

Ползучесть повреждающихся пластин в условиях плоского напряженного состояния

С. Н. Склепус

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

Рассмотрена ползучесть повреждающихся пластин под действием силовых нагрузок в плоскости. Метод решения начально-краевой задачи ползучести базируется на совместном применении методов R-функций, Рунге и Рунге-Кутты-Мерсона. Получены структуры решения для основных типов граничных условий. Исследовано влияние разнсопротивляемости и поврежденности материала на ползучесть и длительную прочность пластины с круговым отверстием.

Ключевые слова: ползучесть, повреждаемость, разнсопротивляемость, структура решения.

При использовании в современной технике легких сплавов, порошковых материалов, пластмасс, полимеров, керамики, композитных материалов различной структуры необходимо решить задачу создания новых адекватных математических моделей деформирования материалов и методов расчета конструкций. Для деформирования таких материалов в условиях высокотемпературной ползучести характерны: неодинаковое поведение при растяжении и сжатии; независимый закон деформирования при чистом кручении; влияние гидростатического давления на ползучесть; зависимость накапливаемой в процессе ползучести повреждаемости от вида нагружения; анизотропия, связанная с упрочнением и повреждаемостью; эффект Пойнтинга и др. [1–7].

Элементы конструкций в виде тонких пластин могут иметь отверстия, вырезы различной формы, а также сложные условия закрепления. В пластинах могут возникать местные напряжения, которые оказывают решающее влияние на длительную прочность конструкции. Исследование ползучести и длительной прочности повреждающихся пластин неканонической геометрической формы представляет собой сложную математическую задачу, для решения которой необходимо создать эффективные методы расчета.

Настоящая работа посвящена разработке метода решения физически нелинейной задачи ползучести для повреждающихся пластин сложной геометрической формы, а также изучению влияния вида нагружения на ползучесть и длительную прочность. Предлагаемый метод основан на совместном применении вариационно-структурного метода [8, 9] для решения краевых задач и процедуры Рунге-Кутты-Мерсона для интегрирования задачи по времени.

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат Ox_1x_2 изотропную тонкую пластину, имеющую постоянную толщину и произвольную форму Ω . Температура испытания постоянная. Пластина нагружена контурными нормальными $P_n^{(0)}(x_1, x_2, t)$ и касательными $P_\tau^{(0)}(x_1, x_2, t)$ усилиями, где n, τ соответствуют внешней нормали и касательной к контуру $\partial\Omega$; t – время.

Задача ползучести для пластины произвольной формы в момент времени $t \neq 0$ может быть сведена к вариационной задаче нахождения минимума функционала в форме Лагранжа [10]:

$$\begin{aligned} \Lambda(\dot{u}_1, \dot{u}_2) = & \\ = 0,5 \iint_{\Omega} \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{u}_{1,1}^2 + \dot{u}_{2,2}^2 + 2\nu\dot{u}_{1,1}\dot{u}_{2,2} + 0,5(1-\nu)(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})^2) dx_1 dx_2 - & \\ - \iint_{\Omega} (\dot{N}_{11}^c \dot{u}_{1,1} + \dot{N}_{22}^c \dot{u}_{2,2} + \dot{N}_{12}^c (\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1})) dx_1 dx_2 - & \\ - \int_{\partial\Omega} [\dot{P}_n^{(0)} (\dot{u}_1 n_1 + \dot{u}_2 n_2) + \dot{P}_\tau^{(0)} (\dot{u}_2 n_1 - \dot{u}_1 n_2)] dS, & \quad (1) \end{aligned}$$

где \dot{u}_1, \dot{u}_2 – кинематически возможные скорости перемещений вдоль осей Ox_1, Ox_2 соответственно; n_1, n_2 – направляющие косинусы нормали n к контуру $\partial\Omega$; $\dot{N}_{11}^c = \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{11} + \nu\dot{p}_{22})$, $\dot{N}_{22}^c = \frac{E}{1-\nu^2} (\dot{p}_{22} + \nu\dot{p}_{11})$, $\dot{N}_{12}^c = 2G\dot{p}_{12}$ – “фиктивные” нагрузки, обусловленные ползучестью; E, G, ν – соответственно модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала.

