической системы в непосредственной близости каждой точки [18]. Такая методика определения типа периодических точек подобна классификации неподвижных точек в поле скоростей установившегося течения, впервые предложенной Н.Е. Жуковским в магистерской диссертации [19]. В данной работе будет показано, как знание месторасположений и типов периодических точек позволяет определить оптимальные режимы смешивания и возможность идентифицировать когерентные структуры в полученных смесях [20].

В заключительной части данной работы, следуя предложенной методологии оценки качества смесей [1] мы будем использовать "грубую плотность" распределения как основную меру для построения трех критериев качества смеси: суммарной среднеквадратной плотности [21], энтропии [22] и интенсивности сегрегации [23]. Эти три критерия показывают динамику перемешивания в их собственных масштабах и могут использоваться для описания динамики процесса. Используя любой из критериев, можем для выбранного размера квадрата ("зерна") определить время, необходимое для процесса перемешивания, чтобы достичь однородного (оцениваемого в выбранном масштабе рассмотрения) состояния. Как показано в [1], чем больше размер стороны квадрата, тем быстрее это заданное однородное состояние достигается. Три критерия не являются независимыми и служат статистическими мерами первого порядка [24]. Для более полного описания качества смеси будем также использовать такую меру как масштаб сегрегации [23], который является статистической мерой второго порядка. Масштаб сегрегации описывает средний размер сплошных пятен смешиваемого компонента.

Статья имеет следующие разделы: после введения следует постановка проблемы смешивания в двумерной кольцевой клиновидной полости, далее представлены аналитическое выражение для поля скоростей, алгоритм поиска и классификация периодических точек, а также рассмотрение кон-

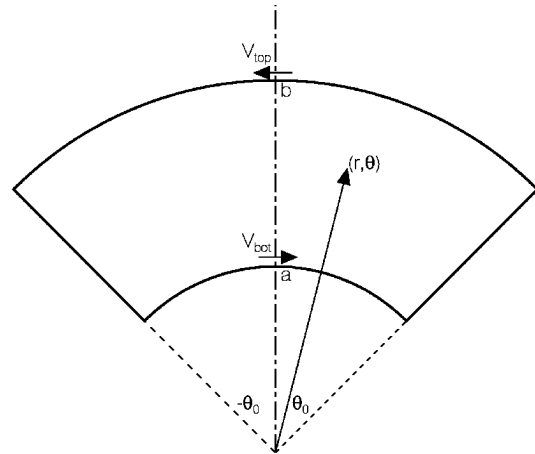


Рис. 2. Геометрия клиновидной секторной полости

кретного периодического протокола смешивания и анализ когерентных структур.

1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим квазистационарное двумерное ползущее течение несжимаемой вязкой жидкости в кольцевой клинообразной полости, $a \leq r \leq b$, $|\theta| \leq \theta_0$ (рис. 2), вызванное тангенциальными периодически изменяющимися во времени скоростями $V_{bot}(t)$ и $V_{top}(t)$ на изогнутых нижней и верхней границах $r = a$ и $r = b$, соответственно. Части границы $a \leq r \leq b$, $|\theta| = \theta_0$ неподвижны. При этом выбираем

$$\left. \begin{aligned} V_{bot}(t) &= \frac{2a\Theta}{T}, & V_{top}(t) &= 0, \\ \text{при } kT < t &\leq \left(k + \frac{1}{2}\right)T, \\ V_{bot}(t) &= 0, & V_{top}(t) &= -\frac{2b\Theta}{T}, \\ \text{при } \left(k + \frac{1}{2}\right)T < t &\leq (k+1)T, \end{aligned} \right\} (1)$$

($k = 0, 1, 2, \dots$), то есть такой разрывный во времени протокол смешивания, когда в течение каждого полупериода $T/2$ жидкость в полости движется стационарно под действием стационарного движения нижней или верхней стенки на угол Θ по и против часовой стрелки соответственно. Легко убедиться, что такой протокол реализуется экспе-

риментально для полного кольца, состоящего из четырёх секторов, представленных на рис. 1.

Радиальную u_r и азимутальную u_θ компоненты скорости течения в полости можно выразить через функцию тока Ψ как

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (2)$$

Для течений в приближении Стокса функция тока Ψ удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0 \quad (3)$$

(∇^2 – оператор Лапласа) с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -V_{bot}, \quad \text{при } r = a, \quad |\theta| \leq \theta_0, \\ \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -V_{top}, \quad \text{при } r = b, \quad |\theta| \leq \theta_0, \\ \Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0, \quad \text{при } a \leq r \leq b, \quad |\theta| = \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поэтому для функции тока Ψ имеем классическую бигармоническую задачу с заданными значениями функции и ее нормальной производной на границе. Важно заметить, что нормальная производная (или тангенциальная скорость u_θ) является разрывной функцией в угловых точках $(a, \pm\theta_0)$ и $(b, \pm\theta_0)$. Однако это обстоятельство не нарушает непрерывности поля скоростей внутри всей полости, а лишь вызывает некоторые трудности в вычислении с необходимой точностью скорости в окрестности этих точек.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (5)$$

с начальными условиями $r = r_{in}, \theta = \theta_{in}$ при $t = 0$ описывает движение пассивной лангранжевой частицы в известном эйлеровом поле скоростей.

Система (5) может быть записана в гамильтоновой форме. Помимо очевидного преобразования к прямоугольным координатам $x = r \sin \theta, y = r \cos \theta$, в которых система (5) может быть представлена в традиционном виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Psi_c}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \Psi_c}{\partial x} \quad (6)$$

при $\Psi_c(x, y, t) \equiv \Psi \left((x^2 + y^2)^{1/2}, \arctan \frac{x}{y}, t \right)$, она может быть непосредственно преобразована в систему

$$\frac{d(r^2)}{dt} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial (r^2)},$$

$$\tilde{\Psi}(r^2, \theta, t) \equiv 2\Psi((r^2)^{1/2}, \theta, t) \quad (7)$$

относительно r^2 и θ , являющихся сопряженными каноническими переменными.

В пределах каждого из интервалов времени $(kT, kT + T/2), (kT + T/2, kT + T), (k = 0, 1, 2, \dots)$, когда функция тока явно не зависит от времени, система (5) интегрируема и при этом существует ее первый интеграл $\Psi(r, \theta) = \text{const}$. Следовательно, частица (r_{in}, θ_{in}) движется по установившимся линиям тока в течение первой половины периода $(0, T/2)$. В момент $t = T/2$ топология линий тока мгновенно изменяется, и частица движется по новым линиям тока в течение второй половины периода $(T/2, T)$, и так далее. Пространственные положения частицы изменяются непрерывно, но ее скорость имеет разрыв значений в каждый момент времени $t_k = kT/2$.

Именно из-за этих периодических резких изменений поля скоростей возникает необходимость исследовать вопрос устойчивости и неустойчивости решения системы (5), как частного случая проблемы адвекции [25]. Устойчивость (по Ляпунову) невозмущенного движения означает следующее его свойство: всегда можно подобрать настолько малые возмущения начальных условий, чтобы возмущения координат не выходили из наперед заданных границ *в течение всего времени движения*. Когда система такова, что незначительное различие начальных координат точек приводит только к малому изменению их положений с течением времени, то считают, что система обладает устойчивым решением. Если же малое различие в начальных положениях вызывает конечное расстояние между точками через конечное время, то считают, что система обладает неустойчивым решением. Вследствие разрывности поля скоростей система (5) может иметь неустойчивые решения, когда весьма близкие в начальный момент частицы за конечное время расходятся друг от друга на конечное расстояние, оказываясь даже в совершенно разных частях полости. Именно такая ситуация является предпочтительной в задачах перемешивания, когда стремятся создать такое поле скоростей и движение частиц, при котором близкие по начальному положению частицы (например, находящиеся в круглом пятне) с течением времени стремятся уйти друг от друга на значительные интервалы, покрыть область всюду и “забыть” свою близость в начале процесса перемешивания.

Задача изучения смешивания некоторого окрашенного количества жидкости (пятна), которое никак не влияет на поле скоростей в рассматриваемом

мой области (так называемая пассивная примесь), состоит в прослеживании во времени за положением континуума частиц, первоначально расположенных внутри некоторой области, скажем, круга радиуса R с центром в (r_c, θ_c) . Полагаем, что течение обеспечивает только непрерывное деформирование первоначально связанного контура пятна. Поэтому из топологических соображений следует, что о полученной картине смешивания пятна можно судить лишь по деформированному его контуру.

Вопрос о том, как отслеживать непрерывные изменения замкнутого контура в периодически изменяющемся поле скоростей представляет отдельную численную проблему. Очевидное решение путем замены непрерывного контура большим количеством эквидистантных точек, соединенных малыми отрезками прямых, может иметь непреодолимые трудности уже после нескольких периодов, когда расстояние между двумя начально соседними точками станет конечным и окажется неясным как их соединять. Поэтому важная часть нашей методологии анализа смешивания посвящена развитию эффективного численного алгоритма [1] слежения за процессом деформирования контура пятна.

