

Аналитическое решение задачи Бразье для тонкостенных труб с начальным несовершенством формы поперечного сечения при действии давления

И. В. Орыняк, С. А. Радченко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложен аналитический метод решения геометрически нелинейной задачи Бразье для тонкостенных труб с начальным несовершенством формы поперечного сечения при действии давления. Получены геометрические уравнения, связывающие компоненты перемещений с деформациями, и уравнения равновесия, учитывающие изменение кривизны сечения трубы и ее оси. Приведено решение в первом приближении по безразмерному параметру гибкости, точность которого проиллюстрирована на многочисленных примерах. Для случая совместного действия внешнего изгибающего момента и давления получена предельная кривая критического значения момента в зависимости от величины давления.

Ключевые слова: тонкостенная труба, эффект Бразье, начальное несовершенство сечения, давление, кривизна, аналитическое решение.

Введение. Магистральные трубопроводы и трубопроводы предприятий энергетической, нефтехимической и других отраслей промышленности составляют достаточно большую часть их материальных активов. Как правило, трубопроводы представляют собой очень высоконагруженные конструкции, поскольку еще при их проектировании с целью экономии металла закладываются фактически самые низкие коэффициенты запаса прочности. Это требует очень точного обоснования прочности и ресурса при всех возможных видах нагружения. Проведение такого анализа невозможно без применения современных вычислительных комплексов.

Вместе с тем расчетчику необходимо заранее понимать характер решения, а численные результаты должны лишь уточнять некоторые коэффициенты. Важно знать особенности деформирования конструкции при ее геометрически нелинейном поведении, учитывая, что даже для идеально упругого материала незначительное увеличение нагрузки может приводить к неконтролируемому росту деформаций и напряжений. Кроме того, современные нормы проектирования оборудования атомных станций [1, 2] и нормы оценки эксплуатируемых конструкций с обнаруженными несовершенствами [3] предусматривают разделение расчетных напряжений на разные категории, к которым применяются различные коэффициенты запаса прочности [4]. Без понимания особенностей деформирования различных элементов, достигаемого путем аналитического моделирования, использовать положения указанных стандартов невозможно.

Трудности расчета напряженного состояния трубопроводных систем во многом зависят от моделирования деформирования гiba трубы. Расчетным эквивалентом гiba трубы служит тороидальная оболочка, при исследовании которой обнаруживаются важные эффекты деформирования. Их понимание является необходимым условием корректного расчета трубопроводов вообще.

К сожалению, в учебниках по сопротивлению материалов и в общедоступных курсах теории оболочек использованию тороидальных оболочек уделяется недостаточно внимания. В гibaх труб по сравнению с прямой трубой при приложении внешних изгибающих моментов наблюдается эффект овализации поперечного сечения, что приводит как к увеличенной податливости, так и интенсификации напряжений (появлению локальных изгибающих моментов). Различие в характере деформирования прямой трубы и гiba описывается с помощью двух безразмерных параметров: кривизны $\alpha = R/B$ и гибкости $\lambda = R^2/Bh$, где R – средний радиус сечения трубы; B – радиус оси гiba; h – толщина стенки трубы. Чем больше эти параметры, тем значительнее проявляются различия в податливостях и распределении напряжений в прямой трубе и гibe.

Впервые аналитическое объяснение эффекта овализации поперечного сечения гiba трубы в случае изгиба в плоскости при малых α было предложено Карманом, который рассматривал задачу нагружения гiba постоянным вдоль оси изгибающим моментом с краевыми условиями по Сен-Венану [5]. При этом распределение усилий на краях гiba совпадает с соответствующим распределением напряжений в каждом сечении гiba. В реальном случае сопряжения гiba с другими конструктивными элементами это достигается только для достаточно длинных гибов, в средней части которых можно не учитывать влияние граничных условий.

Позже появились работы, обобщающие результаты Кармана для учета больших значений λ [6, 7] и α [8]. Задача Кармана изучалась также для труб некругового сечения. Такая работа была проведена Тимошенко в 1923 г., где он рассматривал сечение прямоугольной формы [9]. Были также получены решения для гiba трубы с эллиптической формой сечения [10, 11]. Методы анализа труб с исходной неправильностью формы сечения и разнотолщинностью разработаны в [12–15].

Более сложным является частный случай задачи Кармана – так называемый эффект Бразье, связанный с потерей устойчивости прямой трубы или гiba при упругом изгибе [16]. Он заключается в том, что с увеличением внешнего изгибающего момента K_z растет кривизна исходной трубы (уменьшается радиус гiba B), что приводит к увеличению ее гибкости λ в процессе деформирования и, как следствие, к все более нелинейно увеличивающейся овализации поперечного сечения. Начиная с некоторого значения изгибающего момента, овализация нарастает катастрофически даже при постепенно уменьшающейся нагрузке.

Целью решения задачи Бразье является определение зависимости $K_z(\lambda)$ и величины λ_{\max} , при которой достигается экстремальное значение этого момента $K_{z,\max}(\lambda_{\max})$. Классическая задача Бразье и в настоящее время вызывает большой интерес; обзоры решений приведены в работах [17, 18]. Это связано с тем, что в теоретическом подходе Бразье [16] имеются существенные недостатки, но тем не менее результат, полученный на его основе, достаточно точно совпадает с более строгими современными подходами [19]. Парадоксально, но первоначальное уточнение результатов Бразье приводило к ухудшению оценок $K_{z,\max}$ и λ_{\max} [20, 21]. Таким образом, можно заключить, что вопрос о минимально необходимом уровне слож-

ности, позволяющем получить достаточно точное решение, по-прежнему остается актуальным.

Другой геометрически нелинейный эффект связан с действием внутреннего и внешнего давления на тонкостенную оболочку (кольцо). Известно, что внутреннее давление оказывает подкрепляющее действие при неосесимметричном деформировании кольца, в том числе при отклонении исходной формы сечения от идеально круговой [22]. Некорректность применения принципа суперпозиции (суммирование упругих напряжений) при нагружении внешним изгибающим моментом, приводящим к оваллизации, и внутренним давлением для гибов труб была признана еще в 50-х годах прошлого столетия [23, 24]. Тем не менее нелинейный характер деформирования гибов труб в таких задачах по-прежнему вызывает интерес исследователей. И как отмечалось в [25], “эффект подкрепляющего действия внутреннего давления является хорошо известным, но слабо понимаемым”.

В настоящей работе поставлена более сложная задача: аналитическое описание эффекта Бразье с учетом внутреннего давления и исходного несовершенства формы сечения для упругой трубы. При этом используются результаты решения задачи Сен-Венана для гибов труб [26–28], и разработанный аналитический метод решения является альтернативой оригинальной численной процедуре, основанной на итерационном использовании метода начальных параметров [29]. В процессе решения определим минимально необходимый уровень сложности, сохраняющий его точность.

Заметим, что использование для этих целей коммерческих вычислительных программ является достаточно неэффективным. Геометрическая нелинейность и формулировка граничных условий по Сен-Венану все еще представляют для них значительные сложности. Так, при рассмотрении задачи Сен-Венана выбираются гибы конечной длины. Если гиб недостаточно длинный, то даже в его средней части проявляется влияние краевых эффектов [30]. Если гиб очень длинный, то увеличивается не только время вычислений, но и ошибки, которые экспоненциально зависят от длины гiba [31].

1. Основные уравнения. Гиб трубы, геометрические размеры и обозначения которого приведены на рис. 1, рассматривается как тонкостенная оболочка. Здесь r, φ – локальная система полярных координат, связанная с каждым поперечным сечением; x, y, z – локальная система декартовых координат, причем y – координата исследуемой точки, направленная по лучу, соединяющему центр гiba (точка O) с центром рассматриваемого сечения (точка O_1), отсчитываемая от точки O_1 ; z – координата, связанная с направлением $\varphi = 0$; R – средний радиус поперечного сечения; h – толщина стенки трубы; B – радиус кривизны; $\theta = x/B$ – угловая координата поперечного сечения гiba. С координатами y и z связаны соответствующие орты (единичные векторы) \vec{j} и \vec{k} . Направления локальных перемещений точек срединной поверхности гiba трубы w, v, u совпадают с направлениями координат r, φ, x соответственно; направление угла φ указано на рис. 1.

