

Исследование нелинейных колебаний композитных пластин с помощью теории R -функций

Л. В. Курпа, Г. Н. Тимченко

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

Разработан эффективный подход к решению задач о геометрически нелинейных колебаниях ортотропных многослойных пластин сложной формы в классической постановке, основанный на использовании теории R -функций, вариационного метода Рунца и метода Бубнова–Галеркина. С помощью предложенного метода решены задачи о колебаниях многослойных прямоугольных пластин и пластин со сложной геометрией. Исследовано влияние геометрии области и граничных условий на амплитудно-частотные характеристики.

Ключевые слова: теория R -функций, геометрически нелинейные колебания, многослойная пластина.

Введение. Многослойные пластины и оболочки широко используются для моделирования композитных элементов многих современных конструкций. Исследование геометрически нелинейных колебаний слоистых пластин является актуальной и достаточно сложной задачей. Известны многочисленные работы [1–14], в том числе и обзорные, посвященные этой проблеме. Анализ работ показал, что в большинстве из них исследуются пластины с достаточно простой геометрией: прямоугольные, круглые и т.д. Существенно меньше исследований, в которых рассматривались пластины со сложной геометрией и различными способами закрепления.

В настоящей работе предложен один из подходов, позволяющих исследовать геометрически нелинейные колебания пластин произвольной формы для различных видов граничных условий. Подход базируется на совместном использовании теории R -функций и вариационных методов.

Постановка задачи. Рассмотрим геометрически нелинейные колебания композитной пластины постоянной толщины h в рамках классической теории [1]. В соответствии с теорией уравнения движения могут быть записаны в виде

$$L_{11}(C_{ij})u + L_{12}(C_{ij})v + L_{13}(K_{ij})w = -Nl_1(C_{ij})w + \frac{\gamma}{g}h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$L_{21}(C_{ij})u + L_{22}(C_{ij})v + L_{23}(K_{ij})w = -Nl_2(C_{ij})w + \frac{\gamma}{g}h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (2)$$

$$L_{31}(K_{ij})u + L_{32}(K_{ij})v + L_{33}(D_{ij})w = -Nl_3(C_{ij}, K_{ij}) + \frac{\gamma}{g}h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где дифференциальные операторы L_{ij} , Nl_i ($i, j = 1, 2, 3$) определяются следующим образом:

$$L_{11}(C_{ij}) = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (4)$$

$$L_{22}(C_{ij}) = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (5)$$

$$L_{12}(C_{ij}) = L_{21}(C_{ij}) = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} L_{13}(K_{ij}) &= L_{31}(K_{ij}) = \\ &= -K_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - 3K_{16} \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} - K_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} L_{23}(K_{ij}) &= L_{32}(K_{ij}) = \\ &= -K_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (K_{12} + 2K_{66}) \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} - 3K_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - K_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} L_{33}(D_{ij}) &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \\ &+ 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} Nl_1(C_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} C_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} Nl_2(C_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 Nl_3(C_{ij}, K_{ij}) = & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{2} K_{11} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + K_{16} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{1}{2} K_{16} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{26} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + K_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{2} K_{12} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{22} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + K_{26} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} + \\
 & + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left[C_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \\
 & + C_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - K_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2K_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \Big\} + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \left[C_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] + \\
 & + C_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - K_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2K_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \Big\} + \\
 & + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \left[C_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \right. \\
 & \left. - K_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2K_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right] \quad (12)
 \end{aligned}$$

(C_{ij} , K_{ij} , D_{ij} – приведенные жесткостные характеристики [15]).

Дифференциальные уравнения (1)–(3) дополняются соответствующими граничными условиями. Приведем некоторые типы граничных условий, которые будут использоваться для решения задач:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{при жестком защемлении;} \quad (13)$$

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при шарнирном опирании} \quad (14) \\
 \text{(неподвижный шарнир),}$$

где n – нормаль к границе области Ω ; M_n – изгибающий момент [16, 17].