В функционале (1) компоненты тензора скоростей деформаций ползучести \dot{p}_{ij} полагаются заданными и не варьируются. Точка над символами обозначает полную производную по времени.

Из вариационного уравнения $\delta\Lambda = 0$ следуют уравнения равновесия и статические граничные условия, записанные для скоростей перемещений.

Рассмотрим основные задачи ползучести и соответствующие им типы граничных условий, которые учитывают различные способы нагружения и закрепления пластины.

1. Для первой основной задачи на контуре пластины $\partial\Omega$ заданы скорости нормальных и касательных напряжений:

$$\dot{\sigma}_n = \dot{P}_n^{(0)} + \dot{P}_n^c, \quad \dot{\tau}_n = \dot{P}_\tau^{(0)} + \dot{P}_\tau^c.$$

Выразим эти условия через скорости перемещений:

$$\begin{aligned} A_1(\dot{u}_{1,n}n_1 + \dot{u}_{2,n}n_2) + A_2(\dot{u}_{2,\tau}n_1 - \dot{u}_{1,\tau}n_2) &= \dot{P}_n^{(0)} + \dot{P}_n^c; \\ G(-\dot{u}_{1,n}n_2 + \dot{u}_{2,n}n_1 + \dot{u}_{1,\tau}n_1 + \dot{u}_{2,\tau}n_2) &= \dot{P}_\tau^{(0)} + \dot{P}_\tau^c, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{P}_n^c &= \dot{N}_{11}^c n_1^2 + 2\dot{N}_{12}^c n_1 n_2 + \dot{N}_{22}^c n_2^2; \\ \dot{P}_\tau^c &= (\dot{N}_{22}^c - \dot{N}_{11}^c) n_1 n_2 + \dot{N}_{12}^c (n_1^2 - n_2^2); \end{aligned}$$

$$\dot{u}_{i,n} = \dot{u}_{i,1}n_1 + \dot{u}_{i,2}n_2; \quad \dot{u}_{i,\tau} = \dot{u}_{i,2}n_1 - \dot{u}_{i,1}n_2;$$

$$A_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad A_2 = \nu A_1.$$

Условия (2) являются естественными для функционала (1).

2. Для второй основной задачи на границе заданы скорости перемещений:

$$\dot{u}_i = \dot{f}_i^{(0)} \quad (i=1, 2). \quad (3)$$

3. Для смешанной задачи на части $\partial\Omega_1$ границы $\partial\Omega$ заданы условия (3), на части $\partial\Omega_2$ – условия (2).

Для деформаций ползучести будем использовать определяющие соотношения [11], которые описывают различное поведение материала и разное развитие повреждаемости при растяжении, сжатии и кручении, сжимаемость материала при ползучести, а также анизотропию, обусловленную повреждаемостью:

$$\dot{p}_{kl} = \sigma_e^m \psi^{-\beta} \left(\frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q \left(\frac{C\sigma_{kl} + AI_1\delta_{kl}}{\sigma_2} + B e_k e_l \right) \quad (k, l=1, 2). \quad (4)$$

Здесь ψ – структурный параметр, описывающий упрочнение и повреждаемость материала; δ_{kl} – символ Кронекера; σ_e – эквивалентное напряжение, $\sigma_e = \sigma_2 + B\sigma_{kl}e_k e_l$, где $\sigma_2^2 = AI_1^2 + CI_2$; $I_1 = \sigma_{kl}\delta_{kl}$; $I_2 = \sigma_{kl}\sigma_{lk}$; $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ – единичный вектор, характеризующий ориентацию плоских микротрещин и направленный перпендикулярно к плоскости микротрещины; A, B, C – постоянные материала.