1.1. Геометрические соотношения в плоскости гiba. Рассмотрим сечение трубы (рис. 2). Отметим два момента, касающиеся кривизны кольца: кольцо изначально кривое (на рис. 2 тонкая сплошная линия); кольцо дополнительно искривляется в процессе деформирования (пунктирная ли-

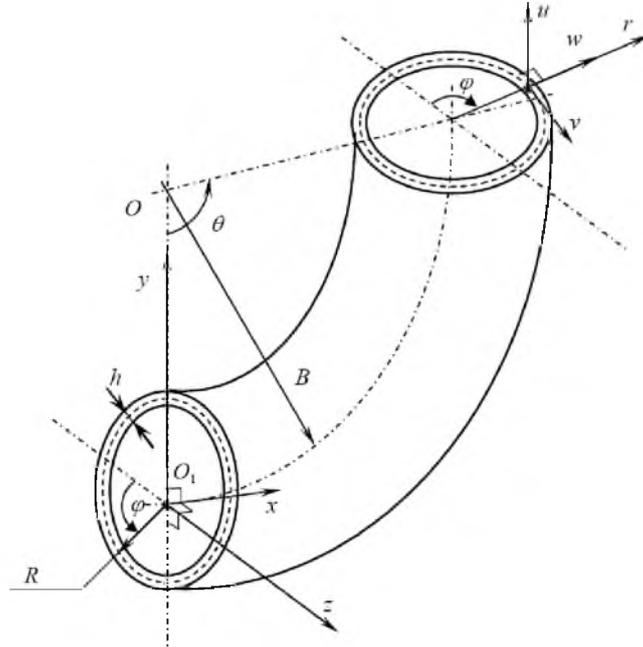


Рис. 1. Общий видгиба трубы.

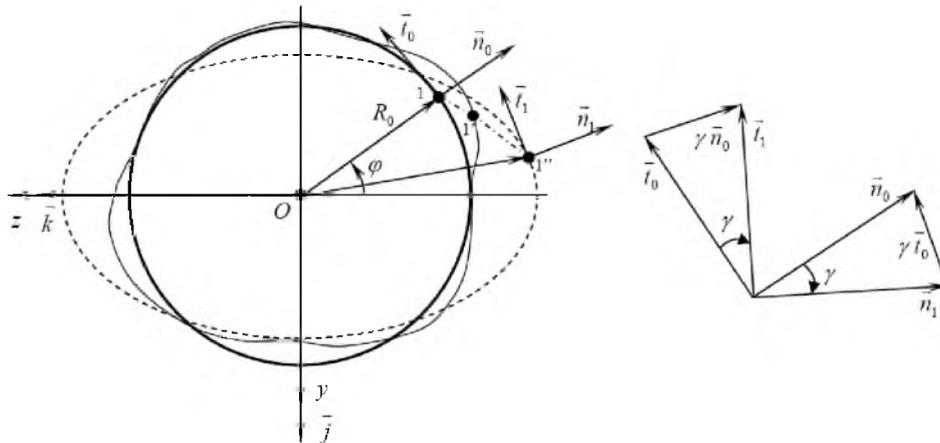


Рис. 2. Сечение трубы.

ния). Для упрощения постановки и решения задачи введем понятие идеального кольца (на рис. 2 жирная сплошная линия), незначительное искривление которого и привело к рассматриваемому начально искривленному кольцу. Всю геометрическую систему отсчета устанавливаем относительно идеального кольца с начальным радиусом R_0 . К ней прежде всего относится координата каждой точки, характеризуемая углом φ . Тогда элементарная длина каждого малого участка кольца равна

$$ds = R_0 d\varphi. \quad (1)$$

Каждый элементарный участок идеального кольца дополнительно характеризуется направлением касательной \vec{t}_0 и нормали \vec{n}_0 , которые выражаются через орты \vec{j} и \vec{k} в виде

$$\begin{cases} \vec{n}_0 = -\vec{k} \cos \varphi - \vec{j} \sin \varphi; \\ \vec{t}_0 = -\vec{j} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того, они связаны между собой следующими дифференциальными зависимостями:

$$\frac{d\vec{n}_0}{d\varphi} = \vec{t}_0; \quad \frac{d\vec{t}_0}{d\varphi} = -\vec{n}_0. \quad (3)$$

Рассмотрим реальную форму кольца. Для каждой точки идеального кольца, характеризуемой координатой φ (на рис. 2 точка I), ставим в соответствие точку I' начально искривленного кольца, а затем и точку I'' , в которую переместится точка I' после деформирования некоторой системой нагрузок. Для описания начальной неправильности формы введем понятие начальных радиальных w_n и тангенциальных v_n перемещений, направление которых совпадает с ортами \vec{n}_0 и \vec{t}_0 соответственно. Деформированное состояние от внешних нагрузок дополнительно описывается перемещениями w_d и v_d . Таким образом, полный радиус-вектор срединной поверхности трубы после деформирования описывается следующим выражением:

$$\vec{R}_1(\varphi) = R_0 \vec{n}_0 + w_n \vec{n}_0 + v_n \vec{t}_0 + w_d \vec{n}_0 + v_d \vec{t}_0. \quad (4)$$

В геометрически нелинейной постановке необходимо записывать уравнения в проекциях на нормаль и касательную к реальной (деформированной) геометрии. Определим выражения для текущих нормали $\vec{n}(\varphi)$ и касательной $\vec{t}(\varphi)$ к контуру в деформированном состоянии (рис. 2). По определению выражение для \vec{t} может быть записано как отношение производной текущего радиуса-вектора $\vec{R}_1(\varphi)$ к ее модулю:

$$\vec{t} = \frac{\vec{R}'_1(\varphi)}{|\vec{R}'_1(\varphi)|}. \quad (5)$$

В соответствии с (4) производная от радиуса-вектора имеет вид

$$\vec{R}'_1(\varphi) = (R_0 + m_1) \vec{t}_0 + m_2 \vec{n}_0, \quad (6)$$

где

$$m_1 = w_n + w_d + v'_n + v'_d; \quad m_2 = w'_n + w'_d - v_n - v_d. \quad (7)$$

Здесь уместно дать более четкое определение терминам “слегка искривленный” и “слегка деформированный” контур в геометрически нелинейной постановке. Полагаем

$$(m_1)^2; (m_2)^2 \ll (R_0)^2. \quad (8)$$

Это условие малости является основным в настоящем анализе. Поэтому выражение $|\bar{R}'_1(\varphi)|$ приближенно определяется следующим образом:

$$|\bar{R}'_1(\varphi)| = \sqrt{(R_0 + m_1)^2 + (m_2)^2} \approx R_0 + m_1. \quad (9)$$

Следовательно, длина элемента деформированного кольца ds_1 равна

$$ds_1 = |\bar{R}'_1(\varphi)| d\varphi \approx (R_0 + m_1) d\varphi. \quad (10)$$

Сделаем еще одно важное допущение, касающееся характера деформирования кольца: тонкостенное кольцо претерпевает в основном изгибные деформации, и удлинением–сжатием можно пренебречь. Это означает, что длина элемента не изменилась, т.е. $ds_1 = ds$. Из сравнения уравнений (1) и (10) следует, что $m_1 = 0$. С учетом этого из (7) получим так называемое условие Кармана о нерастяжимости средней поверхности:

$$w_{\text{н}} + v'_{\text{н}} = 0; \quad w_{\text{д}} + v'_{\text{д}} = 0. \quad (11)$$

На основании вышеизложенного выражение для касательного вектора \bar{t} может быть приближенно записано так:

$$\bar{t} = (\bar{t}_0 + \gamma \bar{n}_0) / \sqrt{1 + \gamma^2} \approx \bar{t}_0 + \gamma \bar{n}_0. \quad (12)$$

Здесь γ^2 – малая величина по сравнению с единицей ($\gamma^2 = 0(1)$), представляющая собой угол поворота текущей системы координат относительно начальной системы координат (рис. 2) и определяемая как сумма двух углов, образованных начальным несовершенством $\gamma_{\text{н}}$ и деформированием $\gamma_{\text{д}}$ контура сечения:

$$\gamma = \gamma_{\text{н}} + \gamma_{\text{д}}, \quad (13a)$$

где

$$\gamma_{\text{н}} R_0 = w'_{\text{н}} - v_{\text{н}}; \quad \gamma_{\text{д}} R_0 = w'_{\text{д}} - v_{\text{д}}. \quad (13б)$$

С учетом (11) выражения (13б) можно записать в более удобном виде:

$$\gamma_{\text{н}} R_0 = -v''_{\text{н}} - v_{\text{н}}; \quad \gamma_{\text{д}} R_0 = -v''_{\text{д}} - v_{\text{д}}. \quad (13в)$$

Из условия перпендикулярности ортов $\bar{t} \cdot \bar{n} = 0$ несложно получить

$$\bar{n} = \bar{n}_0 - \gamma \bar{t}_0. \quad (14)$$

Важной геометрической характеристикой сечения является ее кривизна. По определению из выражения (12) можно в первом приближении найти текущую кривизну контура сечения $\kappa = 1/R_1$:

$$\kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \left| \frac{\vec{t}_0}{R_0} \gamma - \frac{\vec{n}_0}{R_0} \left(1 - \frac{d\gamma}{d\varphi} \right) \right| \approx \frac{1 - \gamma'}{R_0}. \quad (15a)$$

После деформирования сечения его длина не изменяется, поэтому

$$ds = R_0 d\varphi = R_1 d\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{\kappa}. \quad (15b)$$

Здесь введены обозначения: $d\varphi_1$, R_1 – текущие значения прироста угла и радиуса кривизны соответственно.