Начальные условия при $t = 0$ принимаются следующими:

$$w = w_{\max}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

Метод решения. Данная задача решается в три этапа.

На первом этапе решение линейной задачи о колебаниях пластины выполняется с помощью теории R -функций и метода Ритца. Именно такой подход позволяет учитывать сложную геометрию и строить последовательности базисных функций в аналитическом виде для различных видов граничных условий.

Вариационная постановка линейной задачи сводится к нахождению минимума функционала

$$J = U_{\max} - T_{\max}, \quad (16)$$

где U_{\max} – максимальная потенциальная энергия пластины; T_{\max} – максимальная кинетическая энергия.

Потенциальную энергию пластины определим таким образом:

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left(C_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} + C_{66} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & + 2 \left(C_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 + \\ & + 2D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \\ & - K_{11} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} + K_{16} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \left(K_{22} \frac{\partial v_1}{\partial y} + K_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \right. \\ & \left. + K_{26} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + K_{66} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial x} \Big) d\Omega. \quad (17) \end{aligned}$$

Максимальная кинетическая энергия определяется как

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 L^2 \gamma h}{g} \iint_{\Omega} (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) d\Omega. \quad (18)$$

Минимизацию функционала (16) будем выполнять с помощью метода Ритца, согласно которому неизвестные функции u_1 , v_1 и w_1 представляются в виде

$$u_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_i, \quad v_1 = \sum_{i=1}^{N_2} b_i v_i, \quad w_1 = \sum_{i=1}^{N_3} c_i w_i, \quad (19)$$

где $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, $\{w_i\}$ – последовательности координатных функций, удовлетворяющие, по крайней мере, главным граничным условиям (в данном случае они строятся с помощью структурных формул, полученных в результате применения теории R -функций [16, 17]); a_i , b_i , c_i – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия минимума функционала (16). В результате решения линейной задачи определяется основная собственная частота ω_L и соответствующий собственный вектор $\vec{U}_g(u_1, v_1, w_1)$.

Второй этап решения задачи состоит в преобразовании исходной нелинейной системы (1)–(3) в обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях (15) в предположении, что силами инерции в уравнениях (1) и (2) можно пренебречь.

С этой целью прогиб пластины представляется в следующем виде:

$$w(x, y, t) = y_1(t)w_1(x, y), \quad (20)$$

где $w_1(x, y)$ – компонента собственного вектора $\vec{U}_g(u_1, v_1, w_1)$, соответствующего основной линейной частоте ω_L .

Компоненты вектора перемещений $\vec{U}_p(u, v)$ в плоскости пластины выбираются так, чтобы функции $u = (x, y, t)$ и $v = (x, y, t)$ тождественно удовлетворяли уравнениям (1), (2) и соответствующим граничным условиям. После подстановки (20) в (1), (2) получим систему уравнений, решение которой запишем в виде

$$\begin{aligned} \vec{U}(x, y, t) = \\ = y_1(t)\vec{U}_1(u_1(x, y), v_1(x, y)) + y_1^2(t)\vec{U}_2(u_2(x, y), v_2(x, y)), \end{aligned} \quad (21)$$

где (u_1, v_1) – компоненты собственного вектора \vec{U}_g ; u_2, v_2 – функции, являющиеся компонентами вектора $\vec{U}_2(u_2, v_2)$ и определяемые в результате решения системы уравнений:

$$L_{11}(C_{ij})u_2 + L_{12}(C_{ij})v_2 = -Nl_1(C_{ij})w_1; \quad (22)$$

$$L_{21}(C_{ij})u_2 + L_{22}(C_{ij})v_2 = -Nl_2(C_{ij})w_1. \quad (23)$$

Решение этой задачи также сводится к решению вариационной задачи о нахождении точки стационарности следующего функционала:

$$J(\vec{U}_2) = \int_{\Omega} (S(\vec{U}_2) - (\bar{L}(w_1), \vec{U}_2)) d\Omega - \int_{\Gamma} (\vec{U}_2, \vec{F}^{(v)}) d\Gamma, \quad (24)$$

где $\vec{F}^{(v)}$ – вектор напряжений, заданный на части контура Γ границы области Ω ; $S(\vec{U}_2)$ – упругий потенциал; $\vec{L}(w_1)$ – вектор фиктивных массовых сил, $\vec{L}(w_1) = \{N_1(C_{ij})w_1, N_2(C_{ij})w_1\}$.