Проблема обнаружения периодических точек потока при использовании отображения Пуанкаре, очевидно, сводится к задаче поиска корней двух нелинейных уравнений на плоскости. Как известно [26], не существует хороших общих методов для определения корней нелинейных алгебраических уравнений. В рассматриваемой задаче перемешивания ситуация даже более сложная, так как положение любой точки после каждого отображения определяется системой дифференциальных уравнений. Следовательно, стандартный путь поиска периодических точек может требовать слишком большого объема компьютерных вычислений и не всегда приводит к цели. Поэтому мы должны развить новый алгоритм нахождения всех таких точек или, по крайней мере, точек низших порядков.

Наконец, необходимо использовать количественные меры, характеризующие качество смешивания, чтобы сравнивать результаты различных протоколов перемешивания и изменения начальных положений окрашенного пятна.

2. МЕТОДЫ

В данном разделе остановимся на определении поля скоростей (в подразделе 2.1), а также на методе идентификации периодических точек (в под-

разделе 2.2), так как алгоритм слежения за деформированием контура раздела смешиваемых компонентов и критерии оценки качества смесей были подробно описаны в части 1 настоящего исследования [1].

2.1. Аналитическое решение для поля скоростей

Чтобы найти поле скоростей в клинообразной круговой области, применим метод суперпозиции [27] к граничной задаче (3) - (4) и представим функцию тока как сумму двух бигармонических функций:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (8)$$

Эти функции выбраны в форме рядов Фурье с достаточным функциональным произволом для выполнения граничных условий (4) при $r = a$, $r = b$ и при $|\theta| = \theta_0$ соответственно. Путь нахождения таких решений детально изложен в [4], здесь же представим лишь окончательные результаты. Ввиду определенной симметрии задачи по углу θ , функции Ψ_1 и Ψ_2 могут быть записаны как

$$\begin{aligned} \Psi_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} \left\{ X_m \left[\left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_m} - \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_m-2} + \right. \right. \\ \left. \left. + r_0^{\alpha_m-2} \left(\frac{r}{b}\right)^{\alpha_m+2} - r_0^{\alpha_m} \left(\frac{r}{b}\right)^{\alpha_m} \right] - \right. \\ \left. - Y_m \left[\left(\frac{r}{b}\right)^{\alpha_m+2} - \left(\frac{r}{b}\right)^{\alpha_m} + r_0^{\alpha_m} \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_m} - \right. \right. \\ \left. \left. - r_0^{\alpha_m+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{\alpha_m-2} \right] \right\} \cos \alpha_m \theta, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Psi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \frac{r}{\beta_n} P_n(\theta) \sin \beta_n \rho, \quad (10)$$

где

$$\alpha_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\theta_0}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{l_0}, \quad l_0 = \ln \frac{b}{a},$$

$$r_0 = \frac{a}{b}, \quad \rho = \ln \frac{r}{a}, \quad (11)$$

$$P_n(\theta) = \frac{\operatorname{ch} \beta_n \theta}{\operatorname{ch} \beta_n \theta_0} \cos \theta \sin \theta_0 - \frac{\operatorname{sh} \beta_n \theta}{\operatorname{sh} \beta_n \theta_0} \sin \theta \cos \theta_0. \quad (12)$$

Таким образом, мы выбираем представление (8) в таком виде, чтобы нулевые граничные условия (4) удовлетворялись тождественно.

Три последовательности коэффициентов X_m , Y_m и Z_n обеспечивают достаточную функциональную свободу для удовлетворения граничных условий по

нормальным производным. Эти условия дают три функциональных уравнения, которые после ряда преобразований приводятся к двум несвязанным системам алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_m s_m - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} g_{mn} \bar{Z}_n &= \frac{a}{\theta_0} (V_{bot} - V_{top}), \\ m = 1, 2, 3, \dots \\ \bar{Z}_n \Delta_n - \sum_{m=1}^{\infty} h_{nm} \bar{X}_m &= 0, n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \bar{Y}_m t_m - \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} g_{mn} \bar{Z}_n &= \frac{a}{\theta_0} (V_{bot} + V_{top}), \\ m = 1, 2, 3, \dots \\ \bar{Z}_n \Delta_n - \sum_{m=1}^{\infty} h_{nm} \bar{Y}_m &= 0, n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

для неизвестных \bar{X}_m, \bar{Z}_n (n – нечетное) и \bar{Y}_m, \bar{Z}_n (n – четное) соответственно. Здесь использованы новые неизвестные

$$\begin{aligned} \bar{X}_m &= -(X_m - Y_m r_0) (1 + r_0^{\alpha_m + 1}) (1 + r_0^{\alpha_m - 1}), \\ \bar{Y}_m &= -(X_m + Y_m r_0) (1 - r_0^{\alpha_m + 1}) (1 - r_0^{\alpha_m - 1}), \\ \bar{Z}_n &= Z_n a l_0 \frac{\text{ch } 2\beta_n \theta_0 + \cos 2\theta_0}{2\theta_0 \text{sh } 2\beta_n \theta_0}, \end{aligned} \quad (15)$$

и обозначения

$$\begin{aligned} g_{mn} &= \frac{8\alpha_m^2 \beta_n}{l_0 [(\alpha_m - 1)^2 + \beta_n^2][(\alpha_m + 1)^2 + \beta_n^2]}, \\ h_{nm} &= \frac{4\alpha_m \beta_n^2}{\theta_0 [(\alpha_m - 1)^2 + \beta_n^2][(\alpha_m + 1)^2 + \beta_n^2]}, \\ s_m &= \frac{1 - r_0^{2\alpha_m} + \alpha_m (r_0^{\alpha_m - 1} - r_0^{\alpha_m + 1})}{(1 + r_0^{\alpha_m - 1})(1 + r_0^{\alpha_m + 1})}, \\ t_m &= \frac{1 - r_0^{2\alpha_m} - \alpha_m (r_0^{\alpha_m - 1} - r_0^{\alpha_m + 1})}{(1 - r_0^{\alpha_m - 1})(1 - r_0^{\alpha_m + 1})}, \\ \Delta_n &= \frac{\text{sh } 2\beta_n \theta_0 + \beta_n \sin 2\theta_0}{\text{ch } 2\beta_n \theta_0 + \cos 2\theta_0}. \end{aligned} \quad (16)$$

Бесконечные системы (13) и (14) являются вполне регулярными [28], т. е. для каждой строки бесконечной матрицы сумма модулей недиагональных членов будет меньше на некоторое положительное число, чем диагональный элемент. Следовательно, для ограниченных по величине правых частей единственное и ограниченное решение может быть найдено методом простой редукции, т. е.

$$\bar{X}_m = 0, \bar{Y}_m = 0, m > M, \quad \bar{Z}_n = 0, n > 2N, \quad (17)$$

с последующим решением конечных систем $M + N$ уравнений, соответствующих системам (13)–(14).

Детальный анализ, данный в [4, 6], показывает следующее асимптотическое поведение:

$$\begin{aligned} \bar{X}_m &= X + \bar{X}_m, \quad \bar{Y}_m = Y + \bar{Y}_m, \\ \bar{Z}_n &= Z_e + \bar{Z}_n, \quad (n - \text{четное}), \\ \bar{Z}_n &= Z_o + \bar{Z}_n, \quad (n - \text{нечетное}), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} X &= \frac{\pi^2 a}{(\pi^2 - 4)\theta_0} (V_{bot} - V_{top}), \\ Y &= \frac{\pi^2 a}{(\pi^2 - 4)\theta_0} (V_{bot} + V_{top}), \\ Z_o &= \frac{2}{\pi} X, \quad Z_e = \frac{2}{\pi} Y \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned} \bar{X}_m &= O(\alpha_m^{-\text{Re}\lambda_1}), \quad \bar{Y}_m = O(\alpha_m^{-\text{Re}\lambda_1}), \\ \bar{Z}_n &= O(\beta_n^{-\text{Re}\lambda_1}), \end{aligned} \quad (20)$$

при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$. Здесь $\lambda_1 = 2.739593 + i1.119025$ является наименьшим положительным корнем трансцендентного уравнения $\sin(\pi\lambda/2) + \lambda = 0$.

Такого рода асимптотическое поведение говорит о том, что метод простой редукции (17) является неэффективным, так как не может обеспечить ненулевые значения неизвестным с большими значениями индексов. Знание асимптотического поведения коэффициентов рядов Фурье существенно улучшает сходимость рядов вблизи границ путем выделения явной суммы медленно сходящихся членов. Конечно, влияние такого рода сумм менее важно внутри области: радиальные и угловые функции в выражениях (9) и (10) становятся пренебрежимо малыми с увеличением чисел m или n соответственно. Следовательно, можно показать, что любая малая вариация коэффициентов $\bar{X}_m, \bar{Y}_m, \bar{Z}_n$ (даже их равенство нулю при $m > M$ и $n > 2N$) не изменит поле скоростей значительно

внутри области. Но вопрос точности удовлетворения граничным условиям является существенно важным для точности решения всей задачи.