1.2. *Геометрия гiba и деформации в осевом направлении.* Выделим элемент недеформированного гiba в осевом направлении двумя близкими сечениями $\theta_{01} = \text{const}$ и $\theta_{02} = \text{const}$. Тогда в зависимости от угла φ первоначальная ширина (по координате θ) каждого отрезка равна

$$S_{\text{н}}(\varphi) = (B_0 + Y_{\text{н}}(\varphi)) d\theta_0, \quad (16a)$$

где B_0 и $d\theta_0 = \theta_{02} - \theta_{01}$ – первоначальные радиус кривизны и элементарный угол гiba; B_0 представляет собой расстояние между точкой O (центр гiba) и условной точкой центра сечения гiba O_1 (рис. 1); $Y_{\text{н}}(\varphi)$ – расстояние по оси y между рассматриваемой точкой сечения гiba и точкой O_1 . Для удобства введем понятие ширины элемента $S_{\text{н}}^0$, соединяющего условные центры сечения гiba. Величина $S_{\text{н}}^0$ находится из (16a) при $Y = 0$:

$$S_{\text{н}}^0 = B_0 d\theta_0. \quad (16b)$$

Величина $Y_{\text{н}}(\varphi)$ вычисляется таким образом:

$$Y_{\text{н}} = R_0 \sin \varphi + w_{\text{н}} \vec{n}_0 \cdot \vec{j} + v_{\text{н}} \vec{t}_0 \cdot \vec{j} = R_0 \sin \varphi + w_{\text{н}} \sin \varphi + v_{\text{н}} \cos \varphi. \quad (17)$$

Для задачи Сен-Венана можно применить гипотезу плоских сечений. При нагружении гiba в его плоскости направление локальной оси y не изменяется. Тогда ширина каждого элементарного отрезка в деформированном состоянии $S_{\text{к}}(\varphi)$ равна

$$S_{\text{к}}(\varphi) = (B_1 + Y_{\text{к}}(\varphi)) d\theta_1. \quad (18)$$

Здесь введены две искомые неизвестные, характеризующие ширину элементов гiba после деформации, а именно: B_1 и $d\theta_1$ – радиус кривизны и элементарный угол гiba. Величина расстояния по оси y в деформированном состоянии $Y_{\text{к}}$ определяется так:

$$Y_{\kappa} = Y_{\text{н}} + \Delta Y, \quad (19a)$$

где

$$\Delta Y = w_{\text{д}} \sin \varphi + v_{\text{д}} \cos \varphi. \quad (19б)$$

Введем понятие прироста угла ψ , которое характеризует изменение угла θ , т.е. угловая координата центров сечений в процессе деформирования θ_1 представляется в виде $\theta_1 = \theta + \psi$. Тогда для прироста угла $d\theta_1$ можно записать следующее выражение:

$$d\theta_1 = d\theta_0 + \frac{d\psi}{dx} B_0 d\theta_0 = d\theta_0 \left(1 + \frac{d\psi}{dx} B_0 \right). \quad (20)$$

Аналогично можно представить выражение для изменившейся длины осевой линии S_{κ}^0 :

$$S_{\kappa}^0 = B_1 d\theta_1 = S_{\text{н}}^0 (1 + S'), \quad (21)$$

где $S' = du/dx$ – деформация осевой линии гiba; du – прирост длины осевой линии гiba.

Из (21) с учетом (18) и (20) несложно получить выражение для изменившегося радиуса кривизны гiba:

$$\frac{1}{B_1} = \frac{1}{1 + S'} \left(\frac{1}{B_0} + \frac{d\psi}{dx} \right). \quad (22)$$

Из уравнений (20) и (22) неизвестные B_1 и $d\theta_1$ выражаются через линейную S' и угловую $d\psi/dx$ деформации линии центров гiba.

Перейдем к нахождению осевой деформации $\varepsilon_{\theta}(\varphi)$ каждой точки сечения гiba. По определению она представляет собой изменение ширины в осевом направлении:

$$\varepsilon_{\theta}(\varphi) = \frac{S_{\kappa} - S_{\text{н}}}{S_{\text{н}}}. \quad (23)$$

Подставляя (16)–(22) в (23), окончательно записываем

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{1 + Y_{\text{н}}/B_0} \left(S' + \frac{Y_{\text{н}}}{R_0} \bar{\theta} + \frac{\Delta Y}{B_0} + \frac{\Delta Y}{R_0} \bar{\theta} \right). \quad (24)$$

Здесь для удобства введем обозначение для прироста угла $\bar{\theta} = \frac{d\psi}{dx} R_0$; подчеркнутый один раз член предопределяет отличие гiba от прямой трубы (в прямой трубе он равен нулю), подчеркнутый два раза член – геометрически линейную постановку от нелинейной.

Заметим, что при анализе деформации в осевом направлении фактически введены две дополнительные неизвестные: S' и θ . Прирост перемещений ΔY условно находится из рассмотрения задачи деформирования в плоскости сечения. Для этих двух неизвестных записываются два уравнения равновесия сил и моментов в осевом направлении.

1.3. *Условия нагружения, уравнения равновесия и физические уравнения.* Полагаем, что оболочка нагружена внутренним давлением P и глобальным изгибающим моментом, действующим в плоскости кривизны K_z . Перпендикулярно каждому сечению $\theta = \text{const}$ действует внутреннее распределенное усилие $N_x(\varphi)$ – рис. 3, которое уравновешивает глобальную осевую силу F_z , вызванную давлением и изгибающим моментом. Таким образом, имеем два указанных в п. 1.2 уравнения:

уравнение равенства осевых сил:

$$PF_1 = F_z = \int_0^{2\pi} N_x(\varphi)R_0 d\varphi, \quad (25)$$

где F_1 – площадь “в свету” деформированного сечения;
уравнение равенства моментов:

$$K_z = k_z \bar{\sigma} \pi R_0^2 h = \int_0^{2\pi} N_x R_0 Y_k d\varphi. \quad (26)$$

Здесь для удобства введем обозначения: $\bar{\sigma}$ – единичное напряжение; k_z – безразмерный коэффициент, характеризующий величину внешнего нагружения.

Элемент оболочки с возникающими внутренними силами и моментами для деформированного состояния приведен на рис. 3,а, где N_φ и Q_φ – внутренние продольная и поперечная силы в соответствующем направлении; M_φ – локальный изгибающий момент.

Прежде чем составить уравнения равновесия в плоскости сечения, укажем, что вектор продольной силы N_x имеет ненулевую проекцию в плоскости сечения по оси y , которая может быть разложена по направлениям \vec{t} и \vec{n} . Поскольку результирующий вектор от продольной силы N_x для элемента длины ds и ширины $S_k(\varphi)$ (рис. 3,б) в направлении оси y записывается как $N_x ds d\theta_1 \vec{j}$, то его проекция в направлении \vec{n} с учетом (14) и (2) равна

$$N_x ds d\theta_1 \vec{j} \vec{n} = -N_x ds d\theta_1 (\sin \varphi - \gamma \cos \varphi), \quad (27a)$$

в направлении \vec{t} с учетом (12) и (2) –

$$N_x ds d\theta_1 \vec{j} \vec{t} = -N_x ds d\theta_1 (\cos \varphi + \gamma \sin \varphi). \quad (27b)$$

Благодаря компонентам с множителем γ различаются постановки задач Бразье и Сен-Венана.