В случае граничных условий вида (13), (14) контурный интеграл равен нулю, поэтому функционал (24) упрощается и принимает вид

$$J(\vec{U}_2) = \int_{\Omega} (S(\vec{U}_2) - (\vec{L}(w_1), \vec{U}_2)) d\Omega. \quad (25)$$

Представим функционал (25) в развернутом виде

$$\begin{aligned} J(\vec{U}_2) = & \int_{\Omega} \int_{\Omega} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + C_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)^2 + 2C_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \right. \\ & + C_{66} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(C_{16} \frac{\partial u_2}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \left. \right\} + \\ & + (N_1(C_{ij})w_1)u_2 + (N_2(C_{ij})w_1)v_2 d\Omega. \end{aligned} \quad (26)$$

Дискретизацию функционала (25) будем осуществлять также с использованием метода Ритца и теории R -функций.

После подстановки (20) и (21) в уравнение (3) и применения процедуры Бубнова–Галеркина получим обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение:

$$y_1''(t) + \omega_L^2 y_1(t) - \alpha y_1^2(t) + \beta y_1^3(t) = 0. \quad (27)$$

Коэффициенты α и β определяются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{\int_{\Omega} (L_{31}(K_{ij})(u_2) + L_{32}(K_{ij})(v_2) + N_{31}(C_{ij}, K_{ij}, u_1, v_1, w_1))w_1 d\Omega}{ph \|w_1\|^2}; \\ \beta = & \frac{\int_{\Omega} (N_{32}(C_{ij}, u_2, v_2, w_1))w_1 d\Omega}{ph \|w_1\|^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

В представленных формулах выражения N_{31} , N_{32} определяются следующим образом:

$$N_{31} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{2} K_{11} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + K_{16} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left\{ \frac{1}{2} K_{16} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{26} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + K_{66} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right\} + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{1}{2} K_{12} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} K_{22} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + K_{26} \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right\} + \\
 & + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} + C_{16} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - K_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \right. \\
 & - K_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - 2K_{16} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial x} \left. \right\} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \left\{ C_{16} \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_{26} \frac{\partial v_1}{\partial y} + C_{66} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \right. \\
 & - K_{16} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - K_{26} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - 2K_{66} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial x} \left. \right\} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \left\{ C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} + C_{22} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \right. \\
 & + C_{26} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - K_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - K_{22} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - 2K_{26} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y \partial x} \left. \right\}; \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{32} = & \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \left\{ C_{11} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{12} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\
 & + C_{16} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \left. \right\} + 2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \left\{ C_{16} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + \right. \\
 & + C_{26} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + C_{66} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \left. \right\} + \\
 & + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \left\{ C_{12} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right) + C_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right) + \right. \\
 & + C_{26} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \left. \right\}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

а операторы L_{31} , L_{32} имеют вид (7), (8). В случае однослойной пластины получим $\alpha = 0$, и уравнение (27) упрощается.

На третьем этапе решается уравнение (27) с начальными условиями (15). С этой целью представим искомое решение в виде $y(t) = A \cos \omega_N(t)$, где ω_N – частота нелинейных колебаний; A – амплитуда колебаний. Затем,

применяя метод Бубнова–Галеркина по четверти периода [1], получаем зависимость между отношением нелинейной частоты к линейной и амплитудой в виде

$$\frac{\omega_N}{\omega_L} = \sqrt{1 - \frac{8}{3\pi} \alpha A + \frac{3}{4} \beta A^2}. \quad (31)$$

Численные результаты. Данный алгоритм реализован в рамках программирующей системы POLE-RL [18] и использован для исследования многослойных пластин различной геометрии. Тестирование предложенного метода выполнено на примерах свободно опертых прямоугольных шести-слойных пластин с неподвижным краем.

