

Определение параметров экспоненциальной функции при описании кривой усталости

Б. С. Шульгинов

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложены простые методы определения параметров экспоненциальной функции, используемой для описания кривой усталости. Показано, что эта функция обеспечивает более тесную связь кривой усталости с экспериментальными точками, полученными при испытаниях образцов на усталость, чем степенная и гиперболическая функции, которые используются в нормативных документах.

Ключевые слова: сопротивление усталости, кривая усталости, предел выносливости, экспоненциальная функция.

В работах [1, 2] кривые усталости сварных соединений предложено описывать экспоненциальным уравнением

$$\sigma = \sigma_R \exp\left(A \frac{1}{N + B}\right), \quad (1)$$

где σ – максимальное напряжение цикла; N – число циклов до разрушения при напряжении σ ; σ_R – предел выносливости; A и B – параметры. В методических указаниях [2] для упрощения используемых далее зависимостей была введена новая переменная величина y , характеризующая долговечность рассматриваемых объектов и равная

$$y = \frac{1}{N + B}. \quad (2)$$

Параметры B , A и σ_R уравнения (1) определяются методом максимума правдоподобия [2, 3] по результатам испытаний образцов в области ограниченных долговечностей при не менее чем четырех уровнях напряжений [2]. Параметр B находится методом последовательных приближений

как корень специального уравнения, левая часть которого равна $\sum_{i=1}^n y_i$, где n –

число образцов, испытанных при всех уровнях напряжений. Для каждого заданного значения B вычисляются последовательно параметр A и дисперсия S_y^2 переменной величины y по приведенным в [2] зависимостям.

Согласно [2] параметры экспоненциального уравнения (2) вычисляли по результатам испытаний на усталость 16 сварных образцов с пересекающимися швами. Образцы шириной 80 мм и длиной 450 мм изготавливали из листовой малоуглеродистой стали толщиной 12 мм. Испытания образцов проводили в Институте электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины в условиях симметричного чистого изгиба до образования трещины глубиной

2-3 мм при четырех уровнях напряжений. Результаты испытаний на усталость приведены в табл. 1, где σ_i – амплитуда напряжений на i -м уровне; \bar{N}_i – среднее число циклов до разрушения образцов на i -м уровне напряжений; m_i – количество образцов, испытанных на i -м уровне напряжений.

Т а б л и ц а 1

Результаты испытаний на усталость сварных образцов с пересекающимися швами (над чертой) и образцов стали 30ХГСА (под чертой)

№ уровня напряжений i	m_i	σ_i , МПа	\bar{N}_i , цикл
1	4	160	67393
	17	590	71147
2	4	140	147570
	21	540	159637
3	4	120	289109
	25	500	296308
4	4	100	1014613
	21	480	547222

Использование зависимости (1) для других объектов проверяли с помощью результатов испытаний на усталость 84 стандартных гладких цилиндрических образцов из стали 30ХГСА, полученных при изгибе с вращением на четырех уровнях напряжений в Институте механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины М. Э. Гарфом и О. Ю. Крамаренко. Результаты испытаний стали 30ХГСА приведены также в табл. 1. Среднее значение долговечности \bar{N}_i при i -м уровне напряжений определяли по зависимости

$$\bar{N}_i = \text{anti} \overline{\lg N_i} = \text{anti} \frac{\sum \lg N_{ij}}{m_i}, \quad (3)$$

где N_{ij} – фактическое число циклов до разрушения j -го образца при амплитуде напряжения σ_i ; m_i – количество образцов при i -м уровне напряжений.

Значения параметров экспоненциального уравнения (1) для сварных образцов и образцов стали 30ХГСА, вычисленные по методике [2], приведены в табл. 2, где σ_{-1} и σ_{-1p} – физический и расчетный пределы выносливости соответственно. Отметим, что параметры B и A рекомендуется определять с точностью до 10^3 [2]. Однако, как показывает проведенный анализ, с такой точностью можно подбирать параметр B , а параметр A , вычисляемый по формуле, в которой задан выбранный параметр B , лучше определять с точностью до единицы, что и было сделано при расчете параметров экспоненциального уравнения (1). Средние квадратические отклонения логарифма долговечности $S_{\lg N}$ экспериментальных точек соответствующих выборок от теоретических кривых усталости, значения которых приведены также в табл. 2, определяли в соответствии с [4]. По данным

табл. 2 построены кривые усталости сварных образцов и образцов стали 30ХГСА (рисунок). На рисунке светлыми точками обозначены долговечности каждого образца, крестиками – средние значения долговечностей (табл. 1).