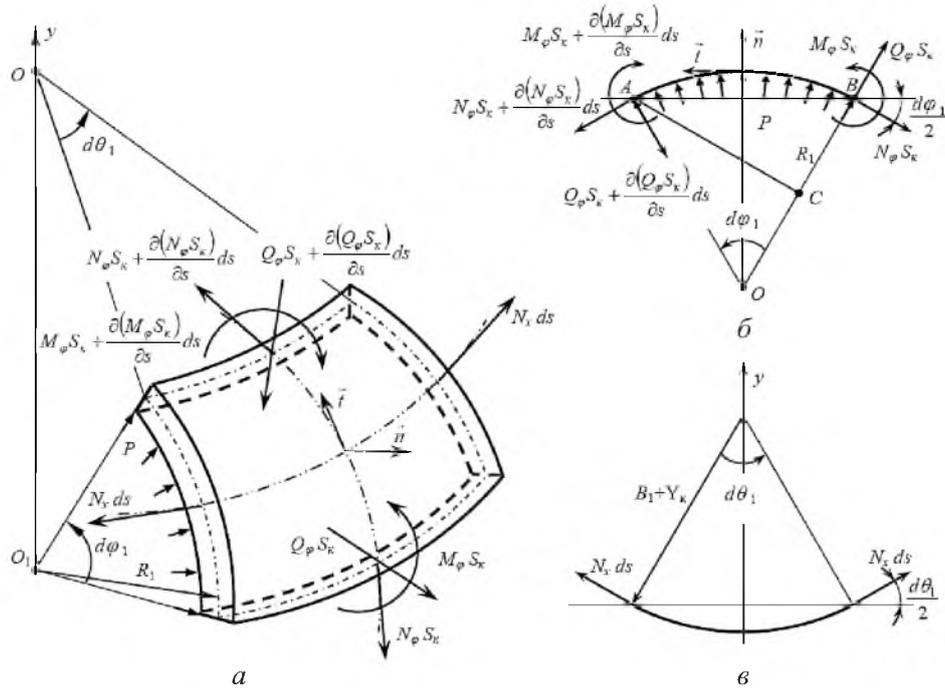


Рис. 3. Элемент тороидальной оболочки: а – положительное направление параметров; б – проекции сил и моментов на плоскость $\vec{t} \times \vec{n}$; в – направление силы N_x .

Таким образом, уравнения равновесия для каждого элемента (рис. 3) с учетом (15б) и (27) имеют вид

$$\frac{\partial(Q_\varphi \overline{B}_1)}{R_0 \partial \varphi} + \frac{N_\varphi \overline{B}_1}{R_1} + N_x (\sin \varphi - \gamma \cos \varphi) = P; \quad (28a)$$

$$\frac{Q_\varphi \overline{B}_1}{R_1} - \frac{\partial(N_\varphi \overline{B}_1)}{R_0 \partial \varphi} + N_x (\cos \varphi + \gamma \sin \varphi) = 0; \quad (28б)$$

$$Q_\varphi \overline{B}_1 = \frac{\partial(M_\varphi \overline{B}_1)}{R_0 \partial \varphi}. \quad (28в)$$

Здесь последовательно приведены уравнения: суммы проекций сил на текущие нормали \vec{n} , \vec{t} и сумма моментов относительно оси x , где $\overline{B}_1(\varphi) = B_1 + Y_1(\varphi)$ – радиус кривизны каждой точки поверхности в деформированном состоянии.

Внутренние силы и моменты связаны с деформациями с помощью физических уравнений:

$$N_\varphi = H(\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_\theta); \quad (29a)$$

$$N_x = H(\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_\varphi); \quad (29б)$$

$$M_\varphi = \frac{H\delta}{R_0} \frac{d\gamma_\perp}{d\varphi}, \quad (29\text{в})$$

где ε_φ – деформация срединной поверхности в окружном направлении;
 $H = \frac{Eh}{1-\mu^2}$; $\delta = \frac{h^2}{12}$; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона.

Из первых двух уравнений (29) удобно представить N_x в виде

$$N_x = Eh\varepsilon_\theta + \mu N_\varphi. \quad (29\text{г})$$

2. Идея решения задачи. Изложим некоторые упрощения, позволяющие получить замкнутые аналитические решения, сохраняющие все особенности поведения упругогогиба трубы при нагружении большим изгибающим моментом.

1. Условие малости начального и конечного α , т.е. предполагаем, что $R_0/B \rightarrow 0$. В частности, это позволяет использовать упрощенную запись уравнения (24):

$$\varepsilon_\theta = S' + \frac{Y_H}{R_0} \bar{\theta} + \frac{\Delta Y}{B_0} + \frac{\Delta Y}{R_0} \bar{\theta}. \quad (30)$$

2. Опыт решения задачи Кармана показывает, что связанные с оваллизацией (нагружение изгибающим моментом) значения N_φ имеют порядок $\alpha k_z \bar{\sigma} h/2$ [26, 27]. Поэтому они намного меньше, чем усилия N_x , которые согласно (26) сопоставимы с величиной $k_z \bar{\sigma} h$. В случае действия внутреннего давления P значения $N_\varphi \approx PR_0$. Поэтому физическое уравнение взаимосвязи между осевыми усилиями и деформациями (29г) будет иметь вид

$$N_x = Eh\varepsilon_\theta + \mu PR_0. \quad (31)$$

3. Поскольку перемещение гйба как балки не рассматривается, без потери общности полагаем, что перемещение точки O_1 равно нулю. С учетом симметрии нагружения и деформирования оболочки, гипотезы о малости α и условия Кармана (11) запишем общее выражение для исходных и искомых касательных и радиальных перемещений точек сечения оболочки:

$$v_d = R_0 \sum_{n=2,4,6,\dots} C_n^d \sin n\varphi; \quad w_d = -R_0 \sum_{n=2,4,6,\dots} n C_n^d \cos n\varphi; \quad (32\text{а})$$

$$v_H = R_0 \sum_{n=2,4,6,\dots} C_n^H \sin n\varphi; \quad w_H = -R_0 \sum_{n=2,4,6,\dots} n C_n^H \cos n\varphi. \quad (32\text{б})$$

Основная идея решения данной задачи, как и задачи Кармана, заключается в составлении и совместном решении двух уравнений. Первое уравнение устанавливает связь осевой силы N_x с начальными и деформационными

ми перемещениями (32) при нагружении изгибающим моментом, второе – составляется на основе анализа уравнений равновесия в плоскости сечения гiba.

Рассмотрим *первое* уравнение. Выражения (17) и (19) для Y_K и ΔY с учетом разложений (32) подставляются в (30), а затем в (31):

$$N_x = EhS' + \mu PR_0 + Eh\bar{\theta} \sin \varphi +$$

$$+ Eh \left(\sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{C_n^{\text{II}} R_0}{2B_0} \{ (n+1) \sin(n-1)\varphi - (n-1) \sin(n+1)\varphi \} + \right.$$

$$\left. + \bar{\theta} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{C_n^{\text{H}} + C_n^{\text{II}}}{2} \{ (n+1) \sin(n-1)\varphi - (n-1) \sin(n+1)\varphi \} \right). \quad (33a)$$

Выражение для N_x можно записать в более простом виде, который следует из (33a):

$$N_x / (Eh) = n_0 + n_1 \sin \varphi + n_3 \sin 3\varphi + n_5 \sin 5\varphi + \dots, \quad (33б)$$

где коэффициенты n_i являются безразмерными; свободный член легко определяется из уравнения равенства осевых сил (25).

Можно показать, что площадь сечения F_1 , которая находится как интеграл от $0,5R_1R_0d\varphi$, в результате деформирования изменяется незначительно. Это позволяет определить S' , которое характеризует удлинение гiba как стержня:

$$S' = \frac{PR_0}{2Eh} (1 - 2\mu) \Rightarrow n_0 = \frac{PR_0}{2hE}. \quad (34)$$

Отношение PR_0/h определяет уровень номинальных окружных напряжений от внутреннего давления. Очевидно, что эти напряжения для сталей намного меньше модуля Юнга E . Поэтому, полагая в уравнении (22) $S' \equiv 0$ и умножая его на R_0^2/h , получаем выражение для текущего значения параметра гибкости λ_1 :

$$\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda, \quad (35a)$$

где

$$\lambda_1 = R_0^2 / B_1 h; \quad \Delta\lambda = \bar{\theta} R_0 / h. \quad (35б)$$

Таким образом, величина $\bar{\theta}$ определяет прирост параметра гибкости $\Delta\lambda$. Остальным коэффициентам n_i путем сопоставления выражений (33a) и (33б) ставятся в соответствие искомые значения коэффициентов разложения перемещений C_{2i}^{II} , где i – целое число. В частности, запишем первые два выражения, которые для удобства умножим на R_0/h :

$$n_1 \frac{R_0}{h} = \Delta\lambda + \frac{3C_2^H \lambda_0}{2} + \Delta\lambda \frac{3C_2^H}{2} + \Delta\lambda \frac{3C_2^H}{2}; \quad (36a)$$

$$n_3 \frac{R_0}{h} = -\left(\frac{C_2^H \lambda_0}{2} - \frac{5C_4^H \lambda_0}{2}\right) - \left(\Delta\lambda \frac{C_2^H}{2} - \Delta\lambda \frac{5C_4^H}{2}\right) - \left(\Delta\lambda \frac{C_2^H}{2} - \Delta\lambda \frac{5C_4^H}{2}\right). \quad (36b)$$

Здесь и ниже подчеркнутые члены соответствуют геометрически нелинейной постановке.