Пример 1. Рассмотрим многослойную прямоугольную ортотропную пластину несимметричного строения с формой укладки слоев $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ и геометрическими характеристиками: $a = 10$ мм; $b = 5$ мм. Толщина каждого слоя равна 0,1 мм, а соответственно толщина всей пластины $h = 0,6$ мм. Жесткостные характеристики материала, из которого изготовлена пластина, таковы: $E_{11} = 50$ ГПа; $E_{22} = 5$ ГПа; $\nu_{12} = 0,25$; $G_{12} = 2,50$ ГПа. Аналогичная задача решалась ранее [7].

Согласно предложенному алгоритму, для решения последовательности вариационных задач необходимо построить системы базисных функций, которые удовлетворяют главным граничным условиям. С помощью метода R -функций (RFM) [16, 17] построим структуры решения. Для граничных условий вида (13), (14) структура решения следующая: $u = \omega P_1$; $v = \omega P_2$; $w = \omega^k P_3$, при этом $k = 1$ – соответствует граничным условиям (14), $k = 2$ – (13). Здесь $\omega(x, y) = 0$ – нормализованное уравнение границы области; P_1, P_2, P_3 – неопределенные компоненты [16, 17] структуры решения, которые представляются в виде

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} c_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}; \quad P_2 = \sum_{i=1}^{N_2} c_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}; \quad P_3 = \sum_{i=1}^{N_3} c_i^{(3)} \varphi_i^{(3)},$$

где $\{\varphi_i^k\}$ ($k = 1, 2, 3$) – известные полные системы функций; $c_i^{(k)}$ – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия минимума соответствующих функционалов. Тогда последовательности базисных функций будут иметь вид

$$u_i = \omega \varphi_i^1; \quad v_i = \omega \varphi_i^2; \quad w_i = \omega^k \varphi_i^3.$$

В табл. 1 дано сравнение значений (ω_N/ω_L) , полученных при различных амплитудах $A = w/h$, где $h = \sum h_i$ – общая толщина пластины, с результатами работ [7–12]. Видно, что полученные значения достаточно хорошо совпадают с приведенными в литературных источниках. Это свидетельствует о достоверности предложенного метода. Количество координатных функций определялось в результате численного эксперимента. Представленные результаты соответствуют 84 координатным функциям.

Т а б л и ц а 1

Сравнение значений (ω_N/ω_L) для шестислойной прямоугольной пластины с результатами, полученными другими методами

Метод	A, равное			
	-2,0	-1,0	1,0	2,0
R-функций	2,5804	1,5062	1,6892	2,7981
[7]	2,5835	1,5326	1,6448	2,7568
[8]	2,5375	1,5361	1,5361	2,53756
[9]	2,5744	1,5260	1,6341	2,7416
[10]	2,5808	1,5326	1,6434	2,7528
[11]	2,6655	1,6222	1,7327	2,8370
[12]	2,5808	1,5325	1,6434	2,7528

Пример 2. Исследуем колебания пластины сложной формы (рис. 1). Предположим, что она изготовлена из того же материала и с таким же количеством слоев $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$, что и прямоугольная пластина, рассмотренная в примере 1. С использованием метода теории R-функций построим уравнение границы области. Функцию $\omega(x, y)$ можно представить в виде

$$\omega = (\Omega_1 \wedge_0 \Omega_2) \wedge_0 (\overline{\Omega_3 \wedge_0 \Omega_4}) \wedge_0 (\overline{\Omega_6 \wedge_0 \Omega_5}), \quad (32)$$