Т а б л и ц а 2

Параметры экспоненциального уравнения (1) кривых усталости сварных образцов и образцов стали 30ХГСА

Марка стали и тип образцов	B	A	σ_{-1p} , МПа	σ_{-1} , МПа	Δ , МПа	$S_{lg N}$
Малоуглеродистая, сварные образцы с пересекающимися швами	171000	143000	88,5	88,5	0	0,081715371
30ХГСА, стандартные цилиндрические образцы	57800	37115	447	455	-8	0,251943609

Примечание: $\Delta = \sigma_{-1p} - \sigma_{-1}$.

Однако из-за некоторой сложности расчета затрудняется использование методики [2] на практике. Поэтому в настоящей работе рассматривается несколько упрощенных методов определения параметров экспоненциального уравнения (1) на примере результатов испытаний на усталость как сварных образцов с пересекающимися швами [2], так и образцов стали 30ХГСА. Экспоненциальное уравнение (1) удобнее анализировать, если записать его относительно числа циклов:

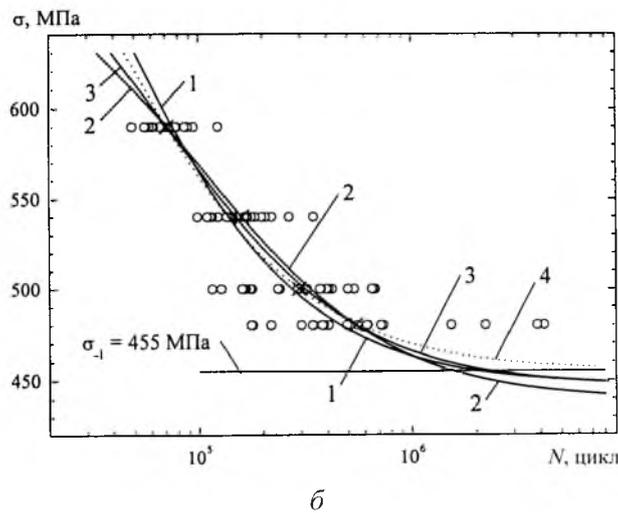
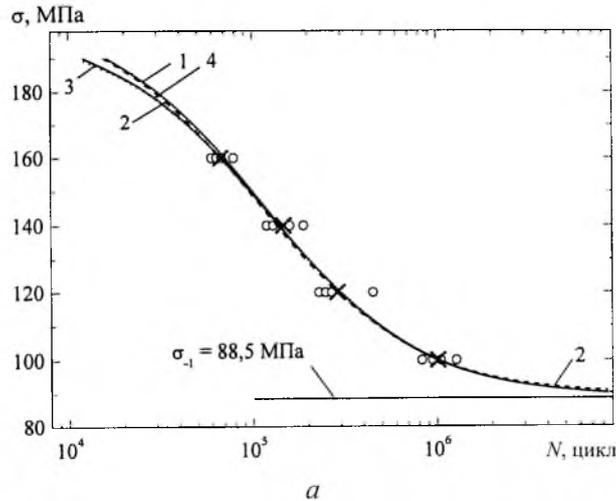
$$N_i = \frac{A}{\ln \sigma_i - \ln \sigma_R} - B. \quad (4)$$

Рассмотрим с использованием вышеприведенных примеров (табл. 1) упрощенные методы определения параметров уравнения (3) при следующих исходных условиях.

Метод 1: из нескольких уровней напряжений выбраны три уровня напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и соответствующие им средние значения долговечностей \bar{N}_1, \bar{N}_2 и \bar{N}_3 , при которых $S_{lg N}$ минимально при неизвестном пределе выносливости.

Метод 2: выбраны два уровня напряжений σ_1, σ_2 (максимальный и минимальный) и соответствующие им средние значения долговечностей \bar{N}_1 и \bar{N}_2 , параметр B определяется методом последовательных приближений по критерию минимального значения $S_{lg N}$ при неизвестном пределе выносливости.