Согласно выражения (20) неизвестные $\bar{X}_m, \bar{Y}_m, \bar{Z}_n$ убывают достаточно быстро и решение этих новых бесконечных систем методом редукции может быть получено на основе нескольких (обычно M и N меньше пяти) первых неизвестных.

Возвращаясь к коэффициентам X_m, Y_m, Z_n , запишем их как

$$\begin{aligned} X_m &= R_b + x_m, & Y_m &= R_t + y_m, \\ Z_n &= F_b + (-1)^n F_t + z_n \end{aligned} \quad (21)$$

при

$$\begin{aligned} R_b &= -\frac{\pi^2 a V_{bot}}{\theta_0(\pi^2 - 4)}, & R_t &= -\frac{\pi^2 b V_{top}}{\theta_0(\pi^2 - 4)}, \\ F_b &= \frac{4\pi a V_{bot}}{l_0(\pi^2 - 4)}, & F_t &= \frac{4\pi b V_{top}}{l_0(\pi^2 - 4)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Громоздкие выражения для x_m, y_m, z_n здесь не выписаны, однако и они убывают как

$$\begin{aligned} x_m &= O(\alpha_m^{-\text{Re}\lambda_1}), & y_m &= O(\alpha_m^{-\text{Re}\lambda_1}), \\ z_n &= O(\beta_n^{-\text{Re}\lambda_1}), \end{aligned} \quad (23)$$

когда $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$.

Подстановка коэффициентов (21) в (9) и (10) дает окончательное выражение для функции тока в кольцевой клиновидной полости:

$$\begin{aligned} \Psi &= R_b \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) S \left(\frac{a}{r}, \theta \right) - R_t \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) S \left(\frac{r}{b}, \theta \right) + \\ &+ F_b r P_+(\rho, \theta) + F_t r P_-(\rho, \theta) + \\ &+ r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{\beta_n} P_n(\theta) \sin \beta_n \rho - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} \left\{ \left(\frac{r^2}{a^2} - 1 \right) \left[X_m r_0^{\alpha_m} \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha_m} - \right. \right. \\ &- x_m \left. \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_m} \right] \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) \left[Y_m r_0^{\alpha_m} \left(\frac{a}{r} \right)^{\alpha_m} - \right. \right. \\ &- y_m \left. \left. \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha_m} \right] \right\} \cos \alpha_m \theta, \end{aligned} \quad (24)$$

где использованы следующие обозначения для сумм:

$$P_+(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} P_n(\theta) \sin \beta_n \rho,$$

$$P_-(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n} P_n(\theta) \sin \beta_n \rho, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} S(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\alpha_m} \xi^{\alpha_m} \cos \alpha_m \theta = \\ &= \frac{\theta_0 a}{\pi r} \text{ctan} \left[\frac{2\xi^{\pi/2\theta_0} \cos(\pi\theta/2\theta_0)}{1 - \xi^{\pi/\theta_0}} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Функции $P_+(\rho, \theta)$ и $P_-(\rho, \theta)$ могут быть преобразованы в быстро сходящиеся ряды вида

$$\begin{aligned} P_+(\rho, \theta) &= \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \{ \sin(\theta_0 - \theta) [S_+(\rho, 2\nu - \theta_0 - \theta) - \\ &- S_+(\rho, 2\nu + \theta_0 + \theta)] + \\ &+ \sin(\theta_0 + \theta) [S_+(\rho, 2\nu - \theta_0 + \theta) - \\ &- S_+(\rho, 2\nu + \theta_0 - \theta)] \}, \\ P_-(\rho, \theta) &= \sum_{\nu=1,3,\dots}^{\infty} \{ \sin(\theta_0 - \theta) [S_-(\rho, 2\nu - \theta_0 - \theta) - \\ &- S_-(\rho, 2\nu + \theta_0 + \theta)] + \\ &+ \sin(\theta_0 + \theta) [S_-(\rho, 2\nu - \theta_0 + \theta) - \\ &- S_-(\rho, 2\nu + \theta_0 - \theta)] \}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} S_+(\rho, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_n} e^{-\beta_n \eta} \sin \beta_n \rho = \\ &= \frac{l_0 a}{\pi r} \text{ctan} \left[\frac{\sin(\pi\rho/l_0)}{e^{\pi\eta/l_0} - \cos(\pi\rho/l_0)} \right], \\ S_-(\rho, \eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta_n} e^{-\beta_n \eta} \sin \beta_n \rho = \\ &= -\frac{l_0 a}{\pi r} \text{ctan} \left[\frac{\sin(\pi\rho/l_0)}{e^{\pi\eta/l_0} + \cos(\pi\rho/l_0)} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Вследствие асимптотического поведения (23), бесконечные суммы (24), а также их почленные первые производные по r и θ быстро сходятся во всей области, включая и границы. Следовательно, при численных расчетах достаточно оставить несколько первых членов (обычно, до пяти). Кроме того, первые производные функций $S(a/r, \theta)$ и $S(r/b, \theta)$ дают конечный вклад в поле скоростей на границе, что может быть вычислено предельными переходами.

Отметим, что члены R_b, R_t, F_b и F_t в выражении (24) соответствуют локальному решению Гудера [29] и Тейлора (см. [30]) для течения Стокса в четверть плоскости с разрывной тангенциальной скоростью, прикладываемой только вдоль одной границы. Локальное представление функции

тока в угловой точке, а также амплитуда вихрей Моффатта [31] более подробно представлены в [4].

Таким образом, компоненты поля скоростей могут быть вычислены как соответствующие первые производные функции тока (24) и представляются в виде быстро сходящихся рядов во всей области, включая границы.

2.2. Периодические точки и инвариантные многообразия

Предлагаемый алгоритм для отыскания периодических точек уменьшает порядок поиска из двумерного во всей полости в *одномерную* процедуру отыскания корней r^* на центральной линии $\theta = 0$. Этот алгоритм представлен очень подробно в работе [13] для прямоугольной полости.

Рассмотрим точку $(r_{T/4}, 0)$, которая в момент $t = T/4$ расположена на линии симметрии $\theta = 0$. Из-за симметрии протокола (1) по времени очевидно, что в моменты $t = 0$ и $t = T/2$ эта точка занимает положения $(r_1, -\theta_1)$ и (r_1, θ_1) соответственно. Теперь, если в момент $t = 3T/4$ эта точка снова окажется на линии симметрии $\theta = 0$ с координатами $(r_{3T/4}, 0)$, то в моменты $t = T/2$ и $t = T$ ее положения будут (r_1, θ_1) и $(r_1, -\theta_1)$ соответственно. Поэтому точка $(r_1, -\theta_1)$ является периодической точкой периода-1, и сценарий $[T/4 - 3T/4]$ для отыскания периодических точек может быть следующим:

– в момент $t = T/4$ взять любую точку $(r_{T/4}, 0)$ на линии симметрии, проинтегрировать систему уравнений адвекции (5) до $t = 3T/4$ и проверить, расположена ли точка $(r_{3T/4}, \theta_{3T/4})$ на линии симметрии. Таким образом, если r^* – корень уравнения

$$\theta_{(T/4, 3T/4)}(r^*, 0) = 0 \quad (29)$$

(здесь и далее индексы в круглых скобках показывают интервал, в пределах которого система (5) интегрируется, а аргументы представляют начальные условия для этой системы), то точка $(r_1, -\theta_1)$ с $r_1 = r_{(T/4, T/2)}(r^*, 0)$, $\theta_1 = \theta_{(T/4, T/2)}(r^*, 0)$ является периодической периода 1.

Геометрически эта периодическая точка расположена на пересечении двух устойчивых линий тока $\Psi_{bot}(r, \theta) = C_{bot}$ и $\Psi_{top}(r, \theta) = C_{top}$, соответствующих движению нижней и верхней круговых стенок. Только по этим двум линиям периодическая точка может вернуться в первоначальное положение.

Классифицировать тип периодической точки (эллиптическая или гиперболическая) можно аналитически, определяя собственные значения λ_1 и λ_2 якобиана матрицы M линеаризованной систе-

мы (5) в окрестности точки. Если λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными, то периодическая точка имеет эллиптический тип. Если λ_1 и $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ являются действительными, то периодическая точка имеет гиперболический тип. Также может иметь место ситуация $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$, что соответствует случаю вырождения, когда периодическая точка является параболической: при этом любое малое изменение протокола перемешивания (то есть величины Θ) ведет к тому, что периодическая точка из параболической становится эллиптической или гиперболической типа.