где \wedge_0 – символ, обозначающий R-операцию, определяемый как [16, 17]

$$X \wedge_0 Y = X + Y - \sqrt{X^2 + Y^2}. \quad (33)$$

Составляющие компоненты Ω_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) определяются следующим образом:

$$\Omega_1 = \left(\sigma_1 = \frac{(a^2 - x^2)}{2a} \geq 0 \right) - \text{вертикальная полоса между прямыми } x = \pm a;$$

$$\Omega_2 = \left(\sigma_2 = \frac{(b^2 - y^2)}{2b} \geq 0 \right) - \text{горизонтальная полоса между прямыми } y = \pm b;$$

$$\Omega_3 = \left(\sigma_3 = \frac{(b_1^2 - y^2)}{2b_1} \geq 0 \right) - \text{горизонтальная полоса между прямыми } y = \pm b_1;$$

$$\Omega_4 = \left(\sigma_4 = \frac{(x^2 - a_1^2)}{2a_1} \geq 0 \right) - \text{вертикальная полоса между прямыми } x = \pm a_1;$$

$$\Omega_5 = (\sigma_5 = b_2 - y \geq 0) - \text{полушпоскость, расположенная ниже прямой } y = b_2;$$

$$\Omega_6 = \left(\sigma_6 = \frac{(a_2^2 - x^2)}{2a_2} \geq 0 \right) - \text{вертикальная полоса между прямыми } x = \pm a_2.$$

Т а б л и ц а 2

Значения (ω_N/ω_L) в зависимости от амплитудного A и геометрических a_1, b_1, a_2, b_2 параметров

Вид заделки	$a_1, \text{ мм}$	$b_1, \text{ мм}$	$a_2, \text{ мм}$	$b_2, \text{ мм}$	$A, \text{ равнос}$			
					-2,0	-1,0	1,0	2,0
Неподвижный шарнир	7,50	2,000	3,00	3,000	2,1590	1,3595	1,4547	2,2796
	8,00	2,000	3,00	4,000	2,0925	1,3330	1,4309	2,2181
	8,50	2,000	3,00	4,500	2,0884	1,3312	1,4300	2,2152
	9,00	2,000	3,00	4,700	2,0864	1,3310	1,4277	2,2106
	9,99	2,000	3,00	4,999	2,4225	1,4460	1,6151	2,6299
	9,99	4,999	9,99	4,999	2,5720	1,5017	1,6881	2,7937
	Прямоугольная				2,5804	1,5062	1,6892	2,7981
Жесткая заделка	7,50	2,000	3,00	3,000	1,6322	1,1893	1,1920	1,6362
	8,00	2,000	3,00	4,000	1,6160	1,1841	1,1853	1,6178
	8,50	2,000	3,00	4,500	1,6158	1,1843	1,1847	1,6165
	9,00	2,000	3,00	4,700	1,6225	1,1866	1,1868	1,6229
	9,99	2,000	3,00	4,999	1,6220	1,1862	1,1874	1,6238
	9,99	4,999	9,99	4,999	1,6252	1,1874	1,1882	1,6264
	Прямоугольная				1,6257	1,1875	1,1884	1,6269

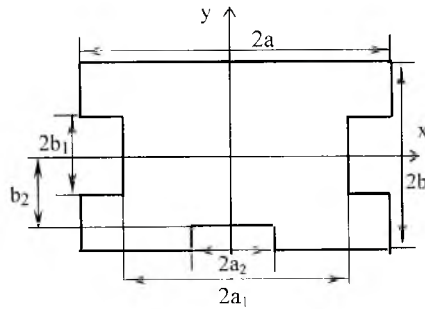


Рис. 1. Срединная плоскость пластины с тремя вырезами.

Заметим, что построенная таким образом функция $\omega(x, y)$ обращается в нуль только на границе области, внутри области она положительна, ее производная по внешней нормали к границе области равна -1 . Полученное уравнение области является нормализованным, т.е. удовлетворяет таким условиям:

$$\begin{cases} \omega = 0, & \forall M(x, y) \in \partial\Omega; \\ \partial\omega/\partial n = -1, & \forall M(x, y) \in \partial\Omega; \\ \omega(x, y) > 0, & \forall M(x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (34)$$

В табл. 2 приведены результаты исследования влияния глубины вреза на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ). Размерности для величин a_i, b_i ($i=1, 2$) в табл. 2–4 приведены в мм.