Метод 3: выбраны два уровня напряжений σ_1 и σ_2 и соответствующие им средние долговечности \bar{N}_1 и \bar{N}_2 , при которых $S_{lg N}$ минимально при известном пределе выносливости.



Кривые усталости сварных образцов с пересекающимися швами (а) и образцов стали 30ХГСА (б), описываемые экспоненциальной функцией (4), параметры которой определены по методу максимума правдоподобия (кривые 1), по трем уровням напряжений $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4$ (кривые 2), по двум уровням напряжений σ_1, σ_4 и параметру B (кривые 3), а также по двум уровням напряжений σ_1, σ_4 и физическому пределу выносливости (кривые 4).

Метод 1. Пусть известны три уровня напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и соответствующие им средние долговечности $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$. При уровнях напряжений больше трех может быть несколько сочетаний трех напряжений. Например, при четырех уровнях напряжений может быть четыре сочетания напряжений, но для каждого должно соблюдаться условие $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Если для каждого напряжения уравнение (4) записать относительно $\ln \sigma_R$, то параметр B в уравнении кривой усталости, проходящей через заданные три точки, можно определить по зависимости

$$B = \frac{\bar{N}_3(\ln \sigma_1 - \ln \sigma_3)(\bar{N}_2 - \bar{N}_1) - \bar{N}_2(\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2)(\bar{N}_3 - \bar{N}_1)}{(\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2)(\bar{N}_3 - \bar{N}_1) - (\ln \sigma_1 - \ln \sigma_3)(\bar{N}_2 - \bar{N}_1)}. \quad (5)$$

Если же для каждого напряжения уравнение (3) записать относительно параметра A , то параметр B можно найти по зависимости

$$B = \frac{(\bar{N}_3 - \bar{N}_1)(\bar{N}_2 \ln \sigma_2 - \bar{N}_1 \ln \sigma_1) - (\bar{N}_2 - \bar{N}_1)(\bar{N}_3 \ln \sigma_3 - \bar{N}_1 \ln \sigma_1)}{(\bar{N}_3 - \bar{N}_1)(\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2) - (\bar{N}_2 - \bar{N}_1)(\ln \sigma_1 - \ln \sigma_3)}. \quad (6)$$

Результаты, полученные по зависимостям (5) и (6), одинаковые.

При вычисленном значении B параметр A можно определить по зависимости

$$A = \frac{(\bar{N}_1 + B)(\bar{N}_2 + B)(\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2)}{\bar{N}_2 - \bar{N}_1}, \quad (7)$$

натуральный логарифм расчетного предела выносливости σ_{Rp} –

$$\ln \sigma_{Rp} = \ln \sigma_1 - \frac{A}{\bar{N}_1 + B} = \ln \sigma_2 - \frac{A}{\bar{N}_2 + B}, \quad (8)$$

расчетный предел выносливости σ_{Rp} –

$$\sigma_{Rp} = \text{anti} \ln \sigma_{Rp}. \quad (9)$$

В табл. 3 для сварных образцов с пересекающимися швами и образцов стали 30ХГСА приведены полученные в результате вычислений при четырех сочетаниях трех уровней напряжений параметры уравнения (4), отклонения расчетного предела выносливости от физического $\Delta(\sigma_{Rp})$ и выборочные средние квадратические отклонения логарифма долговечности образцов $S_{\lg N}$ [3]. Поскольку в этом случае значение коэффициента B вычисляется по формуле (5) или (6), то округлять его до 10^3 нет смысла. Наименьшее значение $S_{\lg N}$ для сварных образцов получено при сочетании напряжений $j=3$, для образцов стали 30ХГСА – при $j=2$. Наименьшее отклонение расчетного предела выносливости от физического $\Delta(\sigma_{Rp})$ имеет место для сварных образцов и образцов стали 30ХГСА при $j=3$. В первом приближении можно утверждать, что минимальное значение $S_{\lg N}$ и наименьшее отклонение расчетного предела выносливости от физического не обязательно должны наблюдаться при одинаковом сочетании уровней напряжений.