Подставив выражения для N_x (33б) и перемещений (32) с учетом (19) в условие глобального равновесия (26), получим важное для дальнейшего анализа уравнение связи угловой деформации θ с изгибающим моментом K_z . Удерживая члены до второго порядка малости, имеем

$$M = \frac{k_z \bar{\sigma} R_0}{Eh} = \frac{R_0}{h} \left(n_1 \left(1 + \frac{3C_2^H}{2} \right) - n_3 \frac{C_2^H}{2} + n_1 \frac{3C_2^H}{2} - n_3 \frac{C_2^H}{2} \right), \quad (37)$$

где для удобства введено понятие безразмерного момента $M = \frac{K_z R_0}{EI_z} \frac{R_0}{h}$,

$I_z = \pi R_0^3 h$ – момент инерции сечения тонкостенной трубы.

Из (37) следует, что при геометрически линейной постановке для изначально круглого сечения имеем $M = n_1 R_0 / h$. Очевидно, что геометрическая нелинейность начинает проявляться, когда C_2^H сопоставимо по величине с единицей.

Вторым уравнением, которое связывает две основные функции v и N_x , т.е. безразмерные коэффициенты C_{2i}^H и n_i , является уравнение равновесия (28б), в котором выражение для N_φ уже определено из (28а). Поскольку в данном анализе принято, что $\alpha \rightarrow 0$, то второе уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{R_1}{R_0} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{R_0}{R_1} Q_\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[N_x \frac{R_1}{B_1} (\sin \varphi - \gamma \cos \varphi) \right] + \\ + N_x \frac{R_0}{B_1} (\cos \varphi + \gamma \sin \varphi) = P \frac{\partial R_1}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (38)$$

где Q_φ определяется из выражения (28в).

С учетом (15) для R_1 уравнение (38) записывается так:

$$\begin{aligned} \gamma_{д}^{IV} + \gamma_{д}'' - 3\bar{p}\gamma'' + 12(1 - \mu^2)\lambda_1 \frac{R_0}{Eh^2} \left(\frac{\partial N_x}{\partial \varphi} \sin \varphi + 2N_x \cos \varphi \right) + \\ + G(\lambda_1, n_i, C_{2i}) = 0, \end{aligned} \quad (39a)$$

где G – компонента, отвечающая геометрически нелинейной постановке,

$$\begin{aligned}
 G(\lambda_1, n_i, C_{2i}) = & \gamma''' \gamma'' - \gamma''^{\text{IV}} \gamma' - \gamma'' [3\gamma' - 3(\gamma')^2 + (\gamma')^3] + \\
 & + 12(1 - \mu^2) \lambda_1 \frac{R_0}{Eh^2} \left\{ N_x \gamma'' (\sin \varphi - \gamma \cos \varphi) - \frac{\partial N_x}{\partial \varphi} [\gamma \cos \varphi + \right. \\
 & \left. + \gamma' (\sin \varphi - \gamma \cos \varphi)] + N_x (2 - \gamma') [\gamma (1 - \gamma') \sin \varphi - 2\gamma' \cos \varphi] \right\}, \quad (396)
 \end{aligned}$$

\bar{p} – безразмерный коэффициент давления,

$$\bar{p} = \frac{4(1 - \mu^2) P R_0^3}{E h^3}. \quad (40)$$

Можно показать, что нелинейная компонента G представляется рядом по четным гармоникам синуса:

$$G(\lambda_1, n_i, C_{2i}) = \sum_{i=1,2,3} g_{2i} \sin 2i\varphi. \quad (41)$$

При дальнейшем анализе в (39) подставляем выражения для γ (13) и N_x (33б). Путем сопоставления коэффициентов при одинаковых функциях $\sin 2i\varphi$ получаем дополнительно к (36) еще одну систему уравнений, связывающую n_i с коэффициентами C_{2i}^{II} . В частности, ограничиваясь значениями $i = 1, 2$, получаем следующие два уравнения:

$$6C_2^{\text{II}} + 6\bar{p}C_2 + \frac{A R_0}{\lambda_1 h} (3n_1 - n_3) + \frac{1}{6}g_2 = 0; \quad (42a)$$

$$600C_4^{\text{II}} + 120\bar{p}C_4 + 5\frac{A R_0}{\lambda_1 h} n_3 + \frac{1}{6}g_4 = 0, \quad (42б)$$

где коэффициенты $C_{2i} = C_{2i}^{\text{II}} + C_{2i}^{\text{H}}$; выражения для коэффициентов g_2 и g_4 до третьего порядка малости имеют вид

$$\begin{aligned}
 g_2 = & 324C_2^{\text{II}}(10C_4 - C_2^2) - 2160(7C_4^{\text{II}}C_2 + 30C_2^{\text{II}}C_4^2) + \\
 & + \frac{A R_0}{\lambda_1 h} (-54n_1C_2 - 117n_3C_2 + 1485n_1C_4 - 585n_3C_4); \quad (43a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_4 = & 108C_2^{\text{II}}C_2 - 12960C_4^{\text{II}}(C_2^2 + 5C_4^2) + \\
 & + \frac{A R_0}{\lambda_1 h} (-81n_1C_2 - 63n_3C_2 - 1350n_1C_4); \quad (43б)
 \end{aligned}$$

A – безразмерный коэффициент,

$$A = \lambda_1^2(1 - \mu^2). \quad (44)$$

Рассмотрим несколько вариантов решения данных задач в зависимости от параметров нагружения и геометрии. Заметим, что порядок приближения и его точность в основном определяются упрощениями, принимаемыми при решении уравнения (39).

3. Решение.

3.1. *Задача Бразье.* Суть классической задачи Бразье состоит в установлении связи между $\bar{\theta}$ ($\Delta\lambda$) и изгибающим моментом K_z ($k_z\bar{\sigma}$). Основные разрешающие уравнения (36) и (42) с учетом (43) образуют нелинейную систему уравнений относительно коэффициентов $C_{2i}^{\text{д}}$. Структура этих уравнений такова, что решение может быть легко получено итерационным путем для любого приближения. Покажем это на примере первого приближения, когда неизвестными являются коэффициенты n_1 , n_3 и $C_2^{\text{д}}$. Опыт решения статической задачи Сен-Венана [26] показал, что первое приближение есть достаточным при значениях $\lambda \leq 2$.

Пренебрегая в (36) и (42) коэффициентом $C_4^{\text{д}}$, после подстановки (45) в (42а) нетрудно получить выражение для коэффициента $C_2^{\text{д}}$:

$$C_2^{\text{д}} = - \frac{A \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} (3 + 5C_2^{\text{н}}) + 6\bar{p}C_2^{\text{н}} + \frac{g_2}{6}}{6(1 + \bar{p}) + 5A}. \quad (45)$$

Это выражение не является окончательным, поскольку в него входит нелинейный коэффициент g_2 (43а), который не определен. Конечное значение коэффициента $C_2^{\text{д}}$ может быть получено с помощью итерационной процедуры, когда на первом шаге принимается $g_2 = 0$, а коэффициенты $C_2^{\text{д}}$ определяются по (45), n_1 и n_3 – по (36). Далее рассчитывается значение коэффициента g_2 по (43а) и уточняются коэффициенты $C_2^{\text{д}}$, n_1 , n_3 .

Отметим, что если пренебречь коэффициентом g_2 в (45), то для изначально прямой трубы с идеально круглым сечением ($B_0 = \infty \Rightarrow \lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \Delta\lambda$ и $C_{2i}^{\text{н}} \equiv 0$, откуда следует, что $C_{2i} = C_{2i}^{\text{д}}$) получим очень простые выражения для трех неизвестных коэффициентов – $C_2^{\text{д}}$, n_1 , n_3 :

$$C_2^{\text{д}} = - \frac{6\bar{A}}{12 + 10\bar{A}}; \quad n_1 \frac{R_0}{h} = \frac{(12 + \bar{A})\lambda_1}{12 + 10\bar{A}}; \quad n_3 \frac{R_0}{h} = \frac{3\bar{A}\lambda_1}{12 + 10\bar{A}}, \quad (46)$$

где \bar{A} – безразмерный коэффициент,

$$\bar{A} = \frac{A}{1 + \bar{p}}. \quad (47)$$

Выражение для безразмерного изгибающего момента получаем из (37) в виде

$$M = \lambda_1 \left[1 - \frac{9\bar{A}}{6 + 5\bar{A}} + \frac{45\bar{A}^2}{2(6 + 5\bar{A})^2} \right]. \quad (48)$$

Выражение (48) совпадает с так называемым модифицированным решением Бразье, полученным для изначально прямой трубы (такое решение приведено, например, в [18]), за исключением того, что в (48) в коэффициент A входит множитель $1 - \mu^2$.

