УДК 539.3

Решение пространственной задачи теории упругости в перемещениях для изотропного упругого слоя

Н. М. Бородачев, В. В. Астанин

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

Предлагается новый метод решения пространственной задачи теории упругости для слоя в перемещениях. В рамках данного подхода удовлетворять граничные условия на поверхностях слоя гораздо проще, чем при использовании известных способов. Рассмотрен пример, который доведен до численных результатов.

Ключевые слова: теория упругости в перемещениях, упругий слой, вектор перемещений, гармонический вектор, гармонический скаляр, преобразование Фурье.

Введение. В настоящее время для решения пространственных задач теории упругости в перемещениях широко используется представление Папковича–Нейбера. Однако при этом возникают серьезные трудности в случае удовлетворения граничным условиям, если они являются сложными. На это обстоятельство указывал Папкович в работе [1].

Предлагаемое решение позволяет сравнительно просто удовлетворять граничные условия для упругого полупространства и упругого слоя конечной толщины. Обзор работ, посвященных исследованию упругого слоя, содержится в [2–6].

Рассматривается изотропный упругий слой $[0 \le x_3 \le h]$. Воспользуемся прямоугольной системой координат x_1, x_2, x_3, ось x_3 которой перпендикулярна к граничным поверхностям тела. Для задачи в перемещениях имеем такие граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \quad x_3 = 0 \quad \sigma_{3j} = f_j^0(x_1, x_2), \qquad j = 1, 2, 3; \\
&\text{при} \quad x_3 = h \quad \begin{cases} \sigma_{3j} = f_j^h(x_1, x_2), \\ u_3 = g_3^h(x_1, x_2), \end{cases} \qquad j = 1, 2,
\end{aligned} \tag{1}
$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; u_3 – проекция вектора перемещений на ось x_3. Полагаем, функции f_j^0 и f_j^h таковыми, что удовлетворяются все шесть уравнений статики.

Для обеспечения затухания компонент вектора перемещений и тензора напряжений на бесконечности необходимо, чтобы функции f_j^0 имели ненулевое значение в конечных областях Ω_j^0 плоскости $x_3 = 0$, а функции f_j^h и g_3^h – в конечных областях Ω_j^h плоскости $x_3 = h$.

Дифференциальное уравнение пространственной задачи теории упругости в перемещениях при отсутствии объемных сил имеет вид [7]

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; ν – коэффициент Пуассона; Δ – оператор Лапласа в R^3; ∇ – набла-оператор в R^3.

Требуется построить решение уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям (1).

Решение для упругого слоя. В [8] показано, что уравнение (2) будет удовлетворено, если для вектора перемещений $\mathbf{u}$ принять следующее представление:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \nabla \varphi, \tag{3}$$

где

$$\Delta \mathbf{B} = 0; \qquad \Delta \varphi = 0; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu} \nabla \cdot \mathbf{B}. \tag{4}$$

Таким образом, формула (3) определяет вектор перемещений $\mathbf{u}$ через гармонический вектор $\mathbf{B}$ и гармонический скаляр φ, связанные между собой третьим соотношением (4).

В компонентах декартовой системы координат выражение (3) имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= B_1 - \alpha x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \\ u_2 &= B_2 - \alpha x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \\ u_3 &= B_3 - \alpha x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}, \qquad \alpha = \frac{1}{2(1-2\nu)}. \end{aligned} \tag{5}$$

С помощью формулы (5) и известных соотношений между компонентами тензора напряжений и вектора перемещений находим

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu \left(\dfrac{\nu}{1-2\nu} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \dfrac{\partial B_1}{\partial x_1} - \alpha x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \right); \\ \sigma_{22} = 2\mu \left(\dfrac{\nu}{1-2\nu} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \dfrac{\partial B_2}{\partial x_2} - \alpha x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right); \\ \sigma_{33} = 2\mu \left(-\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \dfrac{\partial B_3}{\partial x_3} - \alpha x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \right); \\ \sigma_{12} = \mu \left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial B_2}{\partial x_1} - 2\alpha x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \right); \end{cases} \tag{6a}$$

$$\begin{cases} \sigma_{23} = \mu\left(\dfrac{\partial B_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial B_3}{\partial x_2} - \alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} - 2\alpha x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}\right); \\ \sigma_{31} = \mu\left(\dfrac{\partial B_3}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_1}{\partial x_3} - \alpha \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} - 2\alpha x_3 \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_3}\right), \end{cases} \tag{6б}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; μ – модуль сдвига.