Элементы якобиана матрицы M можно вычислить, решая систему (5), записанную в прямоугольных координатах $x = r \sin \theta$, $y = r \cos \theta$ как

$$\frac{dx}{dt} = u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta, \quad \frac{dy}{dt} = u_r \cos \theta - u_\theta \sin \theta \quad (30)$$

для четырех начальных состояний $(\bar{x} + \varepsilon, \bar{y})$, $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{y})$, $(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon)$, $(\bar{x}, \bar{y} - \varepsilon)$ (здесь (\bar{x}, \bar{y}) – прямоугольные координаты периодической точки, а ε – малый параметр, например, $\varepsilon = 0.005a$):

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{x_{(0,T)}(\bar{x} + \varepsilon, \bar{y}) - x_{(0,T)}(\bar{x} - \varepsilon, \bar{y})}{2\varepsilon}, \\ M_{xy} &= \frac{x_{(0,T)}(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon) - x_{(0,T)}(\bar{x}, \bar{y} - \varepsilon)}{2\varepsilon}, \\ M_{yx} &= \frac{y_{(0,T)}(\bar{x} + \varepsilon, \bar{y}) - y_{(0,T)}(\bar{x} - \varepsilon, \bar{y})}{2\varepsilon}, \\ M_{yy} &= \frac{y_{(0,T)}(\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon) - y_{(0,T)}(\bar{x}, \bar{y} - \varepsilon)}{2\varepsilon}. \end{aligned} \quad (31)$$

Условие, что детерминант матрицы M должен быть равен единице, используется для проверки точности вычислений.

Грин [32] ввел величину, названную вычетом периодической точки и определенную как

$$R = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \text{Tr}(M) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (M_{xx} + M_{yy}). \quad (32)$$

Легко показать, что условие $0 < R < 1$ определяет эллиптическую периодическую точку (λ_1 и λ_2 являются комплексно сопряженными), в то время, если $R < 0$ (λ_1 и λ_2 – положительные) или $R < 1$ (λ_1 и λ_2 – отрицательные величины), то эти условия характеризуют гиперболическую периодическую точку.

Для гиперболической периодической точки существуют две инвариантные кривые $W_H^{(s)}$ и $W_H^{(u)}$, названные устойчивым и неустойчивым многообразиями. Эти многообразия могут быть построены, окружая периодическую гиперболическую точку достаточно малым кругом, скажем,

радиуса $0.001a$, и затем используя упомянутый в [1] алгоритм слежения за линией контура согласно прямому и обратному протоколу перемешивания (1). Обратный протокол соответствует изменению в (1) Θ на $-\Theta$ и началу движения на верхней круговой границе.

Для обнаружения периодических точек более высоких периодов могут быть применены следующие аналогичные алгоритмы.

Период-2.

– Сценарий $[T/4 - 5T/4]$: если r^{**} – корень уравнения $\theta_{(T/4, 5T/4)}(r^{**}, 0) = 0$, тогда точка (r_2, θ_2) с $r_2 = r_{(T/4, T/2)}(r^{**}, 0)$, $\theta_2 = -\theta_{(T/4, T/2)}(r^{**}, 0)$ является периодической.

– Сценарий $[3T/4 - 7T/4]$: если r^{**} – корень уравнения $\theta_{(3T/4, 7T/4)}(r^{**}, 0) = 0$, тогда точка (r_2, θ_2) с $r_2 = r_{(3T/4, 3T/2)}(r^{**}, 0)$, $\theta_2 = -\theta_{(3T/4, 3T/2)}(r^{**}, 0)$ является периодической.

Период-3.

– Сценарии $[T/4 - 7T/4]$, $[3T/4 - 9T/4]$, $[5T/4 - 11T/4]$.

Период-4.

– Сценарии $[T/4 - 9T/4]$, $[3T/4 - 11T/4]$, $[5T/4 - 13T/4]$, $[7T/4 - 15T/4]$.

Период-5.

– Сценарии $[T/4 - 11T/4]$, $[3T/4 - 13T/4]$, $[5T/4 - 15T/4]$, $[7T/4 - 17T/4]$, $[9T/4 - 19T/4]$.

Период-6.

– Сценарии $[T/4 - 13T/4]$, $[3T/4 - 15T/4]$, $[5T/4 - 17T/4]$, $[7T/4 - 19T/4]$, $[9T/4 - 21T/4]$, $[11T/4 - 23T/4]$. И т. д.

Каждая периодическая точка периода- n имеет $n - 1$ "спутников", соответствующих ее положениям в моменты $T, 2T, \dots, (n - 1)T$. Поэтому сценарии не всегда дают новые периодические точки, иногда они определяют некоторые спутники уже найденных точек. В любом случае эти алгоритмы обеспечивают эффективную процедуру поиска периодических точек в кольцевой полости клина.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СТРУКТУР

Данный раздел посвящен применению разработанной методологии исследования процессов периодического смешивания вязких жидкостей к анализу смешивания жидкостей в круговой клинообразной полости при $\theta_0 = \pi/4$ и $b/a = 2$. Цель анализа – определение наиболее эффективного протокола смешивания и нахождение положения начального закрашенного пятна, которое будет в процессе перемешивания наиболее однородно распределяться по всей полости. Для сравнения эффективно-

сти различных протоколов смешивания необходимо уметь оценивать затраченную в процессе энергию. Предполагаем, что все протоколы имеют одинаковую угловую скорость $2\Theta/T$. Тогда совокупное перемещение, выполненное стенками полости, может служить мерой количества работы, проделанной при перемещении границ (т. е. мерой потребленной энергии). Для периодического протокола (1) эта энергия равна $\Theta(a + b)$ для одного периода и $\Theta(a + b)N_p$ для N_p периодов или, в безразмерной форме, $W = \Theta(a + b)N_p/(\theta_0 a) = 3HN_p$ (где безразмерный параметр $H = \Theta/\theta_0$).

На рис. 3 показана бифуркационная диаграмма корней r^* уравнения (29) (т. е. положений r^* периодической точки периода-1 на центральной линии полости) в зависимости от значений H , из которой следует, что при $H < 4.86$ существует только один корень уравнения, а значит и только одна периодическая точка периода-1. Она меняет свой тип при $H = 3.05$, переходя из эллиптической (соответствующей сплошной линии) в гиперболическую (штриховая линия). Вторая бифуркационная кривая появляется при $H \geq 4.86$. При этом верхняя кривая показывает изменение типа периодической точки при $H = 5.48$: на этот раз периодическая точка из гиперболической становится эллиптической. Вторая бифуркационная кривая указывает на наличие как эллиптических (сплошные линии), так и гиперболических (штриховые участки кривой) периодических точек периода-1. В центральной части графика в геометрии рассматриваемой полости приведена типичная траектория периодической точки периода-1, описываемая точкой E за период.

В дальнейшем ограничим наше рассмотрение случаем $H = 4$. Координаты всех периодических точек до периода-6 включительно представлены на рис. 4, где сплошной квадратик соответствует гиперболической точке периода-1 (для $H = 4$ существует только одна периодическая точка этого периода). Кружечками на графике изображены координаты периодических точек периода-2, крестиками – периода-4 и точками – периода-6. Периодические точки периодов-3 и -5 не показаны, так как они расположены вблизи границы полости. Показанные периодические точки в основном являются гиперболическими, что свидетельствует о том, что выбранный протокол с $H = 4$ обеспечивает хорошее и быстрое перемешивание. Следует также отметить, что традиционный метод отображений Пуанкаре через 2, 4 и 6 периодов вряд ли может обнаружить наличие всех периодических точек периодов-2, -4 и -6, так как соответствующие этим точкам эллиптические острова занима-

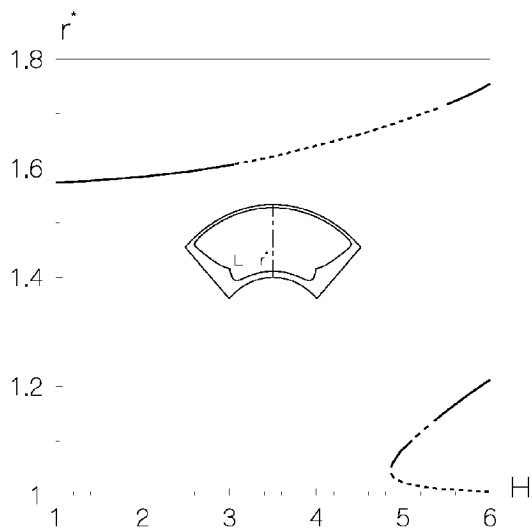


Рис. 3. Бифуркационная диаграмма существования периодических точек

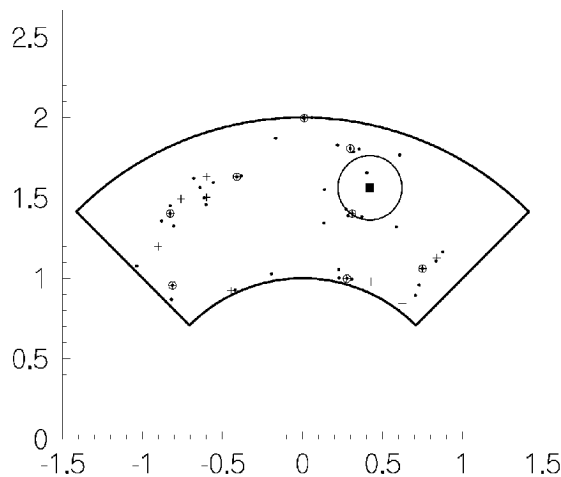


Рис. 4. Расположение периодических точек первого-шестого порядка

ют слишком малые области.