Более точное аналитическое решение может быть получено с достаточной инженерной точностью, если упростить выражение g_2 (43а). Его анализ показывает, что наибольшее влияние на решение оказывает слагаемое $n_1 C_2$, которое имеет наименьший порядок малости. Учитывая в n_1 (36а) только максимальный член, получаем

$$g_2 = -54 \frac{A}{\lambda_1} \Delta \lambda C_2. \quad (49)$$

Тогда выражение для C_2^d (45) можно записать в виде

$$C_2^d = - \frac{A \frac{\Delta \lambda}{\lambda_1} (3 - 4C_2^h) + 6\bar{p} C_2^h}{6(1 + \bar{p}) + 5A - 9A \frac{\Delta \lambda}{\lambda_1}}. \quad (50)$$

Выражение для изгибающего момента определяется согласно (37), и при $\lambda_0 = 0$, $C_2^h = 0$ получим

$$M = \lambda_1 \left[1 - \frac{9\bar{A}}{6 - 4\bar{A}} + \frac{45\bar{A}^2}{2(6 - 4\bar{A})^2} \right]. \quad (51)$$

Сопоставим результаты, полученные по выражениям (48) и (51), с приведенными в литературных источниках. В представленных ниже примерах положим, что давление $\bar{p} = 0$.

На рис. 4 показано изменение значений безразмерного изгибающего момента в зависимости от прироста параметра гибкости $\Delta \lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ для идеально круглой прямой трубы, т.е. при $\lambda_0 = 0$. Видно, что результаты, полученные на основе уточненного решения (51) в первом приближении, хорошо согласуются с известными данными [17]. Модифицированное решение Бразье (48) дает завышенное значение критического изгибающего момента.

В табл. 1 представлены значения критического изгибающего момента $M_{кр}$ для труб с начальной кривизной оси. Между данными, приведенными

в [17, 32] и полученными с помощью уточненного решения для C_2^D (50), наблюдается хорошее соответствие. Как и следовало ожидать, с увеличением гибкости значения $M_{кр}$ уменьшаются.

Т а б л и ц а 1

Значения критического изгибающего момента $M_{кр}$ для трубы с начальной кривизной оси

λ_0	$M_{кр}$		
	Полученные результаты	Литературный источник	
		[32]	[17]
0	0,322	–	0,321
0,1	0,282	0,281	0,285
0,2	0,247	0,254	0,254
0,5	0,167	0,191	0,190

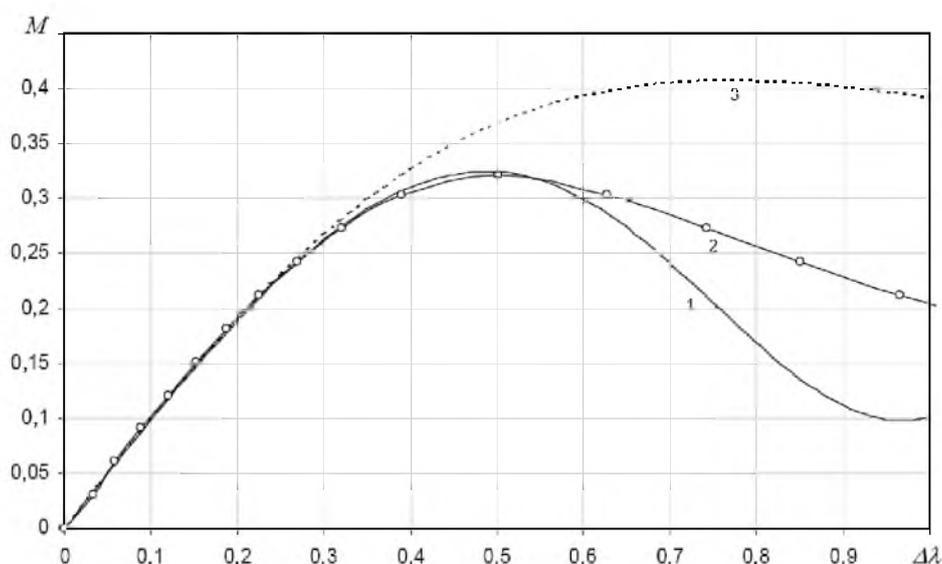


Рис. 4. Изменение безразмерного изгибающего момента в зависимости от кривизны трубы при $\lambda_0 = 0$: 1 – уточненное решение (51); 2 – данные [17]; 3 – модифицированное решение Бразье (48).

Оценим влияние коэффициента C_2^H на критический изгибающий момент. Рис. 5 иллюстрирует зависимость нормированного критического изгибающего момента $m = M_{кр} / \bar{M}_{кр}$ от C_2^H при $\lambda_0 = 0$, где $\bar{M}_{кр}$ – значение критического безразмерного изгибающего момента при $C_2^H = 0$ и $\bar{p} = 0$. График получен на основе уточненного решения для C_2^D (50), для которого $\bar{M}_{кр} = 0,322$. Очевидно, что при положительных значениях C_2^H потеря устойчивости происходит при больших величинах критического момента. Это

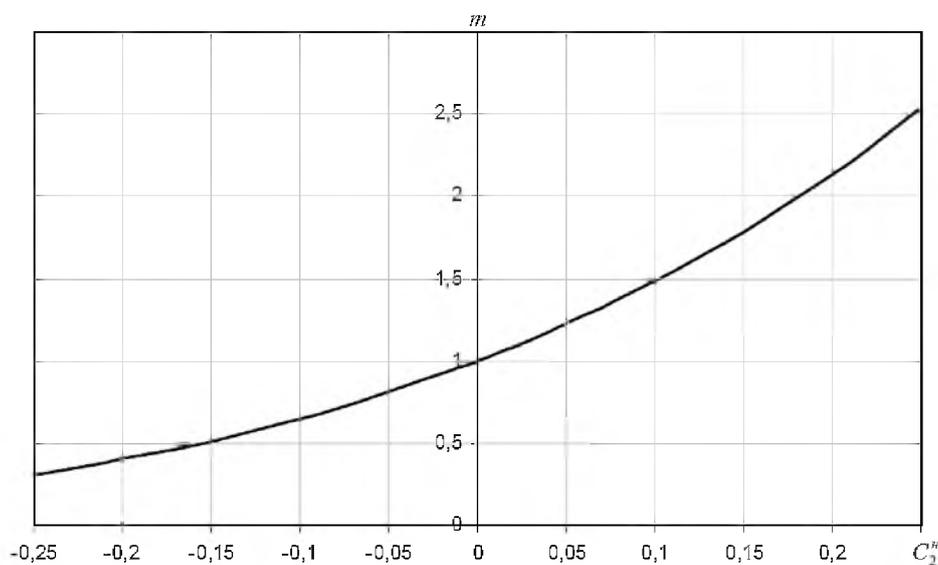
связано с тем, что с увеличением C_2^H растет момент инерции в направлении действия изгибающего момента, что повышает жесткость сечения.

В табл. 2 представлены рассчитанные на основе уточненного решения значения критического изгибающего момента $M_{кр}$ для труб с начальной кривизной оси λ_0 при разных C_2^H . Как следовало ожидать, с увеличением начальной кривизны значения критического момента уменьшаются.

Т а б л и ц а 2

Значения критического изгибающего момента $M_{кр}$ для трубы с начальной кривизной оси при разных значениях C_2^H

λ_0	$M_{кр}$ при C_2^H , равном				
	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2
0	0,129	0,209	0,322	0,478	0,688
0,1	0,108	0,179	0,282	0,427	0,625
0,2	0,090	0,153	0,247	0,382	0,569
0,5	0,049	0,093	0,167	0,279	0,445

Рис. 5. Приведенный момент m в зависимости от начальной кривизны C_2^H при $\lambda_0 = 0$.

3.2. Анализ потери устойчивости трубы при внешнем давлении. Вопросы закритического поведения трубы посвящено недостаточно исследований. В основном рассматриваются линеаризованные уравнения относительно внешнего давления и определяется область существования решения (так называемый бифуркационный подход). Полученные выше решения (см. напр., уравнения (46)–(48)) также имеют бифуркационный характер. Из них следует известное решение Бергхофа–Грасса [33] о внешнем давлении, при

котором происходит потеря устойчивости трубы, т.е. при $\bar{p} = -1$. Недостатки бифуркационных решений известны: они дают некоторую условную точку, но не описывают, что в ней происходит. Задача Бразье предусматривает описание решения для закритического поведения трубы, в то время как бифуркационное решение – докритического ее поведения. Объединение таких двух подходов в одном решении, как это обычно делается [13, 34], по-видимому, неправомерно.