Ниже будет использоваться двухмерное интегральное преобразование Фурье. Двухмерная трансформанта Фурье некоторой функции $f(x_1, x_2, x_3)$ имеет вид [9]

$$\bar{f}(\xi_1, \xi_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3) e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

Применим к выражениям (5) и (6) двухмерное преобразование Фурье и с учетом затухания перемещений и напряжений на бесконечности получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \bar{B}_1 + i\xi_1 \alpha x_3 \bar{\varphi}; \\ \bar{u}_2 &= \bar{B}_2 + i\xi_2 \alpha x_3 \bar{\varphi}; \\ \bar{u}_3 &= \bar{B}_3 - \alpha x_3 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_3}; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{11} = 2\mu\left(\dfrac{\nu}{1-2\nu} \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_3} - i\xi_1 \bar{B}_1 + \xi_1^2 \alpha x_3 \bar{\varphi}\right); \\ \bar{\sigma}_{22} = 2\mu\left(\dfrac{\nu}{1-2\nu} \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_3} - i\xi_2 \bar{B}_2 + \xi_2^2 \alpha x_3 \bar{\varphi}\right); \\ \bar{\sigma}_{33} = 2\mu\left(-\dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_3} + \dfrac{\partial \bar{B}_3}{\partial x_3} - \alpha x_3 \dfrac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_3^2}\right); \\ \bar{\sigma}_{12} = \mu(-i\xi_2 \bar{B}_1 - i\xi_1 \bar{B}_2 + 2\xi_1 \xi_2 \alpha x_3 \bar{\varphi}); \\ \bar{\sigma}_{23} = \mu\left(\dfrac{\partial \bar{B}_2}{\partial x_3} - i\xi_2 \bar{B}_3 + i\xi_2 \alpha \bar{\varphi} + 2i\xi_2 \alpha x_3 \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_3}\right); \\ \bar{\sigma}_{31} = \mu\left(-i\xi_1 \bar{B}_3 + \dfrac{\partial \bar{B}_1}{\partial x_3} + i\xi_1 \alpha \bar{\varphi} + 2i\xi_1 \alpha x_3 \dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_3}\right). \end{cases} \tag{8}$$

Каждая компонента B_j гармонического вектора **B** удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta B_j = 0, \qquad j = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Гармонический скаляр φ также удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \tag{10}$$

Применяя к уравнениям (9) и (10) двухмерное преобразование Фурье и решая полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, находим

$$\overline{B}_j(\xi_1, \xi_2, x_3) = A_j(\xi_1, \xi_2)\mathrm{sh}(kx_3) + C_j(\xi_1, \xi_2)\mathrm{ch}(kx_3); \tag{11}$$

$$\overline{\varphi}(\xi_1, \xi_2, x_3) = A_0(\xi_1, \xi_2)\mathrm{sh}(kx_3) + C_0(\xi_1, \xi_2)\mathrm{ch}(kx_3), \tag{12}$$

где $k^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, $j = 1, 2, 3$.

Удовлетворение граничным условиям. Преобразованные по Фурье граничные условия (1) принимают следующий вид:

$$\begin{array}{lll} \text{при} \quad x_3 = 0 & \overline{\sigma}_{3j} = \bar{f}_j^{\,0}(\xi_1, \xi_2), & j = 1, 2, 3; \\ \text{при} \quad x_3 = h & \begin{cases} \overline{\sigma}_{3j} = \bar{f}_j^{\,h}(\xi_1, \xi_2), \\ \overline{u}_3 = \overline{g}_3^{\,h}(\xi_1, \xi_2), \end{cases} & j = 1, 2. \end{array} \tag{13}$$

С помощью формул (7), (8), (11), (12) при удовлетворении условиям (13) получим систему уравнений:

$$\begin{cases} kA_1 - i\xi_1 C_3 + i\xi_1 \alpha C_0 = \dfrac{\bar{f}_1^{\,0}}{\mu}; \\ kA_2 - i\xi_2 C_3 + i\xi_2 \alpha C_0 = \dfrac{\bar{f}_2^{\,0}}{\mu}; \\ 2kA_3 - kA_0 = \dfrac{\bar{f}_3^{\,0}}{\mu}; \\ k[A_1\mathrm{ch}(kh) + C_1\mathrm{sh}(kh)] - i\xi_1[A_3\mathrm{sh}(kh) + C_3\mathrm{ch}(kh)] + \\ + i\xi_1\alpha\{A_0[\mathrm{sh}(kh) + 2kh\,\mathrm{ch}(kh)] + C_0[\mathrm{ch}(kh) + 2kh\,\mathrm{sh}(kh)]\} = \dfrac{\bar{f}_1^{\,h}}{\mu}; \\ k[(A_2\mathrm{ch}(kh) + C_2\mathrm{sh}(kh))] - i\xi_2[A_3\mathrm{sh}(kh) + C_3\mathrm{ch}(kh)] + \\ + i\xi_2\alpha\{A_0[\mathrm{sh}(kh) + 2kh\,\mathrm{ch}(kh)] + C_0[\mathrm{ch}(kh) + 2kh\,\mathrm{sh}(kh)]\} = \dfrac{\bar{f}_2^{\,h}}{\mu}; \\ A_3\mathrm{sh}(kh) + C_3\mathrm{ch}(kh) - \alpha kh[A_0\mathrm{ch}(kh) + C_0\mathrm{sh}(kh)] = \overline{g}_3^{\,h}; \\ i\xi_1 A_1 + i\xi_2 A_2 - kC_3 + \dfrac{kC_0}{\beta} = 0; \\ i\xi_1 C_1 + i\xi_2 C_2 - kA_3 + \dfrac{kA_0}{\beta} = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2(1-2\nu)}; \qquad \beta = \frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu};$$

величины $\bar{f}_1^{\,0}$, $\bar{f}_2^{\,0}$, $\bar{f}_3^{\,0}$, $\bar{f}_1^{\,h}$, $\bar{f}_2^{\,h}$, $\overline{g}_3^{\,h}$ полагаем известными.

При получении двух последних уравнений (14) использовали третье соотношение из (4), преобразованное по Фурье. Решая систему уравнений (14), находим величины A_0, C_0, A_1, C_1, A_2, C_2, A_3, C_3. (Выражения для этих величин в общем виде не приведены из-за громоздкости. Более детально их определение бедет рассмотрено на примере.) Затем по формулам (11), (12) восстанавливаем трансформанты Фурье гармонических функций $\overline{B}_j(\xi_1, \xi_2, x_3)$, $j = 1, 2, 3$ и $\overline{\varphi}(\xi_1, \xi_2, x_3)$. И, наконец, по формулам (7), (8) определяем трансформанты Фурье компонент вектора перемещений и тензора напряжений. Чтобы получить окончательные формулы для перемещений и напряжений, следует применить теорему обращения для двухмерного преобразования Фурье. В некоторых случаях оказывается полезной также теорема о свертках для этого преобразования.

Систему уравнений (14) можно решить в символьном виде на ЭВМ с использованием правила Крамера.

Пример. Рассмотрим упругий изотропный слой толщиной h $(0 \le x_3 \le h)$, расположенный на жестком недеформируемом основании. Полагаем, что силы трения между слоем и основанием отсутствуют. Упругий слой сжимается нормальными усилиями, равномерно распределенными по квадрату, расположенному в плоскости $x_3 = 0$ (рис. 1). Каждая сторона квадрата равна $2a$.

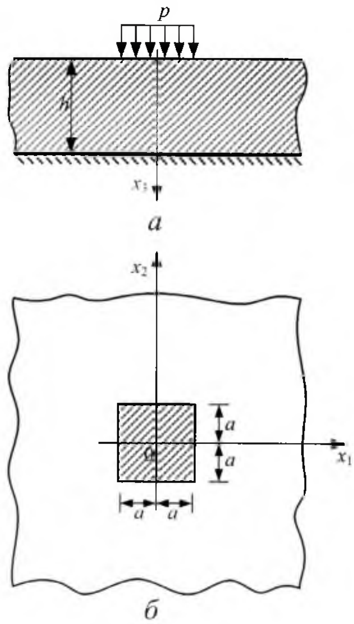

Рис. 1. Схема нагружения упругого слоя: *а* – поперечное сечение; *б* – в плане.

В данном случае в граничных условиях (1) принимаем

$$f_1^0 = f_2^0 = f_1^h = f_2^h = g_3^h = 0;$$
$$f_3^0(x_1, x_2) = -p\begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x_1| < a, \quad |x_2| < a; \\ 0 & \text{при} \quad |x_1| > a, \quad |x_2| > a. \end{cases} \qquad (15)$$

ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2008, № 3

С учетом соотношений (15) получим

$$\bar{f}_1^0 = \bar{f}_2^0 = \bar{f}_1^h = \bar{f}_2^h = \bar{g}_3^h = 0;$$

$$\bar{f}_3^0(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_3^0(x_1, x_2) e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2 = -\frac{p}{2\pi} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} e^{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} dx_1 dx_2. \tag{16}$$