Полагаем, что микротрещины в материале ориентируются перпендикулярно к направлению действия максимального главного напряжения. В этом случае постоянные параметры A, B, C находятся по формулам [11]

$$B = K_+^{1/(m+1)} = K_-^{1/(m+1)}; \quad \sqrt{2C} = K_0^{1/(m+1)} - B; \quad A = K_-^{2/(m+1)} - C, \quad (5)$$

где $K_+, K_-, K_0, m, \beta, q$ – константы материала, известные из базовых экспериментов на растяжение, сжатие и сдвиг.

В качестве параметра ψ используем удельную энергию диссипации [11]:

$$\psi = \int_0^t W dt, \quad (6)$$

где $W = \sigma_{ij}\dot{p}_{ij}$ ($i, j=1, 2$).

Таким образом, для ψ имеем следующее кинетическое уравнение:

$$\dot{\psi} = \sigma_{ij}\dot{p}_{ij}. \quad (7)$$

Подставив (4) в (7), получим

$$\dot{\psi} = \sigma_e^{m+1} \psi^{-\beta} \left(\frac{\psi_*}{\psi_* - \psi} \right)^q. \quad (8)$$

Начальное значение $\psi = 0$ отвечает неповрежденному состоянию при $t = 0$, критическое значение $\psi = \psi_* = \int_0^{t_*} W dt$ – времени до разрушения $t = t_*$.

Критическое значение параметра повреждаемости может зависеть от вида напряженного состояния [11, 12]:

$$\psi_* = \psi_*(\sigma_{ij}).$$

Решая задачу минимизации функционала (1), можно определить скорости перемещений. Для того чтобы найти значения основных неизвестных начально-краевой задачи ползучести в любой момент времени, в алгоритм решения необходимо включать процедуру интегрирования задачи по времени.

Начальную задачу Коши по времени для основных неизвестных запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = \dot{u}_1; & \frac{du_2}{dt} = \dot{u}_2; \\ \frac{d\varepsilon_{11}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{1,1}; & \frac{d\varepsilon_{22}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{2,2}; & \frac{d\gamma_{12}}{dt} = \dot{\gamma}_{1,2} + \dot{\gamma}_{2,1}; \\ \frac{d\sigma_{11}}{dt} = A_1(\dot{u}_{1,1} + \nu\dot{u}_{2,2} - \dot{p}_{11} - \nu\dot{p}_{22}); \\ \frac{d\sigma_{22}}{dt} = A_1(\dot{u}_{2,2} + \nu\dot{u}_{1,1} - \dot{p}_{22} - \nu\dot{p}_{11}); \\ \frac{d\sigma_{12}}{dt} = G(\dot{u}_{1,2} + \dot{u}_{2,1} - 2\dot{p}_{12}); \\ \frac{dp_{11}}{dt} = \dot{p}_{11}; & \frac{dp_{22}}{dt} = \dot{p}_{22}; & \frac{dp_{12}}{dt} = \dot{p}_{12}; & \frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}. \end{cases} \quad (9)$$

Начальные условия при $t = 0$ для уравнений (9) находятся из решения задачи упругого деформирования. Для этого можно использовать функционал (1), заменив скорости входящих в него функций самими функциями и отбросив слагаемые, в которые входят фиктивные нагрузки \dot{N}_{ij}^c ($i, j = 1, 2$).

Для интегрирования начальной задачи Коши по времени используем метод Рунге–Кутты–Мерсона четвертого порядка точности [13, 14] с переменным шагом, который требует пятикратного решения вариационной задачи на каждом временном шаге и обладает высокой точностью и устойчивостью к накоплению погрешности вычислений. Величина шага устанавливается автоматически по заданной погрешности вычислений δ .

Краевые задачи в момент времени $t = 0$ и на каждом временном шаге решаем вариационно-структурным методом (методом R -функций) [8, 9]. Данный метод позволяет представить приближенное решение краевой задачи в виде формулы – структуры решения, которая точно удовлетворяет всем или части граничных условий и является инвариантной по отношению к форме области, где отыскивается решение задачи.