Полученные уравнения (42) позволяют проанализировать закритическое поведение оболочки при потере устойчивости от действия внешнего давления. При этом следует принять, что коэффициенты n_1, n_3 , отвечающие за уравнивание внешнего изгибающего момента, равны нулю. Отметим, что для решения данной задачи недостаточно проанализировать одно уравнение (42а). Необходимо учитывать также коэффициент $C_4^{\bar{p}}$. Для изначально прямой трубы с идеально круглым сечением из (42) и (43) получим

$$C_2^{\bar{p}}(1 + \bar{p}) - 330C_2^{\bar{p}}C_4^{\bar{p}} - 9(C_2^{\bar{p}})^3 = 0; \quad (52a)$$

$$C_4^{\bar{p}} = -\frac{3(C_2^{\bar{p}})^2}{20(5 + \bar{p})}. \quad (52b)$$

Тогда запишем

$$C_2^{\bar{p}} = \sqrt{-\frac{2(1 + \bar{p})(5 + \bar{p})}{9(1 - 2\bar{p})}}; \quad C_4^{\bar{p}} = \frac{1 + \bar{p}}{30(1 - 2\bar{p})}. \quad (53)$$

Сопоставим полученное решение с приведенными в [29, 35]. На рис. 6 приведена зависимость радиального перемещения $w^{\bar{p}}$ от внешнего безразмерного давления q в зоне $\bar{p} \leq -1$. График построен в нормированных координатах $w^{\bar{p}}/R_0$ и $q = \bar{p}/\bar{p}_{кр}$, где $\bar{p}_{кр} = -1$. Видно, что предложенное аналитическое решение уже в первом приближении лучше согласуется с численными результатами [29], чем решение [35].

3.3. Совместное нагружение внешним изгибающим моментом и давлением. Объединим подходы, описанные в пп. 3.1 и 3.2, для анализа задачи Бразье с учетом внешнего давления.

Полная процедура решения подобна описанной в п.3.1, за исключением дополнительного учета коэффициента $C_4^{\bar{p}}$ (52б), необходимого для описания закритического поведения при внешнем давлении. С учетом коэффициента $C_4^{\bar{p}}$ выражение для нелинейного члена g_2 (43а), входящего в (42а), запишем в виде

$$g_2 = 324C_2^{\bar{p}}(10C_4^{\bar{p}} - C_2^{\bar{p}}) - 15120C_4^{\bar{p}}C_2^{\bar{p}} - 54\frac{A}{\lambda_1}\Delta\lambda C_2^{\bar{p}}. \quad (54)$$

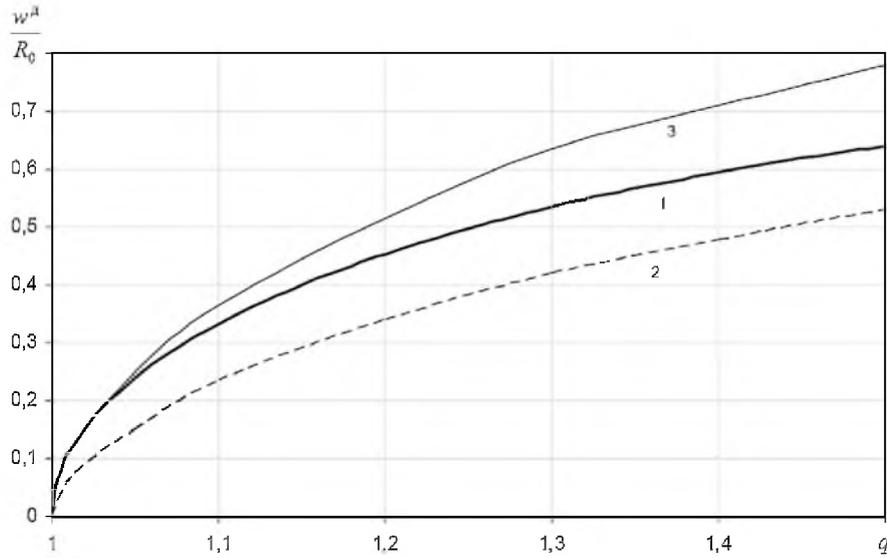


Рис. 6. Зависимость перемещения точек поперечного сечения от внешнего безразмерного давления: 1 – наши результаты; 2 – данные [29]; 3 – данные [35].

Тогда из (42а) для C_2^D получим следующее выражение:

$$C_2^D = - \frac{A \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} (3 - 4C_2^H) + 6C_2^H \bar{p}}{6(1 + \bar{p}) + 5A - 9A \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} + g_2}, \quad (55a)$$

где

$$g_2 = - \frac{81C_2^D(C_2^H + C_2^D) + [54(5 + \bar{p}) - 378](C_2^H + C_2^D)^2}{5 + \bar{p}}. \quad (55b)$$

Для определения значения C_2^D (55а) можно использовать итерационную процедуру, как и для решения выражения (45).

Однако прежде, чем перейти к решению уравнений (55), рассмотрим, насколько изменится решение задачи Бразье при отсутствии внутреннего давления с использованием уточненного значения g_2 по уравнению (55). Анализ уравнения (37) с учетом (55) показывает, что для идеально круглой прямой трубы при расчете по (45) и (55а) значения $C_2^D = 0,322$ и $0,324$ соответственно. Разница между полученными значениями незначительна, и та часть выражения (55б), которая ответственна за учет внешнего давления, слабо влияет на критический момент в задаче Бразье.

Построим зависимость критического изгибающего момента от давления в нормированных координатах m и q (рис. 7). График представляет собой предельную кривую 1, характеризующую комбинацию нагружения, приводящего к потере устойчивости. Для точек, которые лежат в плоскости, ограниченной этой кривой, уровень нагружения по моменту и давлению не

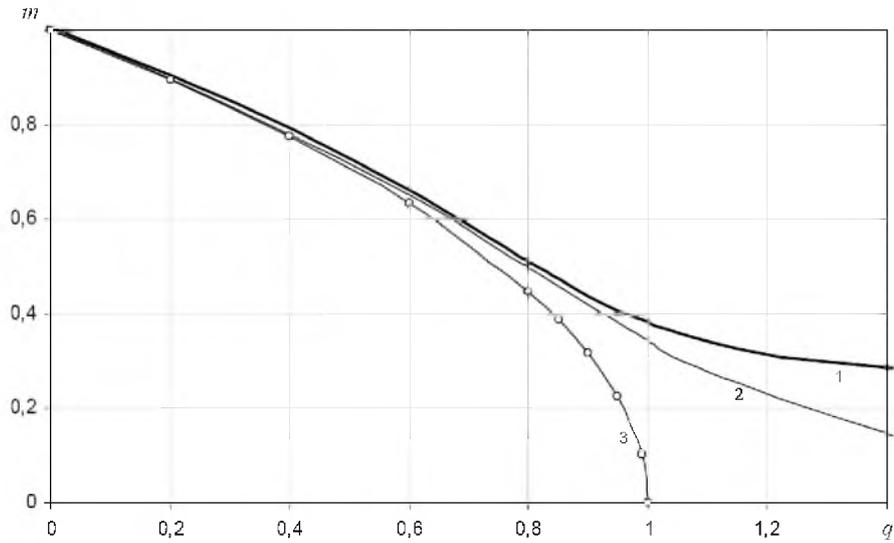


Рис. 7. Предельные кривые при совместном действии изгибающего момента и давления для прямой трубы: 1 – наши результаты; 2 – данные [29]; 3 – данные [34].

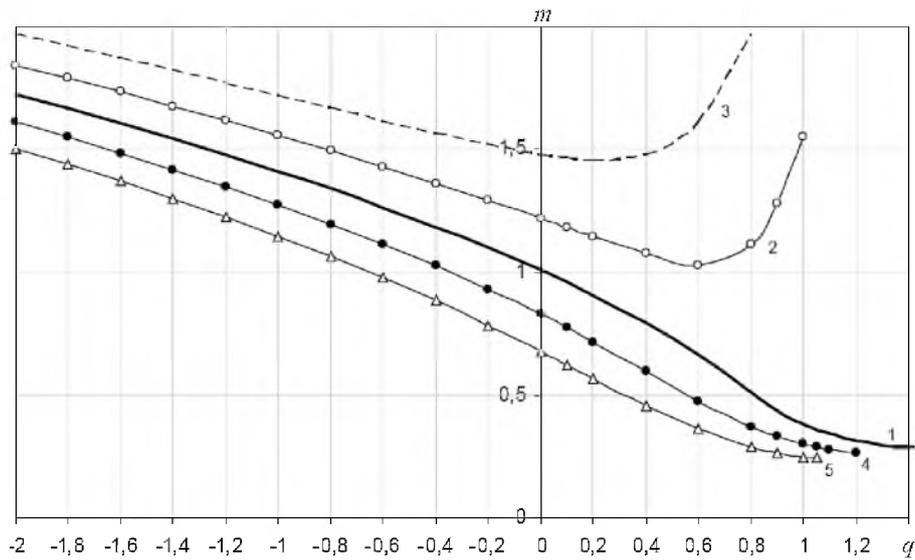


Рис. 8. Предельные кривые при совместном действии изгибающего момента и давления для прямой трубы при разных значениях C_2^H : 1 – $C_2^H = 0$; 2 – $C_2^H = 0,05$; 3 – $C_2^H = 0,1$; 4 – $C_2^H = -0,05$; 5 – $C_2^H = -0,1$.