В результате вычисления этого интеграла находим

$$\bar{f}_3^0(\xi_1, \xi_2) = -\frac{2p}{\pi} \frac{\sin a\xi_1 \sin a\xi_2}{\xi_1 \xi_2}. \tag{17}$$

При решении системы уравнений (14) с учетом соотношений (16), (17) имеем

$$\begin{cases} A_1 = -8\omega(1 - 3\nu + 2\nu^2) i\xi_1 k^5 \operatorname{sh}^3(kh); \\ C_1 = 8\omega i\xi_1 k^5 \operatorname{sh}(kh)[-(1-\nu)kh + (1 - 3\nu + 2\nu^2)\operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)]; \\ A_2 = -8\omega(1 - 3\nu + 2\nu^2) i\xi_2 k^5 \operatorname{sh}^3(kh); \\ C_2 = 8\omega i\xi_2 k^5 \operatorname{sh}(kh)[-(1-\nu)kh + (1 - 3\nu + 2\nu^2)\operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)]; \\ A_3 = 8\omega(1-\nu) k^6 \operatorname{sh}(kh)[kh + 2(1-\nu)\operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)]; \\ C_3 = -16\omega(1-\nu)^2 k^6 \operatorname{sh}^3(kh); \\ A_0 = 16\omega(1-\nu)(1-2\nu) k^6 \operatorname{sh}^2(kh)\operatorname{ch}(kh); \\ C_0 = -16\omega(1-\nu) k^7 \operatorname{sh}(kh)[kh + \operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)], \end{cases} \tag{18}$$

где

$$\omega = -\frac{2p}{\mu D} \frac{\sin a\xi_1 \sin a\xi_2}{\xi_1 \xi_2}; \tag{19}$$

$$D = 16(1-\nu) k^7 \operatorname{sh}(kh)[kh + \operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)]. \tag{20}$$

Подставим соотношения (18) в выражения (11) и (12). В результате получим формулы для определения трансформант Фурье гармонических функций $\bar{B}_j$ и $\bar{\varphi}$. Затем с помощью соотношений (7) и (8) находим трансформанты Фурье компонент вектора перемещений и тензора напряжений. Для получения окончательных формул для перемещений и напряжений необходимо воспользоваться теоремой обращений для двухмерного преобразования Фурье.

Чтобы показать более детально ход дальнейших вычислений, рассмотрим определение нормального напряжения $\sigma_3(x_1, x_2, x_3)$.

Подставим в третью формулу (8) выражения для $\overline{B}_3$ и $\overline{\varphi}$ из (11), (12):

$$\overline{\sigma}_{33} = 2\mu k\left[\operatorname{ch}(kx_3)\left(-\frac{1}{2}A_0 + A_3 - \alpha kx_3 C_0\right)+\right.$$

$$\left.+\operatorname{sh}(kx_3)\left(-\frac{1}{2}C_0 + C_3 - \alpha(kx_3)A_0\right)\right]. \tag{21}$$

С учетом в (21) соотношений для A_0, C_0, A_3, C_3 (18) находим

$$\overline{\sigma}_{33}(\xi_1, \xi_2, x_3) = \frac{\bar{f}_3^0}{kh + \operatorname{sh}(kh)\operatorname{ch}(kh)}\times$$

$$\times\{kh\operatorname{ch}(kx_3) + \operatorname{sh}(kh)[\operatorname{ch}k(h - x_3) + kx_3\operatorname{sh}k(h - x_3)]\}, \tag{22}$$

где величина $\bar{f}_3^0$ определяется по формуле (17).

В результате применения к (22) теоремы обращения для двухмерного преобразования Фурье получим

$$\sigma_3(x_1, x_2, x_3) =$$

$$= -\frac{2p}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)} F_1(k, x_3)\frac{\sin(a\xi_1)\sin(a\xi_2)}{\xi_1\xi_2[2kh + \operatorname{sh}(2kh)]}d\xi_1 d\xi_2, \tag{23}$$

где

$$F_1(k, x_3) = (kh)\operatorname{ch}(kx_3) + \operatorname{sh}(kh)[\operatorname{ch}(kh - kx_3) + (kx_3)\operatorname{sh}(kh - kx_3)].$$

Проведем замену переменных и введем обозначения:

$$y_j = \frac{x_j}{a}, \qquad j = 1, 2, 3; \qquad -\infty < y_1, y_2 < \infty; \qquad 0 \le y_3 \le \varepsilon;$$

$$\varepsilon = \frac{h}{a}; \qquad \gamma_1 = a\xi_1; \qquad \gamma_2 = a\xi_2; \qquad \gamma = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{1/2}.$$