Кривая усталости сварных образцов, описываемая экспоненциальной функцией (4), параметры которой определены при $j=3$, соответствует кривой 2 (рисунок, а), кривая усталости образцов стали 30ГСА, параметры которой определены при $j=2$, – кривой 2 (рисунок, б).

Метод 2. Пусть известны два уровня напряжений σ_1 , σ_2 и соответствующие им средние значения долговечностей \bar{N}_1 и \bar{N}_2 , а коэффициент B определяется методом последовательных приближений по критерию минимального среднего квадратического отклонения долговечностей $S_{\lg N}$. При каждом заданном значении B коэффициент A определяется по зависимости (7), натуральный логарифм расчетного предела выносливости – по (8).

Т а б л и ц а 3

Параметры экспоненциального уравнения (1) кривых усталости сварных образцов (над чертой) и образцов стали 30ХГСА (под чертой), определенные по трем уровням напряжений

№ сочетания напряжений j	№ уровня напряжений i	B	A	σ_{Rp} , МПа	$\Delta(\sigma_{Rp})$, МПа	$S_{lg N}$
1	1, 2, 3	351572	348285	69,68	18,82	0,135779
		218591	109666	404,08	-50,92	0,253174
2	1, 2, 4	220371	176339	86,69	-1,81	0,083465
		136472	61522	438,69	-16,31	(0,247989)
3	1, 3, 4	160130	132623	89,32	(0,82)	(0,082424)
		64168	35856	452,66	(-2,34)	0,248188
4	2, 3, 4	112507	113758	90,40	1,90	0,095322
		-2158	26085	457,57	2,57	0,257719

Примечание. В скобках приведены наименьшие значения $S_{lg N}$ и $\Delta(\sigma_{Rp})$.

Вычисления показывают, что наиболее целесообразно использовать сочетание напряжений, при котором σ_1 – максимальное, σ_2 – минимальное для рассматриваемой выборки. Для сварного соединения малоуглеродистой стали (табл. 1) такими напряжениями будут: $\sigma_1 = 160$ МПа, $\sigma_2 = 100$ МПа, для стали 30ХГСА: $\sigma_1 = 590$ МПа, $\sigma_2 = 480$ МПа. Для заданной пары напряжений коэффициент B можно задавать с точностью до 10^3 , как это рекомендовано в работе [2], и изменять его, последовательно приближаясь к такому оптимальному значению, при котором $S_{lg N}$ будет минимальным. Коэффициент A лучше определять с точностью до единицы, так как в этом случае не нарушается монотонное изменение $S_{lg N}$ при изменении коэффициента B , что важно для поиска минимального значения $S_{lg N}$.

Для проверки эффективности данного метода использовали те же результаты испытаний на усталость образцов, что и для проверки метода 1. В табл. 4 приведены параметры B для сварных соединений и для стали 30ХГСА. Кривые усталости, описываемые экспоненциальной функцией (4), параметры которых определены по двум уровням напряжений σ_1 , σ_4 и параметру B , при котором $S_{lg N}$ минимально, для сварных образцов и для стали 30ХГСА представлены на рисунке.

Согласно рассмотренным методам определения оптимальных параметров экспоненциального уравнения (4) отклонение расчетных пределов выносливости от фактического составляет не более 1%, что вполне допустимо [4].

Таким образом, минимальное среднее квадратическое отклонение $S_{lg N}$, определенное по методу 2, несколько меньше, чем по методу 1, в то время как значение расчетного предела выносливости близко к фактическому.

Метод 3. Пусть известны два уровня напряжений σ_1 , σ_2 и соответствующие им средние значения долговечностей \bar{N}_1 и \bar{N}_2 .

Т а б л и ц а 4

Динамика изменения параметров экспоненциального уравнения (1) кривых усталости (1) для сварных образцов с пересекающимися швами (над чертой) и образцов стали 30ХГСА (под чертой), а также их среднего квадратического отклонения логарифма долговечности $S_{lg N}$ при заданных изменениях параметра B

B	A	σ_{Rp} , МПа	$S_{lg N}$
180000	146644	88,448	0,081526025
96000	44505	447,62	0,247310721
181000	147360	88,404	0,081519411
(97000)	46949	446,26	(0,247273794)
182000	148077	88,360	0,081516105
98000	47301	446,49	0,247273814
(183000)	148795	88,316	(0,081516064)
100000	48009	445,68	0,247277526
184000	149514	88,273	0,081519242
120000	55276	441,84	0,247541357

Примечание. В скобках приведены наименьшие значения $S_{lg N}$ и соответствующие им оптимальные параметры B .