На рис. 1 представлены четыре полости с картинками смесей и начальными положениями круглых пятен, которые были подвергнуты различным протоколам смешивания. Верхняя, нижняя и левая полости представляют результаты перемешивания при одном протоколе, а именно: пе-

риодическом протоколе с $H = 4$ после 12 периодов ($N_p = 12$). Правая полость, в которой начальное пятно практически не распределилось по всей области, демонстрирует результат смешивания для $H = 2$. Несмотря на то, что процесс смешивания проводился для этой полости в два раза дольше, т. е. результаты соответствуют 24 периодам, $N_p = 24$, и таким образом, общая работа $W = \Theta(a + b)N_p / (\theta_0 a) = 3HN_p$ для всех полостей одинакова, результаты смешивания принципиально различны. Наилучшее смешивание соответствует случаю, представленному в верхней полости, когда начальное пятно разделено на 4 малых круглых пятна, помещенных в разных районах полости. Нижняя картина соответствует случаю смешивания одного пятна, помещенного начально вокруг единственной для протокола с $H = 4$ периодической точки периода-1 (как это показано окружностью на рис. 4). Поскольку выбранная периодическая точка является гиперболической, через нее проходит неустойчивое многообразие, а точки в ее окрестности характеризуются хаотическими траекториями (т. е. разбегаются экспоненциально друг от друга), начальное пятно довольно однородно распределилось по всей полости. Левая полость дает результат смешивания при таком же самом протоколе (как и в нижней полости), но при другом (хотя и почти рядом) начальном положении пятна. Из рис. 1 видно, что в картине смеси есть пустоты, т.е. нет сравнительно одинакового проникновения закрашенной жидкости во все районы полости. Правая полость имеет наихудший результат смешивания, поскольку начальное положение пятна выбрано вокруг эллиптической точки периода-1 (единственной для протокола с $H = 2$), поэтому принципиально достигнуть хорошего смешивания для такого начального положения невозможно. Как следует из анализа когерентных структур, предложенного в работе [20], области вокруг эллиптических точек ведут себя как эластичноподобные, они только слегка деформируются, сохраняя все вещество в области вокруг эллиптической точки.

Графики картин смесей были построены на рис. 1 с использованием алгоритма слежения за деформированием линии контура начального круглого пятна (или пятен), предложенного в части 1 настоящего исследования [1]. Преимущества такого алгоритма продемонстрированы на рис. 5. Начальный круглый контур радиуса $R = 0.2a$ с центром в гиперболической точке периода-1 представлен с использованием 25 точек на рис. 5, а. На рис. 5, б линия контура после двенадцати периодов смешивания построена с использованием положе-

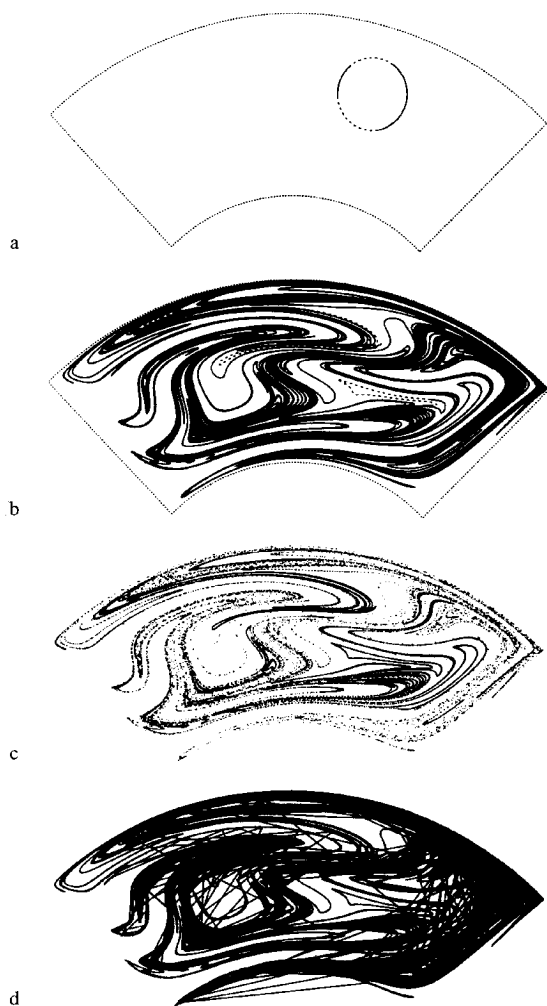


Рис. 5. Контурные линии:
полученные с применением алгоритма –
– *a* – начальное положение пятна;
b – после 12 периодов;
c, d – полученные традиционным методом

ний $5 \cdot 10^4$ точек. При этом применены следующие критерии: расстояние между любыми двумя соседними точками было не больше, чем $l_{dis} = 0.03a$ и не меньше, чем $l_{cur} = 0.015a$ (см. [1]). Важно подчеркнуть, что из-за экспоненциального и неоднородного вдоль линии контура растяжения приблизительно 40% длины начальной линии контура (пунктирные участки на рис. 5, *a*) занимает лишь только 0.2% заключительной длины (эти участки показаны также пунктиром на рис. 5, *b*). В то же время, часть начальной линии контура, показанная сплошной линией, растягивается приблизительно в 10^3 раз. Вследствие экспоненциального разбегания соседних точек в окрестности гиперболической точки, подход, основанный на представ-

лении контура капли с помощью первоначально эквидистантно распределенных по контуру точек, может дать лишь качественную картину смешивания, не сохраняя топологические свойства. Так, на рис. 5, *c* показано положение $5 \cdot 10^4$ точек первоначально равномерно распределенных по окружности радиуса $R = 0.2a$ с центром в гиперболической точке периода-1 (см. рисунок 5, *a*), после двенадцати периодов. Расположение этих точек качественно напоминает картину смеси на рис. 5, *b*, каждая точка после 12 периодов занимает правильное положение, находясь на контуре, но если соединить эти точки, то картина смеси будет такой, как показано на рис. 5, *d*. Длина линии контура (если можно применить в данном случае слово “длина”) только на 4% меньше, чем длина контура, показанного на рис. 5, *b*. В то же самое время площадь, ограниченная таким контуром, как на рис. 5, *d*, будет в шесть раз больше реальной площади начального пятна. Заметим, что для того, чтобы получить величину реальной площади (после 12 периодов смешивания), но применять в начальный момент эквидистантно распределенные по контуру точки, необходимо использовать $5 \cdot 10^7$ точек.

Точное знание расположения контурной линии пятна дает возможность строить эйлерово (т. е. в пространстве) описание картины смеси. На рис. 6, *a* дано такое представление результата смешивания начального пятна, показанного на рис. 5, *a* после 12 периодов при $H = 4$.

Имеются два главных компонента в структуре смеси: один компонент, сформированный тонкими нитями с уменьшающейся в процессе смешивания толщиной, и другой, соответствующий малым “эластичным” областям, которые не размешиваются вовсе (на рис. 6, *b* показана такая черная треугольная область в увеличенном виде). Что создает эти элементы структуры? Прежде всего, неустойчивое многообразие, которое проходит через центр начального пятна (черный квадратик в центре на рис. 6, *b*). На рис. 7, *a* показано расположение этого многообразия в исследуемой полости. Из сравнения рисунков смеси и многообразия видно, что оно играет роль “автомагистрали”, по которой происходит смешивание. График многообразия не содержит только “эластичную” область. Ее создают эллиптические точки периодов-2, -4, -6, расположение которых показано белыми квадратиками на рис. 6, *b*.