соответствует потере устойчивости. Точкам над кривой соответствует такая комбинация нагрузок, при которых потеря устойчивости трубы неизбежна.

На рис. 7 показаны также зависимости, полученные численным решением [29] и по данным, которые впервые приведены в [34], а затем в [13], описываемым такой зависимостью:

$$m^2 + q = 1. \quad (56)$$

В области $q \leq 0$ (внутреннее давление) все графики практически совпадают, поэтому на рис. 7 они приведены для области $q \geq 0$. Отметим, что зависимость, тождественная (56), получена из решений, представленных в п. 3.1. Из рис. 7 видно, что характер аналитического решения приближается к численному [29]. Однако при $\bar{p} \leq -1$ точность решения ухудшается, хотя в самой точке $\bar{p} = -1$ наблюдается хорошее соответствие между точным численным и настоящим приближенным аналитическим решениями.

На рис. 8 приведены графики, полученные для разных значений C_2^H . При $C_2^H > 0$, начиная с некоторого значения внешнего давления, наблюдается подкрепляющий эффект. Это связано с тем, что внешнее давление при отсутствии изгибающего момента увеличивает суммарное значение $C_2 = C_2^H + C_2^D$.

Заключение. Получил развитие предложенный ранее авторами аналитический подход к решению задачи Сен-Венана для кривой трубы и анализируются геометрически нелинейные эффекты, связанные с учетом увеличения овализации сечения трубы при деформировании. Впервые в аналитической постановке учитываются все возможные геометрические (начальная кривизна оси и формы поперечного сечения) и силовые (внешний изгибающий момент, внутреннее и внешнее давление) факторы. Кроме того, внешнее давление учитывается при описании закритического поведения, что позволило увеличить область докритического состояния трубы.

В рамках последовательного усложнения задачи удалось определить минимально необходимый уровень сложности, позволяющий адекватно описать все известные явления и приближенные решения, связанные с задачей Бразье. Эффективность метода проиллюстрирована на примерах. Получено удовлетворительное согласование настоящих данных с приведенными в литературных источниках.

Резюме

Запропоновано аналітичний метод розв'язку геометрично нелінійної задачі Бразье для тонкостінних труб із початковою недосконалістю форми поперечного перерізу за дії тиску. Отримано геометричні рівняння, що зв'язують компоненти переміщень із деформаціями, та рівняння рівноваги, які враховують зміну кривизни перерізу труби й її осі. Наведено розв'язок у першому наближенні за безрозмірним параметром гнучкості, точність якого проілюстровано на великій кількості прикладів. Для випадку спільної дії зовнішнього згинального моменту й тиску отримано граничну криву критичного значення моменту в залежності від величини тиску.

1. ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
2. ASME Boiler and Pressure Vessel Code. – New York, 2004.
3. API 579. Recommended Practice Fitness-for-Service, First Edition. – American Petroleum Institute, January 2000.

4. Орыняк И. В., Богдан А. В., Бородий М. В. и др. Использование категоризации напряжений и деформационных критериев при оценке прочности магистральных трубопроводов // Экотехнологии и ресурсосбережение. – 2007. – № 4. – С. 12 – 23.
5. Karman Th. Über die Formänderung dünnwandiger Röhre, insbesondere federnder Ausgleichröhre // Z. Ver. Ing. – 1911. – **55**. – P. 1889 – 1895.
6. Beskin L. Bending of curved thin tubes // J. Appl. Mech. – 1945. – **12**, No. 1. – P. 1 – 7.
7. Clark R. A. and Reissner E. Bending of curved tubes // Adv. Appl. Mech. – 1951. – **2**. – P. 93 – 122.
8. Cross N. Experiments on short-radius pipe-bends: Proc. Inst. Mech. Eng. – 1952-1953. – **1B**, No. 10. – P. 465 – 479.
9. Timoshenko S. P. Bending stresses in curved tubes of rectangular cross-section // Trans. ASME. – 1923. – **45**. – P. 135 – 140.
10. Феодосьев В. И. Упругие элементы точного приборостроения. – М.: Оборонгиз, 1949. – 341 с.
11. Clark R., Gilroy T., and Reissner E. Stresses and deformations of toroidal shells of elliptical cross sections // J. Appl. Mech. – 1952. – **19**. – P. 37 – 48.
12. Костовецкий Д. Л. Прочность трубопроводных систем энергетических установок. – Л.: Энергия, 1973. – 264 с.
13. Аксельрад Э. Л. Гибкие оболочки. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
14. Аксельрад Э. Л., Ильин В. П. Расчет трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
15. Whatham J. F. Analysis of pipe bends with symmetrical noncircular cross sections // J. Appl. Mech. – 1987. – **54**. – P. 604 – 610.
16. Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other thin sections // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1927. – **116**, No. 773. – P. 104 – 114.
17. Kuznetsov V. V. and Levyakov S. V. Nonlinear pure bending of toroidal shells of arbitrary cross section // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**. – P. 7343 – 7354.
18. Karamanos S. A. Bending instabilities of elastic tubes // Ibid. – 2002. – **39**. – P. 2059 – 2085.
19. Reissner E. On finite bending of pressurized tubes // J. Appl. Mech. – 1959. – **26**. – P. 386 – 392.
20. Chwalla E. Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Röhre mit gerader Achse // ZAMM. – 1933. – **13**. – P. 48 – 53.
21. Konovalov Yu. V. Bending of an infinite cylindrical shell // Prikl. Mat. Mekh. – 1940. – **4**. – P. 35 – 54.
22. Папкович П. Ф. Труды по строительной механике корабля. – Л.: Судпромгиз, 1962.
23. Kafka P. G. and Dunn M. B. Stiffness of curved tubes with internal pressure // J. Appl. Mech. – 1956. – **23**, No. 2. – P. 247 – 254.

24. *Rodabaugh E. and George H.* Effect of internal pressure on flexibility and stress-intensification factors of curved pipe or welding-elbows // *Trans. ASME.* – 1957. – **79**. – P. 939 – 948.
25. *Lubis A. and Boyle J. T.* The pressure reduction effect in smooth piping elbows: revisited // *Int. J. Press. Vess. Piping.* – 2004. – **81**, No. 2. – P. 119 – 125.
26. *Орыняк И. В., Радченко С. А.* Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // *Пробл. прочности.* – 2004. – № 3. – С. 23 – 51.
27. *Орыняк И. В., Радченко С. А.* Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 2. Пространственный изгиб с учетом внутреннего давления // *Там же.* – № 4. – С. 46 – 59.
28. *Орыняк И. В., Радченко С. А.* Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 3. Расчет перемещений осигиба методом начальных параметров // *Там же.* – № 5. – С. 23 – 35.
29. *Орыняк И., Богдан А.* Числова процедура розрахунку геометрично нелінійної задачі Сен-Венана для пружної замкнутої оболонки з круговою віссю // *Машинознавство.* – 2006. – № 7. – С. 23 – 32.
30. *Guarracino F.* On the analysis of cylindrical tubes under flexure: theoretical formulations, experimental data and finite element analysis // *Thin-Walled Struct.* – 2003. – **41**. – P. 127 – 147.
31. *Orynyak I. V. and Radchenko S. A.* Analytical and numerical solution for a elastic pipe bend at in-plane bending with consideration for the end effect // *Int. J. Solids Struct.* – 2007. – **44**. – P. 1488 – 1510.
32. *Boyle J. T.* The finite bending of curved tubes // *Ibid.* – 1981. – **17**. – P. 515 – 529.
33. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
34. *Wood J. D.* The flexure of a uniformly pressurized, circular, cylindrical shell // *Trans. ASME.* – 1958. – **25**. – P. 453 – 458.
35. *Кириакидес К. П., Бэбкок Ч. Д.* Явление распространения вмятин в трубопроводах. Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханта; Пер. с англ. под ред Э. И. Григолюка. – М.: Наука, 1991. – 424 с.

Поступила 15. 02. 2007