Если зависимость (4) записать относительно параметра A , то параметр B определяется по формуле

$$B = \frac{\bar{N}_2(\ln \sigma_2 - \ln \sigma_R) - \bar{N}_1(\ln \sigma_1 - \ln \sigma_R)}{\ln \sigma_1 - \ln \sigma_2}, \quad (10)$$

параметр A при полученном значении B –

$$A = (\bar{N}_i + B)(\ln \sigma_i - \ln \sigma_R). \quad (11)$$

Номера уровней напряжений и их сочетаний приведены в табл. 5. Для каждого сочетания двух напряжений определяли параметры B , A и среднее квадратическое отклонение долговечности $S_{lg N}$. Из данных табл. 5 видно, что наименьшие значения $S_{lg N}$ получены для сварных образцов при $j=3$, для образцов стали 30ХГСА – при $j=2$. На основании этого можно заключить, что как по методу 2, так и по методу 3 наименьшее $S_{lg N}$ отмечается при максимальном (σ_1) и минимальном (σ_4) напряжениях в выборке.

Небольшое отклонение наблюдается для стали 30ХГСА, где минимальное значение $S_{lg N}$ имеет место при сочетании напряжений $j=2$. Кривые усталости, описываемые экспоненциальной функцией (4), параметры которых определены по двум уровням напряжений σ_1 , σ_4 и физическому пределу выносливости σ_R , при котором $S_{lg N}$ минимально, для сварных образцов и образцов стали 30ХГСА приведены на рисунке.

Для сравнения эффективности описания результатов усталостных испытаний сварных образцов и образцов стали 30ХГСА разными функциями (экспоненциальная, гиперболическая и степенная) в табл. 6 представлены

минимальные средние квадратические отклонения долговечностей $S_{\lg N}$, физические σ_R и расчетные σ_{Rp} пределы выносливости.

Здесь под гиперболической функцией [5, 6] необходимо понимать функциональную связь между напряжением σ_i и долговечностью N_i :

$$N_i = \beta \frac{\sigma_{\Pi} - \sigma_i}{\sigma_i - \sigma_R}, \quad (12)$$

а под степенной функцией [7, 8]:

$$N_i = a \sigma_i^{-m}, \quad (13)$$

где β , σ_{Π} , σ_R , a и m – константы.

Т а б л и ц а 5

Параметры экспоненциального уравнения (1) кривых усталости и выборочные средние квадратические отклонения логарифма долговечности сварных образцов при $\sigma_R = 88,5$ МПа (над чертой) и образцов стали 30ХГСА при $\sigma_R = 455$ МПа (под чертой) при разных сочетаниях двух напряжений

№ сочетания напряжений j	№ уровня напряжений i	B	A	$S_{\lg N}$
1	1, 2	$\frac{207991}{100002}$	$\frac{163074}{44469}$	$\frac{0,087595128}{0,25988260}$
2	1, 3	$\frac{167276}{57150}$	$\frac{138964}{33335}$	$\frac{0,082723861}{(0,248609562)}$
3	1, 4	$\frac{178817}{52266}$	$\frac{145798}{32066}$	$\frac{(0,081538329)}{0,249155573}$
4	2, 3	$\frac{132008}{7844}$	$\frac{128225}{20524}$	$\frac{0,096508506}{0,282797857}$
5	2, 4	$\frac{167239}{16377}$	$\frac{144384}{22741}$	$\frac{0,085775943}{0,271487383}$
6	3, 4	$\frac{197028}{32462}$	$\frac{148023}{26920}$	$\frac{0,101870771}{0,256987213}$

Примечание. Здесь и в табл. 6 в скобках приведены наименьшие значения $S_{\lg N}$.