На рис. 7, *b* выделена та же область полости, что и на рис. 6, *b*, в которой показано как деформируются маленькие (начально круглые) подобласти, окружающие периодические точки, имеющие координаты, соответствующие белым квадратикам

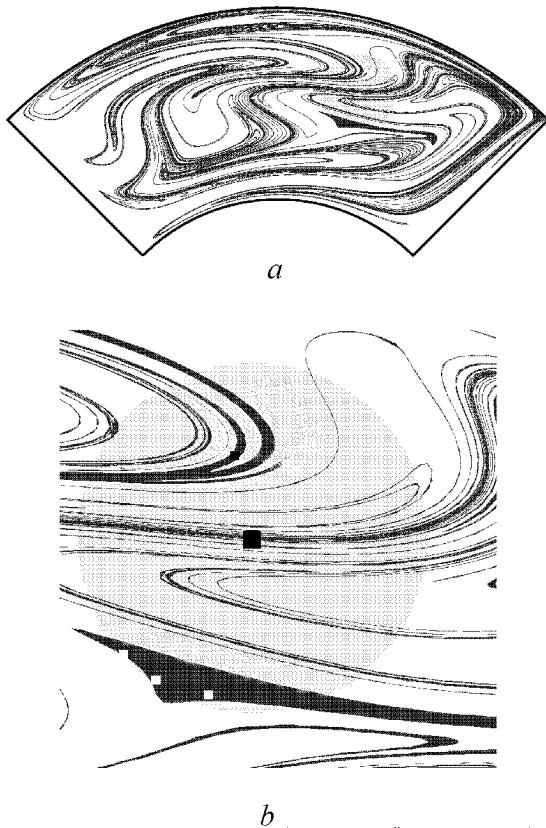


Рис. 6. Картина смеси: *a*) – во всей полости; *b*) – в области начального расположения круглого светлосерого пятна

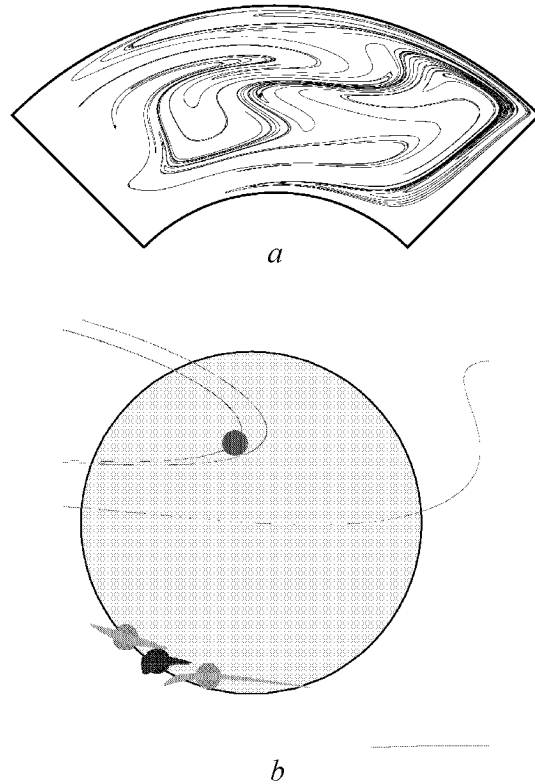


Рис. 7. Элементы когерентных структур: *a*) – неустойчивое многообразие во всей полости; *b*) – “эластичные” зоны в области начального расположения круглого пятна

на рис. 6, *b* (сравните с рис. 4). Верхний кружечек окружает гиперболическую точку периода-4, поэтому он растягивается до тонких нитей. В то время как три нижних кружечка только слегка вытягиваются, не теряя материала крашенной жидкости. Именно их “эластичный” материал и составляет “эластичную” треугольную область, показанную черным цветом на рис. 6.

Теперь применим разработанные нами [14] и изложенные в части 1 настоящего исследования [1] критерии качества смесей. Динамика во времени трех критериев, основанных на “грубой” плотности D_n , показана на рис. 8 для трех различных размеров ячеек (кривые 1 соответствуют вычислениям с ячейками со стороной квадрата $\delta = 0.1a$; кривые 2 – с $\delta = 0.05a$; кривые 3 – с $\delta = 0.025a$). Протокол смешивания и начальное положение пятна – такие же, как на рис. 5 и 6, *a*. Процесс смешивания характеризуется уменьшением квадратичной плотности $\langle D^2 \rangle / \langle D \rangle^2$ (рис. 8, *a*), интенсивности сегрегации I (рис. 8, *b*) и увеличением энтропии e/e_0 (рис. 8, *c*) с увеличением числа полупериодов $2t/T$. Из рис. 8, *a, b* следует, что интенсивность и квадратичная плотность характе-

ризуются подобной динамикой во времени, уменьшаясь в разных масштабах. Причем предпочтительно использовать интенсивность, потому что ее значения всегда находятся в одном и том же диапазоне (0,1). Применяя этот критерий, можно сравнивать процессы с различной величиной начального пятна, т. е. с различным отношением площадей закрашенного пятна и полости S_b/S , и сравнивать различные смеси с тем же самым отношением S_b/S . Например, легко ответить на вопрос, когда интенсивность сегрегации будет равна заданной величине для различных размеров ячеек, только используя на рис. 8, *b* дополнительную горизонтальную линию $I = \text{const}$. Если мы считаем, что смесь достаточно однородна (для данного выбранного размера ячейки), когда I – меньше, чем некоторая величина I_{min} , то из рис. 8, *b* можно определить, как долго мы должны продолжать смешивание, чтобы получить такую же однородную смесь и в других масштабах.

На рис. 9 представлены результаты смешивания с использованием одинакового протокола с $H = 4$ в четырех равных клиновидных полостях

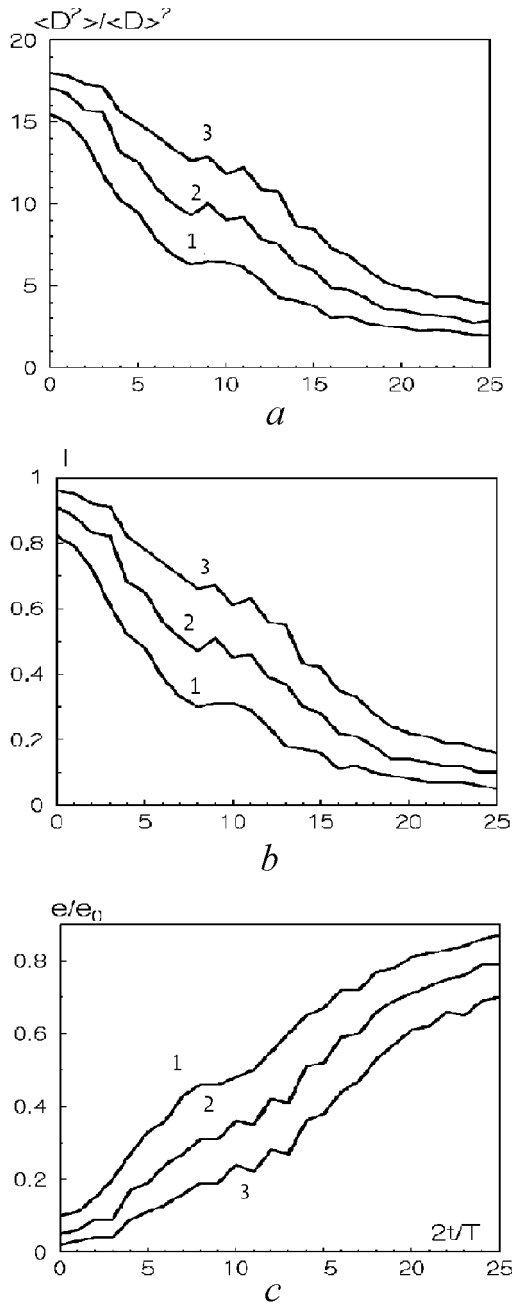


Рис. 8. Динамика критериев качества в зависимости от числа полупериодов

при различных положениях начальных пятен (они показаны темными кругами).

В левой и правой полостях начальное пятно сосредоточено вокруг гиперболической точки периода-2 и покрывает три гиперболических точки периода-6 и одну периода-4. Показанные в этих полостях изогнутые черные рисунки смесей получены после 18.5 (правая полость) и 19 периодов (левая). Контурная линия начального круга при



Рис. 9. Смеси, имеющие различное растяжение начального контура

этом растягивается в 1760 (в правой полости) и 2010 (в левой) раз. Визуально, однако, видны пустоты, не заполненные краской в средней части полостей. Действительно, оценивая распределение краски по всей полости и подсчитывая, например, интенсивность сегрегации I [1] в масштабе с величиной стороны ячейки $\delta = 0.025a$, получаем, что качеству смеси в правой полости соответствует $I = 0.21$, а в левой – $I = 0.20$. В верхней полости начальное положение пятна было выбрано вокруг другой гиперболической точки периода-2. Растяжение контурной линии в этом случае почти такое же большое, как и в предыдущих, а именно, линия растягивается в 1850 раз. Но качество смеси гораздо лучше, так как нет больших пустот. Это отражает величина интенсивности в той же шкале с $\delta = 0.025a$, которая имеет величину $I = 0.17$. Наконец, в нижней полости начальное положение пятна было выбрано вокруг гиперболической точки периода-1. Растяжение контурной линии начального пятна самое низкое, почти в два раза меньше, чем в верхней полости (грубо можно его оценить как в два раза меньше, чем во всех остальных полостях) и равно 986. При этом из рис. 9 картины смеси в нижней полости видно, что смесь распределилась во все подобласти полости и имеет интенсивность качества наименьшую (на-