С помощью общей методики построения структурных формул, подробно изложенной в работах [8, 9], можно показать, что структура решения для первой основной задачи будет иметь вид

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{0i} + \dot{u}_{1i} \quad (i = 1, 2), \quad (10)$$

где \dot{u}_{0i} удовлетворяют неоднородным условиям на границе:

$$\dot{u}_{01} = \omega \left(\frac{1}{A_1} \omega_{,1} \dot{P}_n - \frac{1}{G} \omega_{,2} \dot{P}_\tau \right); \quad \dot{u}_{02} = \omega \left(\frac{1}{A_1} \omega_{,2} \dot{P}_n + \frac{1}{G} \omega_{,1} \dot{P}_\tau \right), \quad (11)$$

\dot{u}_{1i} – однородным:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{11} &= \Phi_1 - \omega [D_1 \Phi_1 - (1 + \nu) \omega_{,1} \omega_{,2} T_1 \Phi_1 + T_1 \Phi_2 (\nu \omega_{,1}^2 - \omega_{,2}^2)] + \omega^2 \Phi_3; \\ \dot{u}_{12} &= \Phi_2 - \omega [D_1 \Phi_2 + (1 + \nu) \omega_{,1} \omega_{,2} T_1 \Phi_2 + T_1 \Phi_1 (\omega_{,1}^2 - \nu \omega_{,2}^2)] + \omega^2 \Phi_4. \end{aligned} \quad (12)$$

В формулах (11), (12) функция $\omega(x)$ ($x = (x_1, x_2)$) строится с помощью теории R -функций и удовлетворяет условиям [8]

$$\omega(x) = 0, x \in \partial\Omega; \quad \omega(x) > 0, x \in \Omega; \quad |\omega_{,n}| = 1, x \in \partial\Omega; \quad (13)$$

Φ_i ($i = \overline{1, 4}$) – неопределенные компоненты структуры решения [8];

$$\begin{aligned} \dot{P}_n &= EC(\dot{P}_n^{(0)} + \dot{P}_n^c) = EC(\dot{P}_n^{(0)}) + EC(\dot{P}_n^c); \\ \dot{P}_\tau &= EC(\dot{P}_\tau^{(0)} + \dot{P}_\tau^c) = EC(\dot{P}_\tau^{(0)}) + EC(\dot{P}_\tau^c), \end{aligned} \quad (14)$$

где $EC(\dots)$ – оператор продолжения граничных условий внутрь области Ω [8]; D_1, T_1 – дифференциальные операторы, $D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$; $T_1 = -\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}$ [8].

Продолжения функций $\dot{P}_n^c, \dot{P}_\tau^c$ имеют вид

$$\begin{aligned} EC(\dot{P}_n^c) &= \dot{N}_{11}^c \omega_{,1}^2 + 2\dot{N}_{12}^c \omega_{,1} \omega_{,2} + \dot{N}_{22}^c \omega_{,2}^2; \\ EC(\dot{P}_\tau^c) &= (\dot{N}_{22}^c - \dot{N}_{11}^c) \omega_{,1} \omega_{,2} + \dot{N}_{12}^c (\omega_{,1}^2 - \omega_{,2}^2), \end{aligned} \quad (15)$$

а продолжения функций $\dot{P}_n^{(0)}$, $\dot{P}_\tau^{(0)}$ могут быть построены с помощью формул “склеивания” граничных значений [8].

Если на границе заданы скорости перемещений (условия (3)), то структуру решения можно записать так:

$$\dot{u}_i = \dot{f}_i + \omega \Phi_i \quad (i = 1, 2), \quad (16)$$

где $\dot{f}_i = EC(\dot{f}_i^{(0)})$ – продолжения функций $\dot{f}_i^{(0)}$ внутрь области Ω .