Тогда формула (23) преобразуется следующим образом:

$$\sigma_{33}(y_1, y_2, y_3) =$$

$$= -\frac{8p}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \cos(y_1\gamma_1)\cos(y_2\gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2[2\varepsilon\gamma + \operatorname{sh}(2\varepsilon\gamma)]}F(\gamma, y_3)d\gamma_1 d\gamma_2, \tag{24}$$

где

$$F(\gamma, y_3) = (\varepsilon\gamma)\operatorname{ch}(\gamma y_3) + \operatorname{sh}(\varepsilon\gamma)[\operatorname{ch}(\varepsilon\gamma - \gamma y_3) + (\gamma y_3)\operatorname{sh}(\varepsilon\gamma - \gamma y_3)].$$

Двойной интеграл, входящий в (24), по-видимому, в общем случае нельзя вычислить в конечном виде. Для этого необходимо применять численные методы. Можно показать [10], что формула (24) точно удовлетворяет шестому граничному условию (15) на всей плоскости $y_3 = 0$.

В частном случае при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ имеем

$$F(\gamma, 0) = \frac{1}{2}[2\varepsilon\gamma + \mathrm{sh}(2\varepsilon\gamma)],$$

и из формулы (24) следует

$$\sigma_{33}(0, 0, 0) = -\frac{4p}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2}{\gamma_1\gamma_2} d\gamma_1 d\gamma_2 = -p.$$

Вычислим напряжение σ_{33} в ряде точек, расположенных на оси Oy_3. В этом случае $y_1 = y_2 = 0$, и формула (24) принимает вид

$$\sigma_{33}(0, 0, y_3) = -\frac{8p}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\sin\gamma_1 \sin\gamma_2 F(\gamma, y_3)}{\gamma_1\gamma_2[2\varepsilon\gamma + \mathrm{sh}(2\varepsilon\gamma)]} d\gamma_1 d\gamma_2. \qquad (25)$$

Двойной интеграл, входящий в (25), вычисляли численно на ЭВМ с помощью квадратурных формул. Верхние пределы вместо ∞ принимали равными 50, при этом точными оказались первые пять значащих цифр. Вычисления проводили при $\varepsilon = 2$ и 3. Тогда

$$\sigma_{33}(0, 0, y_3) = -p\psi(y_3).$$

Графики функции $\psi(y_3)$ представлены на рис. 2.

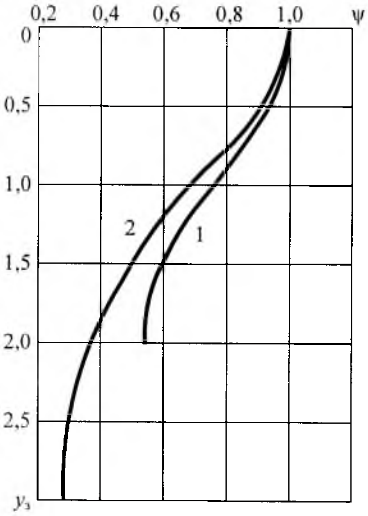

Рис. 2. Зависимость функции ψ от y_3: *1* – $h/a = 2$; *2* – $h/a = 3$.

Заключение. Предложен новый метод решения задачи о равновесии упругого слоя, который позволяет более просто удовлетворять граничным условиям. Рассмотрен пример, доведенный до числовых результатов.

Р е з ю м е

Запропоновано новий метод розв'язку просторової задачі теорії пружності для шару в переміщеннях. У рамках даного підходу задовольнити граничні умови на поверхнях шару набагато простіше, ніж при використанні відомих способів. Розглянуто доведений до числових результатів приклад.

1. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – Л.; М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
2. *Ворович И. И.*, *Александров В. М.*, *Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 455 с.
3. *Гринченко В. Т.*, *Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
4. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1955. – 491 с.
5. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
6. *Шапиро Г. С.* О распределении напряжений в неограниченном слое // Прикл. математика и механика. – 1944. – **8**, вып. 2. – С. 167 – 168.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
8. *Бородачев Н. М.*, *Астанин В. В.* Об одном методе решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 62 – 69.
9. *Davies B.* Integral Transforms and Their Applications. – Berlin: Springer-Verlag, 1978. – 411 p.
10. *Градштейн И. С.*, *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

Поступила 20. 12. 2006