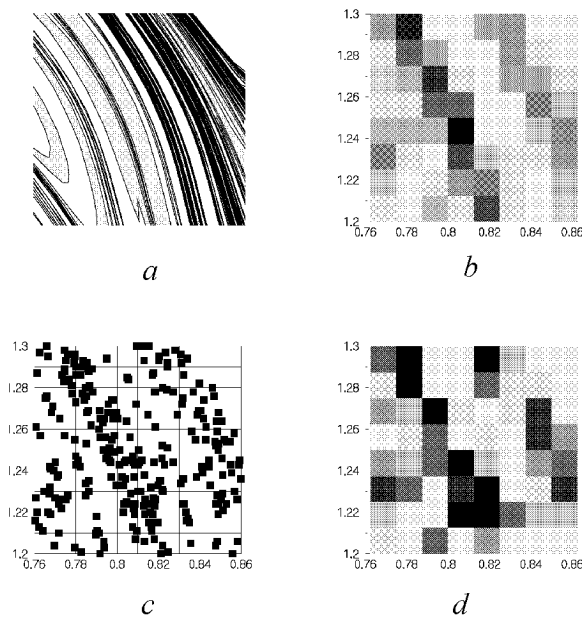


Рис. 10. Картины смесей (*a*, *c*) и распределение интенсивности сегрегации (*b*, *d*), вычисленные различными методами

лучшую) $I = 0.15$. Таким образом, наибольшее растяжение длины начального контура не гарантирует наилучшего по качеству смешивания, так как расчеты критериев качества (например, интенсивности сегрегации) показывают, что в случае наибольшего растяжения (левая полость) качество смешивания соответствует такому же по качеству смешиванию для наилучшего начального положения пятна (нижняя полость), когда растяжение было почти в три раза меньше, а именно, оно соответствует смеси в нижней полости после 18 полупериодов процесса смешивания, когда растяжение равнялось 560. И, наоборот, смешивание с наихудшим растяжением может приводить к наилучшей по качеству смеси, что видно из картин смесей на рис. 9.

В первой части настоящей работы [1] указано на то, насколько важно при вычислениях критериев качества пользоваться алгоритмом слежения за изменением линии контура, разделяющего подобласти с жидкостями, которые смешиваются. Остановимся на этом подробнее. Рассмотрим случай смешивания с наибольшим растяжением, который показан на рис. 9 в левой полости. Интенсивность сегрегации I рассчитана для этого случая и другим методом: с использованием набора

ра N однородно распределенных внутри начальной области пятна точек. При таком традиционном методе не существует критерия точности вычислений, основанных на сохранении лишь числа точек N , то есть на сохранении меры Лебега. Вычисления с $N = 10^4$, равномерно распределенными внутри пятна, дали ошибку в вычислениях I до 35% величины интенсивности сегрегации, если сравнивать с результатами, полученными на основе алгоритма слежения за деформированием контура, который позволяет проверять точность вычислений. Более того, для смешивания с экспоненциальным большим растяжением контура вычисления с любым числом точек N рано или поздно теряют точность. Подход же, использующий алгоритм слежения за линией контура, не имеет такого недостатка, так как изначально основан на применении критерия точности вычислений, а именно на проверке точности выполнения закона сохранения площади начального подкрашенного пятна. Сравнение грубоплотностных представлений интенсивности сегрегации, определенной с использованием алгоритма слежения за линией контура, и вычисленной с равномерно распределенными $N = 10^4$ точками показано на рис. 10, *b*, *d* соответственно. Для усиления эффекта только часть рисунка смеси (левая полость на рис. 9) показана на рис. 10, *a*. Жидкость начального пятна подкрашена светло-серой краской, а контурная линия раздела жидкостей нарисована черной линией. Из рис. 10, *a* видно, что в той части полости, где смесь имеет множество тонких линий (расположенных вдоль “автомагистралей” неустойчивого многообразия и представляющих собой первый элемент когерентной структуры смеси), картина выглядит черной, хотя серого материала пятна там мало. Поэтому там мало темно-черных квадратов в грубоплотностном представлении интенсивности сегрегации на рис. 10, *b*. Эта же часть картины смеси, представленная с использованием равномерно распределенных $N = 10^4$ точек, дана на рис. 10, *c*, где присутствует большое количество точек вследствие наличия огромного количества нитей на “автомагистралах” неустойчивого многообразия. Поэтому намного больше темных квадратиков на рис. 10, *d* и намного выше величина I . Сравнение рис. 10 *b* и *d* показывает очевидное различие в вычислениях, а именно: величина I , вычисленная по традиционному методу с равномерно распределенными точками, на 35% больше, чем вычисленная с использованием метода слежения за деформированием контурной линии и проверки точности сохранения площади пятна.

Другой важной проблемой исследования хаотического смешивания является проблема обратимости во времени всех мер. Имеются два вопроса в этой проблеме. Один – обратимость индивидуальных точек, представляющих линию контура после некоторого времени T_R к их начальным положениям через время $2T_R$. Второй вопрос связан с сохранением площади пятна и поэтому с обратимостью всех мер. Вычисления с 30000 точек эквидистантно распределенных по начальному контуру, представленному на рис. 5, а, показали точную обратимость их всех после десяти периодов движений вперед и столько же движений обратно. Несмотря на точные вычисления индивидуальных положений точек уже после двух периодов площадь пятна не была сохранена, и относительная ошибка после девяти периодов была, например, 70% (т. е. 70% первоначальной площади пятна была “потеряна”). Вычисления, основанные на нашем алгоритме с *неравномерно* распределенными точками, показали сохранение площади для двенадцати периодов прямого движения и двенадцати периодов обратного (погрешность составляла меньше 1% начальной площади пятна). В этом случае вычисления всех грубоплотностных мер [1], основанные на сохранении площади пятна, являются надежным. Однако и для такого рода вычислений не все точки возвращаются на свои начальные позиции. После обратного процесса некоторые из точек расположены вдоль линий неустойчивого многообразия для обратного движения (которое совпадает с устойчивым многообразием для прямого движения). При этом вклад площади этих линий в площадь пятна равняется нулю. Таким образом, можно заключить, что вычисление мер показывает полную обратимость, несмотря на необратимость некоторых индивидуальных точек.

Наконец, рассмотрим поведение статистических мер второго порядка [1], а именно, динамику масштаба сегрегации, поскольку он показывает средний размер несмешиваемых “эластичных” областей.

На рис. 11, а показана динамика масштабов сегрегации в двух направлениях x и y для того же самого процесса смешивания, который использовался для вычислений мер первого порядка (изображенных на рис. 8) и для тех же самых трех размеров ячеек. Первоначально масштабы в x (сплошные линии) и y (штриховые линии) направлениях являются почти равными и дают приблизительно безразмерный радиус начального пятна 0.2 ($R = 0.2a$). При расчетах с $\delta = 0.1a$ (кривая 1 на рис. 11, а) ошибка в величине R составляет приблизительно 9%, в подсчете с $\delta = 0.05a$ (кривая

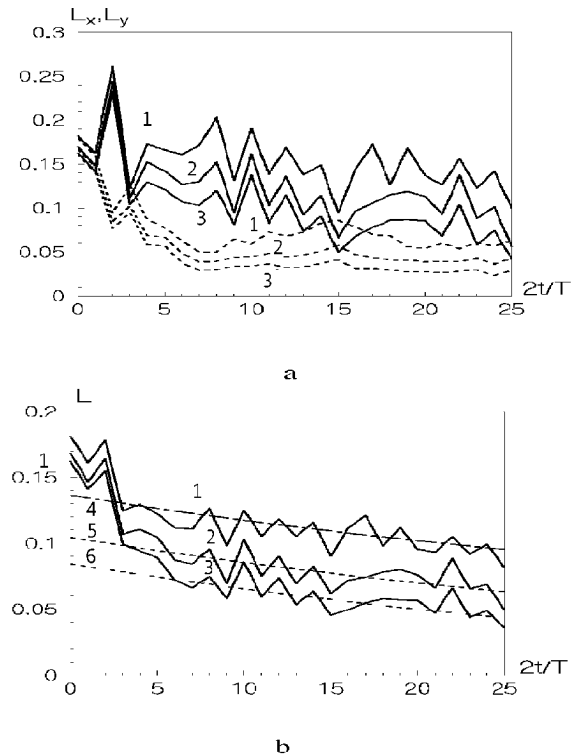


Рис. 11. Динамика масштабов сегрегации (а) и усредненного масштаба (б)

2), а также при подсчете с $\delta = 0.025a$ (кривая 3) она несколько больше. С течением времени, из-за анизотропии смесей (см. рис. 1, 6, а), безразмерные масштабы сегрегации в x направлении $L_x = L(x)/a$ и в y направлении $L_y = L(y)/a$ будут отличаться по величине. Однако оба они имеют тенденцию уменьшаться, но не однородно во времени. На рис. 11, б дана зависимость усредненного масштаба $L = (L_x + L_y)/2$ во времени для трех размеров ячеек. После двух периодов смешивания графики усредненного масштаба могут быть аппроксимированы показательными функциями вида $c_i + c_0 e^{-ct/T}$. Эти функции показаны штриховыми линиями на рис. 11, б как линии 4, 5 и 6 соответственно с параметрами $c_0 = 0.03$, $c = 0.04$, $c_4 = 0.03$, $c_5 = 0.0$ и $c_6 = -0.02$ (для линий с $i = 4, 5, 6$). При использовании этих аппроксимаций мы можем грубо оценивать, после скольких периодов усредненный масштаб сегрегации L будет меньше, чем некоторая заданная величина. Например, при вычислениях с $\delta = 0.05a$ (кривая 2 и линия 5) L становится меньше, чем $\delta/2$ (несмешиваемая “эластичная” область, меньше площади ячейки), приблизительно после 35 периодов.