Т а б л и ц а 3

Значения (ω_N / ω_L) для шестислойной пластины $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ – рис. 2,а

Вид заделки	a_1 , мм	b_1 , мм	A , равное			
			-2,0	-1,0	1,0	2,0
Неподвижный шарнир	7,50	2,000	2,1882	1,3630	1,4883	2,3459
	8,50	2,000	2,2884	1,3945	1,5442	2,4695
	9,00	2,000	2,3281	1,4092	1,5692	2,5244
	9,99	4,999	2,5725	1,5020	1,6883	2,7940
Жесткая заделка	7,50	2,000	1,5923	1,1760	1,1774	1,5944
	8,50	2,000	1,6104	1,1822	1,1835	1,6123
	9,00	2,000	1,6162	1,1842	1,1854	1,6179
	9,99	4,999	1,6255	1,1875	1,1883	1,6267

Т а б л и ц а 4

Значения (ω_N / ω_L) для шестислойной пластины $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ – рис. 2,б

Вид заделки	a_2 , мм	b_2 , мм	A , равное			
			-2,0	-1,0	1,0	2,0
Неподвижный шарнир	3,00	3,500	2,4094	1,4546	1,5676	2,5472
	3,00	4,500	2,2745	1,4004	1,5131	2,4145
	3,00	4,999	2,4917	1,4721	1,6454	2,6998
	9,99	4,999	2,5723	1,5017	1,6886	2,7944
Жесткая заделка	3,00	3,500	1,7558	1,2330	1,2338	1,7570
	3,00	4,500	1,6418	1,1932	1,1933	1,6418
	3,00	4,999	1,6223	1,1863	1,1874	1,6238
	9,99	4,999	1,6225	1,1878	1,1887	1,6278

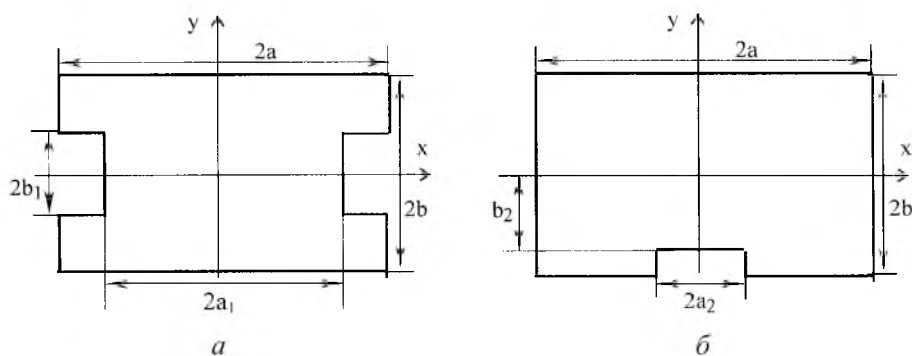


Рис. 2. Срединная плоскость пластины с двумя (а) и с одним (б) вырезом.

Отметим, что если $a_1 \rightarrow a$, $a_2 \rightarrow a$, $b_1 \rightarrow b$, $b_2 \rightarrow b$, то план-форма рассмотренной пластины стремится к прямоугольной. Поэтому полученные результаты должны стремиться к соответствующим значениям прямоугольной пластины. Этот факт использован для контроля достоверности полученных результатов.

Изменяя значения параметров a_1 , b_1 , a_2 , b_2 , можно получить различные геометрические формы пластины. Например, если $b_2 = a_2 = 0$, то форма пластины будет иметь вид, изображенный на рис. 2,а, если $b_1 = a_1 = 0$, то ее форма совпадает с таковой на рис. 2,б.