Общая структура решения для смешанной задачи такова:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{0i} + \dot{u}_{1i} \quad (i = 1, 2). \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \dot{u}_{01} &= \omega \left(\frac{1}{A_1} \omega_{2,1} \dot{P}_n - \frac{1}{G} \omega_{2,2} \dot{P}_\tau \right) + \dot{f}_1 - \omega D_1^{(2)} \dot{f}_1 + \\ &+ \omega(1 + \nu) \omega_{2,1} \omega_{2,2} T_1^{(2)} \dot{f}_1 - \omega(\nu \omega_{2,1}^2 - \omega_{2,2}^2) T_1^{(2)} \dot{f}_2; \\ \dot{u}_{02} &= \omega \left(\frac{1}{A_1} \omega_{2,2} \dot{P}_n + \frac{1}{G} \omega_{2,1} \dot{P}_\tau \right) + \dot{f}_2 - \omega D_1^{(2)} \dot{f}_2 - \\ &- \omega(1 + \nu) \omega_{2,1} \omega_{2,2} T_1^{(2)} \dot{f}_2 + \omega(\nu \omega_{2,2}^2 - \omega_{2,1}^2) T_1^{(2)} \dot{f}_1; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_{11} &= \omega_1 \Phi_1 - \omega [D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - (1 + \nu) \omega_{2,1} \omega_{2,2} T_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) + \\ &+ T_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_2)(\nu \omega_{2,1}^2 - \omega_{2,2}^2)] + \omega_2 \omega \Phi_3; \\ \dot{u}_{12} &= \omega_1 \Phi_2 - \omega [D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_2) + (1 + \nu) \omega_{2,1} \omega_{2,2} T_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_2) + \\ &+ T_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1)(\omega_{2,1}^2 - \nu \omega_{2,2}^2)] + \omega_2 \omega \Phi_4, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\dot{P}_n = \dot{N}_{11}^c \omega_{2,1}^2 + 2 \dot{N}_{12}^c \omega_{2,1} \omega_{2,2} + \dot{N}_{22}^c \omega_{2,2}^2 + EC(\dot{P}_n^0);$$

$$\dot{P}_\tau = (\dot{N}_{22}^c - \dot{N}_{11}^c) \omega_{2,1} \omega_{2,2} + \dot{N}_{12}^c (\omega_{2,1}^2 - \omega_{2,2}^2) + EC(\dot{P}_\tau^0);$$

$\omega = 0$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ – уравнения границы $\partial\Omega$ и участков $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$; операторы $D_1^{(2)}$, $T_1^{(2)}$ применяются к функции ω_2 , $D_1^{(2)} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}$;

$$T_1^{(2)} = -\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Отметим, что полученные структуры решения можно использовать для решения задачи упругого деформирования пластины, заменив скорости функций самими функциями и положив $\dot{N}_{ij}^c = 0$ ($i, j = 1, 2$).

При численной реализации неопределенные компоненты структур решения будем представлять в виде рядов:

$$\Phi_i(x) \approx \Phi_{iN}(x) = \sum_{k=1}^{N_i} C_k^{(i)} \varphi_k(x),$$

где $\{\varphi_k\}$ – система степенных полиномов вида $x_1^m x_2^n$. Степень полинома определяется как $P = m + n$. Неопределенные коэффициенты $C_k^{(i)}$ будем находить методом Рунца.

В качестве примера рассмотрим ползучесть прямоугольной пластины из алюминиевого сплава АК4-1Т с центральным круговым отверстием, которая находится под действием постоянной нагрузки $|P_n^{(0)}| = 75$ МПа, равномерно распределенной на ее коротких сторонах, при $T = 473$ К (рис. 1). Геометрические размеры пластины следующие: $a = 0,06$ м; $b = 0,025$ м; $r = 0,01$ м. Упругие постоянные: $E = 60$ ГПа; $\nu = 0,35$; предел прочности $\sigma_B = 330$ МПа. Сплав АК4-1Т обладает ярко выраженной разносопротивляемостью в условиях ползучести [11, 12]. Константы материала: $K_+ = 5,5 \cdot 10^{-23}$ МПа $^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}$; $K_- = 2,25 \cdot 10^{-23}$ МПа $^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}$; $K_0 = 11,36 \cdot 10^{-21}$ МПа $^{-m} \cdot \text{ч}^{-1}$; $\beta = 0$; $m = 8$; $q = 3$. Критическое значение параметра повреждаемости зависит от вида напряженного состояния [11, 12]: $\psi_* = \sigma_i^2(a - bI_1)$, где $a = 4 \cdot 10^{-4}$ МПа $^{-1}$; $b = 4 \cdot 10^{-7}$ МПа $^{-2}$; $\sigma_i^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2$.