Из данных табл. 6 видно, что при использовании экспоненциальной функции (4) (метод 2) при обработке экспериментальных результатов испытаний на усталость наблюдается наиболее тесная связь кривой усталости с экспериментальными точками по сравнению с другими функциями. Также отметим, что метод определения параметров экспоненциальной функции по двум крайним уровням напряжений цикла с подбором параметра B обеспечивает более тесную связь кривой усталости с экспериментальными точками, чем метод максимума правдоподобия [2]. Однако согласно последнему

**Эффективность описания кривых усталости сварных образцов
с пересекающимися швами и образцов стали 30ХГСА разными функциями**

Объект испытаний на усталость	Функция кривой усталости	σ_R , МПа	Задаваемые величины, входящие в уравнение кривой усталости	σ_{Rp} , МПа	$S_{lg N}$
Стыковое сварное соединение	Экспоненциальная	–	Метод максимума правдоподобия	88,50	0,081715
		–	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	89,32	0,082424
		–	σ_1, σ_4 и B методом подбора	88,32	(0,081516)
		88,5	σ_1, σ_4 и σ_R	–	0,081538
	Гиперболическая	–	σ_1, σ_4 и σ_n методом подбора	88,05	0,081611
		88,5	σ_4 и σ_n методом подбора	–	0,081562
	Степенная	88,5	Метод наименьших квадратов	–	0,088736
	Сталь 30ХГСА	Экспоненциальная	–	Метод максимума правдоподобия	447,00
–			$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4$	438,69	0,247989
–			σ_1, σ_4 и B методом подбора	446,26	(0,247274)
455			σ_1, σ_3 и σ_R	–	0,248610
Гиперболическая		–	σ_1, σ_4 и σ_n методом подбора	446,03	0,247281
		455	σ_1, σ_3 и σ_R	–	0,248637
Степенная		455	Метод наименьших квадратов	–	0,249109

расчетное значение предела выносливости наиболее близко к физическому пределу выносливости, хотя и не намного отличается от расчетного предела выносливости, определенного по экспоненциальной функции (4) (табл. 6). Заметим, что и в работе [9] для другой функции кривой усталости была

установлена существенная зависимость относительной погрешности расчетного предела выносливости от близости одной из двух выбираемых точек к физическому пределу выносливости.

Предложенные методики определения параметров экспоненциального уравнения можно использовать при обработке результатов усталостных испытаний сварных соединений, материалов и конструкций.

Резюме

Запропоновано прості методи визначення параметрів експоненціальної функції, за допомогою якої описується крива втоми. Показано, що ця функція забезпечує більш тісний зв'язок кривої втоми з результатами випробування зразків на втому порівняно зі степенною та гіперболічною функціями, що використовуються в нормативних документах.

1. Труфьяков В. И. Усталость сварных соединений. – Киев: Наук. думка, 1973. – 216 с.
2. РД 50-551-85. Методические указания. Расчеты и испытания на прочность. Расчетно-экспериментальные методы оценки сопротивления усталости сварных соединений. – Введ. 01.01.86.
3. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 664 с.
4. ГОСТ 25.502-93. Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний материалов. Методы испытаний на усталость. – Введ. 01.01.81.
5. Нормы для расчета и оценки прочности несущих элементов, динамических качеств и воздействия на путь экипажной части локомотивов железных дорог МПС РФ колеи 1520 мм. – М.: ВНИИЖТ, 1998. – 145 с.
6. Шульгинов Б. С., Матвеев В. В., Коломиец А. П. К вопросу об использовании гиперболической функции для описания кривой усталости // Пробл. прочности. – 2007. – № 4. – С. 77 – 89.
7. Троценко В. Т., Сосновский Л. А. Сопротивление усталости металлов и сплавов. Справочник. Ч. 1. – Киев: Наук. думка, 1987. – 505 с.
8. Шульгинов Б. С., Коломиец А. П. К вопросу об использовании степенной функции для описания результатов усталостных испытаний // Пробл. прочности. – 2007. – № 3. – С. 147 – 155.
9. Матвеев В. В. К обоснованию использования деформационных критериев многоциклового усталостного разрушения металлов. Сообщ. 1. Анализ известных подходов // Там же. – 1994. – № 5. – С. 11 – 21.

Поступила 01. 11. 2006