Таким образом, существование и изменение несмешиваемых “эластичных” областей в картине смеси может быть определено по поведению мас-

штабов сегрегации. Для одной зоны, подобно начальной ситуации с одной круглой каплей, масштабы непосредственно дают размер капли. Для смесей высокого качества величина масштабов, отличная от нуля, указывает на существование несмешанных областей, которые могут уменьшаться очень медленно (даже стабилизироваться, когда области не уменьшаются вообще), несмотря на продолжение смешивания.

Динамика во времени статистических мер первого порядка (квадратичной плотности, интенсивности сегрегации и энтропии) отличаются от динамики масштабов сегрегации. Первые отражают распределение тонких нитей по всей полости, в то время как последние показывают поведение несмешанных областей когерентной структуры. Они также изменяются противоположным образом при изменении размера ячейки: чем меньше размер ячейки, тем хуже качество смешивания, согласно статистических мер первого порядка, и лучше, согласно меры масштаба сегрегации, которая уменьшается с уменьшением размеров. Поэтому необходимо использовать меры обоих порядков, чтобы судить, как хорошо или плохо жидкости смешаны. Чтобы оптимизировать смешивание для данного периодического протокола необходимо выбрать надлежащее начальное местоположение пятна в полости. Такой выбор должен быть выполнен на основании знания положений и типов периодических точек. Расположение неустойчивых многообразий гиперболических периодических точек в полости (первый главный элемент когерентной структуры) и размер “эластичных” островов, соответствующих эллиптическим периодическим точкам (второй элемент когерентных структур), определяют качество смесей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, использование аналитического решения для поля скоростей, алгоритма слежения за изменениями контура раздела смешиваемых жидкостей, а также эффективных методов поиска расположения периодических точек (и их типа) позволили:

1) определить главные элементы когерентных структур картин смесей. Первый элемент – тонкие вытянутые и изогнутые нити создаются движением по “автомагистралям” неустойчивого многообразия. Второй элемент образуют плохо смешиваемые “эластичноподобные” области вокруг эллиптических периодических точек;

2) оценивать качество смешивания на основе ис-

пользования двух независимых критериев: статистических мер первого и второго порядка. При этом первый критерий (будь то квадратичная плотность, интенсивность сегрегации или энтропия) показывает насколько равномерно по всей полости распределена смесь, а второй (масштаб сегрегации) – насколько велики несмешиваемые под-области;

3) показать, что все меры качества демонстрируют немонотонное поведение во времени, приближаясь к предельным значениям для однородно смешанного состояния;

4) доказать, что смешивание с наибольшим растяжением не всегда соответствует наилучшей по качеству смеси.

На основании вышеизложенного можно заключить, что нами разработана новая методология исследования и оптимизации процессов ламинарного смешивания. На примере периодического смешивания вязких жидкостей в кольцевой клиновидной полости определены когерентные структуры и объяснено их появление.

1. Краснопольская Т. С., Мелешко В. В. Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 1. Методологические аспекты исследования. // Прикл. Гидромех.– 2004.– 3.– С. ...–...
2. Tatterson G. B., Brodkey R. S., Calabrese R. V. Move mixing technology into the 21st century // Chem. Eng. Prog.– 1991.– June.– P. 45–48.
3. Ottino J. M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 364 p.
4. Krasnopolskaya T. S., Meleshko V. V., Peters G. W. M., Meijer H. E. H. Steady Stokes flow in an annular cavity // Quart. J. Mech. Appl. Math.– 1996.– 49.– P. 593–619.
5. Blake J. R., Otto S. R. Ciliary propulsion, chaotic filtration and a ‘blinking’ stokeslet // J. Engng Math.– 1996.– 30.– P. 151–168.
6. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // Proc. R. Soc. London.– 1996.– A452.– P. 1999–2022.
7. Meleshko V. V., Gomilko A. M. Two-dimensional Stokes flow in a semicircle // Прикл. гидромеханика.– 1999.– 1 No 1.– P. 35–37.
8. Meleshko V. V., Malyuga V. S., Gomilko A. M. Steady Stokes flow in a finite cylinder // Proc. R. Soc. London.– 2000.– A456.– P. 1741–1758.
9. Anderson P., Galaktionov O. S., Peters G. W. M., van de Vosse F. N., Meijer H. E. H. Analysis of mixing in 3-D time periodic cavity flows // J. Fluid Mech.– 1999.– 386.– P. 149–166.
10. Meleshko V. V., Galaktionov O. S., Peters G. W. M., Meijer H. E. H. Three-dimensional mixing in Stokes flow: the partitioned pipe mixer problem revisited // Euro. J. Mech., B - Fluids.– 1996.– 18.– P. 783–792.
11. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 2.– М.: Наука, 1972.– 1000 с.

12. *Исаева Т. Л.* Периодические точки в двумерном потоке вязкой жидкости в прямоугольной полости // Докл. АН Украины.– 1994.– N 11.– С. 71–76.
13. *Meleshko V. V., Peters G. W. M.* Periodic points for two-dimensional Stokes flows in a rectangular cavity // Phys. Letters.– 1996.– A216.– P. 87–96.
14. *Krasnopolskaya T. S., Meleshko V. V., Peters G. W. M., Meijer H. E. H.* Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity // European Journal of Mechanics, B - Fluids.– 1999.– 18.– P. 793–822.
15. *Дунаева Т. А., Гуржий А. А., Мелешко В. В.* Хаотическая адвекция в течениях Стокса в полукруге // Прикл. Гидромех.– 2001.– N 2.– С. 45–57.
16. *Franjione J. G., Leong C. W., Ottino J. M.* Symmetries within chaos: a route to effective mixing // Phys. Fluids.– 1989.– A1.– P. 1772–1783.
17. *Franjione J. G., Ottino J. M.* Symmetry concepts for geometric analysis of mixing flows // Phil. Trans. R. Soc. London.– 19892.– A338.– P. 301–323.
18. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.– М.: Мир, 1984.– 471 с.
19. *Жуковский Н. Е.* Кинематика жидкого тела // Математ. Сборник.– 1876.– 8.– С. 1–79, 163–238.
20. *Meleshko V. V., Krasnopolskaya T. S., Peters G. W. M., Meijer H. E. H.* Coherent structures and scales of Lagrangian turbulence // Advances in Turbulence – VI.– Dordrecht, Kluwer, 1996.– P. 601–604.
21. *Welander P.* Studies of the general development of motion in a two-dimensional, ideal fluid // Tellus.– 1955.– 7.– P. 141–156.
22. *Гиббс Дж.* Основные принципы статистической механики, излагаемые со специальным применением к рациональному обоснованию термодинамики.– М.-Л.: ГИТТЛ, 1946.– 173 с.
23. *Danckwerts P. V.* The definition and measurement of some characteristics of mixtures // Appl. Sci. Res.– 1952.– A3.– P. 279–296.
24. *Tucker C. L.* Principles of mixing measurements // Mixing in Polymer Processing.– Boston, Dekker, 1991.– P. 101–127.
25. *Aref H.* Stirring by chaotic advection // J. Fluid Mech.– 1984.– 143.– P. 1–24.
26. *Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P.* Numerical Recipes in FORTRAN: the Art of Scientific Computing.– Cambridge: Cambridge University Press, 1992.– 963 p.
27. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы.– Киев: Наукова думка, 1985.– 280 с.
28. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа.– М.-Л.: Физматгиз, 1962.– 695 с.
29. *Goodier J. N.* An analogy between the slow motion of a viscous fluid in two dimensions, and systems of plane stress // Phil. Mag. (ser. 7).– 1934.– 17.– P. 554–576.
30. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М.: Мир, 1973.– 758 с.
31. *Moffatt H. K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech.– 1964.– 18.– P. 1–18.
32. *Greene J. M.* Two-dimensional measure-preserving mappings // J. Math. Phys.– 1968.– 9.– P. 760–768.