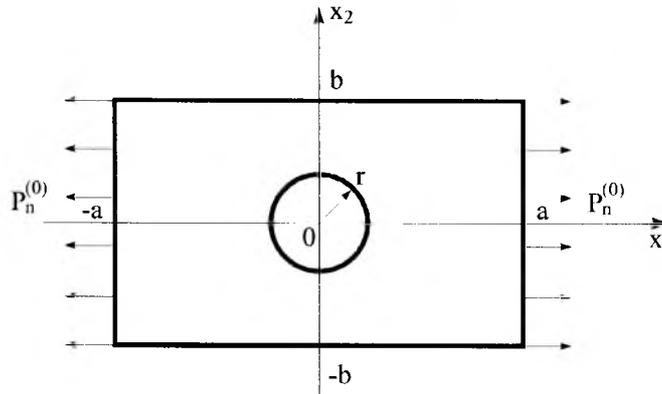


Рис. 1. Схема нагружения пластины.

Уравнение контура пластины может быть записано в виде $\omega(x_1, x_2) = (F_1 \wedge_0 F_2) \wedge_0 F_3 = 0$, где $F_1 = \frac{1}{2b}(b^2 - x_2^2)$ – полоса, параллельная оси $0x_1$; $F_2 = \frac{1}{2a}(a^2 - x_1^2)$ – полоса, параллельная оси $0x_2$; $F_3 = \frac{1}{2r}(x_1^2 + x_2^2 - r^2)$ – внешность круга радиуса r . Участок границы $\partial\Omega_1$, свободный от нагрузки, описывается уравнением $\omega_1(x_1, x_2) = F_1 \wedge_0 F_3 = 0$, а участок границы $\partial\Omega_2$, где действуют растягивающие усилия, – $\omega_2(x_1, x_2) = F_2 = 0$. Символ \wedge_0 обозначает операцию R-конъюнкции [8, 9]: $f_1 \wedge_0 f_2 = f_1 + f_2 - \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$.

При решении задачи используем общую структуру решения (10)–(12). В структуре решения упругой задачи имеем $P_n = EC(P_n^{(0)}) = \frac{\omega_1 P_n^{(0)}}{(\omega_1 + \omega_2)}$, $P_\tau = 0$.

При численной реализации учитывалась симметрия задачи. Интегрирование по площади при вычислении элементов матрицы Ритца проводилось с использованием формул Гаусса. Количество узлов при интегрировании по четверти области равнялось 392. Максимальные степени аппроксимирующих полиномов: $P_1 = P_2 = 15$, $P_3 = P_4 = 9$. Погрешность δ решения начальной задачи Коши по времени составляла 0,001.

Исследуем, как влияет направление внешней нагрузки на процессы ползучести и развития повреждаемости в пластине. В результате расчетов установлено, что при растяжении пластины с усилием 75 МПа время до разрушения $t_* = t_{*p} = 1752$ ч, при сжатии с тем же усилием $-t_* = t_{*c} = 5460$ ч. В обоих случаях разрушение (при рассмотрении верхней правой четверти пластины) начинается в точке $A_* \approx A_*(0,0004 \text{ м}; 0,0101 \text{ м})$, в окрестности точки $(0; r)$, где в течение всего процесса ползучести наблюдается максимальная концентрация напряжений.

На рис. 2 показано изменение во времени коэффициента концентрации напряжений $K = \sigma_{11}/P_n^0$ в точках $(0; r)$ и A_* при растяжении и сжатии соответственно.