Для приведенных форм пластины в табл. 3 и 4 представлены результаты исследования влияния глубины одного из врезов на величину АЧХ. Анализ данных таблиц показал, что значения АЧХ для неподвижного шарнира ниже, чем при жесткой заделке, что соответствует физическому смыслу задачи. Как и предполагалось, при значениях $a_1 \rightarrow a$, $b_2 \rightarrow b$ и $a_2 \rightarrow a$, $b_1 \rightarrow b$ величины АЧХ стремятся к соответствующим результатам для прямоугольной пластины.

Выводы

1. Исследовано динамическое поведение геометрически нелинейных многослойных пластин сложной формы при различных видах граничных условий.

2. Выполнено тестирование на ряде нелинейных задач о свободных колебаниях композитных пластин из разных материалов при различных способах закрепления.

3. Получены новые результаты для шестислойных пластин сложной геометрии при различных видах граничных условий.

Резюме

Розроблено ефективний підхід до розв'язання задач щодо геометрично нелінійних коливань ортотропних багатошарових пластин складної форми в класичній постановці, що базується на використанні теорії R -функцій, варіаційного методу Рітца та методу Бубнова–Гальоркіна. За допомогою запропонованого підходу розв'язано задачі про нелінійні коливання багатошарових прямокутних пластин та пластин зі складною геометрією. Досліджено вплив геометрії області та граничних умов на амплітудно-частотні характеристики.

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Григолюк Э. И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1955. – № 3. – С. 33 – 68.
3. Григоренко Я. М., Гуляев В. И. Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 10. – С. 3 – 23.
4. Кубенко В. Д., Ковальчук П. С. Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) // Там же. – 1998. – 34, № 8. – С. 3 – 31.
5. Kurpa L., Shmatko T., and Onufrienko O. Researches of the nonlinear forced vibrations of the orthotropic plates with complex form // The Int. Conf. Nonlinear Dynamics (Sept. 14–16). – Kharkov, 2004. – P. 108 – 113.

6. Курна Л. В., Онуфриенко О. Г., Пильгун Г. В. Исследование геометрически нелинейных колебаний тонких пластин с помощью теории R -функций // Теорет. и прикл. механика. – 2003. – Вып. 37. – С. 151 – 156.
7. Nageswara Rao B. Application of hybrid Galerkin method to non-linear free vibrations of laminated thin plates // J. Sound Vibration. – 1991. – **154**, No. 3. – P. 573 – 576.
8. Chandra R. and Raju B. B. Large amplitude flexural vibration of cross-ply laminated composite plates // Fibre Sci. Techn. – 1975. – **8**. – P. 243 – 264.
9. Nageswara Rao B. and Pilla S. R. R. Large amplitude free vibrations of laminated anisotropic thin plates based on harmonic balance method // J. Sound Vibration. – 1991. – **154**. – P. 173 – 177.
10. Pilla S. R. R. and Nageswara Rao B. Improved solution for non-linear vibration of simply supported rectangular cross-ply plates // Ibid. – **150**. – P. 517 – 519.
11. Pilla S. R. R. and Nageswara Rao B. Large amplitude vibration of thin plates // Ibid. – **149**. – P. 509 – 512.
12. Nageswara Rao B. and Pilla S. R. R. Exact solution of the equation of motion to obtain non-linear vibration characteristics of thin plates // Ibid. – **153**. – P. 168 – 170.
13. Курна Л. В., Шматко Т. В., Онуфриенко О. Г. Вынужденные нелинейные колебания ортотропных пластин сложной формы // Докл. НАН Украины. – 2005. – № 3. – С. 42 – 46.
14. Пискунов В. Г., Рассказов А. О. Развитие теории слоистых пластин и оболочек // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 2. – С. 22 – 56.
15. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
16. Рвачев В. Л. Теория R -функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с.
17. Рвачев В. Л., Курна Л. В. R -функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 176 с.
18. Рвачев В. Л., Шевченко А. Н. Проблемно ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – Киев: Техніка, 1988. – 198 с.

Поступила 25. 04. 2006