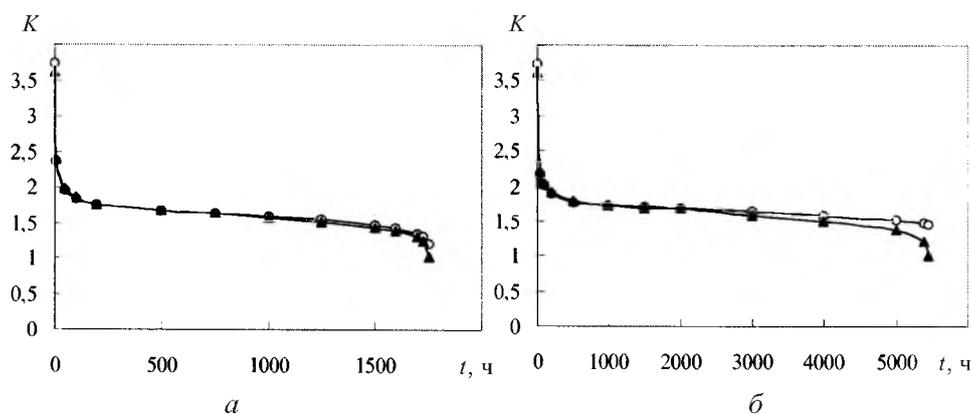


Рис. 2. Изменение во времени коэффициента концентрации напряжений K в точках $(0; r)$ – светлые точки и A_* – темные точки.

На рис. 3 приведены результаты для полных деформаций ε_{11} , деформаций ползучести p_{11} и упругих деформаций $\varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{11} - p_{11}$ в точке $(0; r)$. Видно, что в рассматриваемой точке абсолютные значения полных деформаций и деформаций ползучести непрерывно увеличиваются со временем, а абсолютные значения упругих деформаций уменьшаются.

Рис. 4 иллюстрирует кинетику повреждаемости в точке A_* вплоть до разрушения. На рис. 5 показано распределение повреждаемости на краю отверстия в моменты времени $t = t_{*p}$ и $t = t_{*c}$ как функции от $\eta = 1 - 2\theta/\pi$ (θ – угол в полярной системе координат).

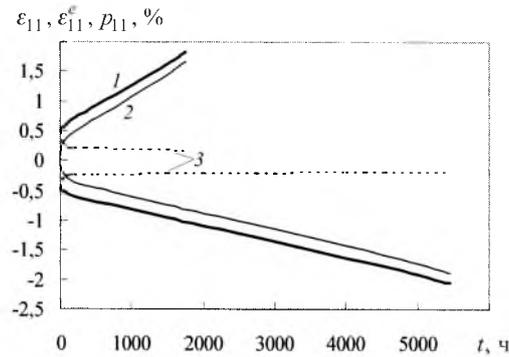


Рис. 3. Полные деформации (1), деформации ползучести (2) и упругие деформации (3) в точке $(0; t)$.

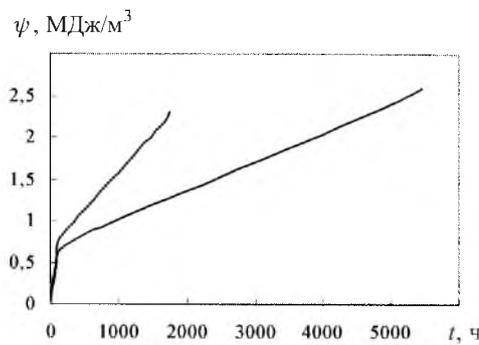


Рис. 4

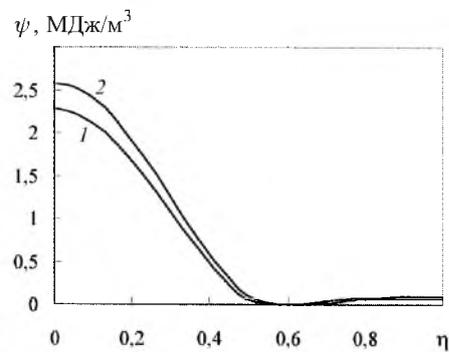


Рис. 5

Рис. 4. Кипетика повреждаемости в точке A_* вплоть до разрушения.

Рис. 5. Распределение повреждаемости на краю отверстия в моменты времени $t = t_{*p}$ (1) и $t = t_{*c}$ (2).

Полученные результаты свидетельствуют, что направление внешней нагрузки оказывает существенное влияние на интенсивность развития процессов ползучести и повреждаемости в пластинах из материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Очевидно, что использование классических определяющих соотношений при исследовании ползучести и длительной прочности пластин приведет к недопустимо большим погрешностям как при нахождении основных неизвестных задачи ползучести, так и при определении времени до разрушения t_{*p} .

Компьютерная программа реализована на языке C++ и обладает возможностями для автоматизации расчетов тонкостенных элементов конструкций.

Резюме

Розглянуто повзучість пошкоджуваних пластин під дією навантажень у площині. Метод розв'язку початково-крайової задачі повзучості базується на спільному застосуванні методів R -функцій, Рітца та Рунге-Кутта-Мерсона. Отримано структури розв'язку для основних типів крайових умов. Дослід-

жено вплив різноопірності та пошкоджуваності матеріалу на повзучість і тривалу міцність пластини з круговим отвором.

1. *Trampczynski W. A., Hayhurst D. R., and Leckie F. A.* Creep rupture of copper and aluminium under non-proportional loading // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1981. – **29**. – P. 353 – 374.
2. *Foux A.* An experimental investigation of the poyniting-effect // *Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics.* – Oxford: Pergamon Press, 1964. – P. 228 – 251.
3. *Murakami S. and Yamada Y.* Effects of hydrostatic pressure and material anisotropy on the transient creep of thick-walled tubes // *Int. J. Mech. Sci.* – 1974. – **16**, No. 3. – P. 145 – 160.
4. *Соснин О. В.* О ползучести материалов с разными характеристиками на растяжение и сжатие // *Журн. прикл. механики и техн. физики.* – 1970. – № 5. – С. 136 – 139.
5. *Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В.* О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // *Пробл. прочности.* – 1979. – № 7. – С. 62 – 67.
6. *Никитенко А. Ф., Цвелодуб И. Ю.* О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // *Динамика сплошной среды.* – 1979. – Вып. 43. – С. 69 – 78.
7. *Калинников А. Е., Вахрушев А. В.* О соотношении поперечной и продольной деформаций при одноосной ползучести разносопротивляющихся материалов // *Механика композитных материалов.* – 1985. – № 2. – С. 351 – 354.
8. *Рвачев В. Л.* Теория *R*-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
9. *Рвачев В. Л., Синекон Н. С.* Метод *R*-функций в задачах теории упругости и пластичности. – Киев: Наук. думка, 1990. – 216 с.
10. *Золочевский А. А., Скленус С. Н.* Решение задач ползучести пластин сложной формы с помощью метода *R*-функций // *Пробл. машиностроения.* – 2000. – **3**, № 1-2. – С. 123 – 129.
11. *Betten J., Sklepus S., and Zolochovsky A.* A creep damage model for initially isotropic materials with different properties in tension and compression // *Eng. Fract. Mech.* – 1998. – **57**, No. 5. – P. 623 – 641.
12. *Betten J., Sklepus S., and Zolochovsky A.* A microcrack description of creep damage in crystalline solids with different behavior in tension and compression // *Int. J. Damage Mech.* – 1999. – **8**. – P. 197 – 232.
13. *Мудров А. Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП “Раско”, 1991. – 270 с.
14. *Золочевский А. А.* Об учете разносопротивляемости материалов растяжению и сжатию в задачах ползучести оболочек // *Динамика и прочность машин.* – 1980. – Вып. 32. – С. 8 – 13.

Поступила 26. 11. 2004