

## Эффективность виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем

В. П. Легеза

Национальный университет пищевых технологий, Киев, Украина

*Рассматриваются вынужденные колебания виброзащитной механической системы твердых тел (маятниковый гаситель в виде гантели – несущее тело) под действием внешнего гармонического возбуждения. Сформулированы динамические уравнения совместного движения элементов виброзащитной системы и исследованы виброзащитные эффекты, которые достигаются при использовании гасителя.*

**Ключевые слова:** виброзащитная система, вынужденные колебания, маятниковый гаситель в виде гантели, несущее тело, частота собственных колебаний, вязкий демпфер.

**Введение.** Проблема снижения, регулирования и стабилизации уровня вынужденных колебаний гибких высотных объектов и конструкций является достаточно актуальной. Это объясняется значительным увеличением их высоты при одновременной минимизации несущей способности, что связано с экономией материалов. Особенно это относится к сооружениям башенного типа, несущим стволам ветроэнергетических установок и т.п. [1–4].

Вынужденные колебания гибких высотных объектов и конструкций могут возникать при динамических воздействиях разной природы (ветровые, транспортные, сейсмические, промышленные, взрывные и т.п.) [1–3], которые способны нарушать нормальные условия функционирования отдельных элементов объектов и самих объектов как механических систем. Возникающие при этом динамические нагрузки могут приводить к уменьшению их прочности.

Для снижения уровня вибродинамических нагрузок, действующих на элементы механических систем, в настоящее время применяются различные динамические гасители вынужденных колебаний (ДГК), среди которых наиболее распространены маятниковые (на подвесе), пружинные, ударные [1–10], сейсмоамортизаторы [11], а также катково-демпфирующие системы [12–15]. Некоторые вопросы, связанные с определением оптимальных параметров, регулирующих эффективное функционирование традиционных гасителей на несущих телах, рассмотрены в работах [16–19]. Новым подходам относительно снижения вибронпряженности рабочих элементов современных газотурбинных двигателей при высокочастотных колебаниях посвящены работы [20–22].

Использование вышеперечисленных типов гасителей теоретически обосновано и регламентировано в определенных диапазонах собственных частот несущих объектов. Например, упругие и ударные гасители используют в высокочастотном диапазоне с малыми амплитудами, маятниковые – в среднечастотном, катково-демпфирующие – в низкочастотном с большими амплитудами несущих тел. Вместе с тем существуют несущие объекты (теле-

башни, радиовышки, вытяжные трубы, несущие стволы ветроэнергетических установок и т.п.), у которых спектр главных трех-четырех собственных частот очень широк: от очень низких частот (0,5...2 рад/с), средних частот (2...8 рад/с) до высоких (8...12 рад/с) [6–10, 16].

В этих условиях проблему виброзащиты элементов механических систем и высотных объектов следует решать на основе разработки и внедрения гасителей таких конструкций, эксплуатационные рабочие частоты которых имели бы как можно более широкий частотный диапазон (0,5...12 рад/с). Кроме того, важными особенностями гасителей являются: компактность, надежность и простота в настройке. Этим требованиям в определенной мере отвечает конструкция нового двухмассового маятникового гасителя в виде гантели (рис. 1).

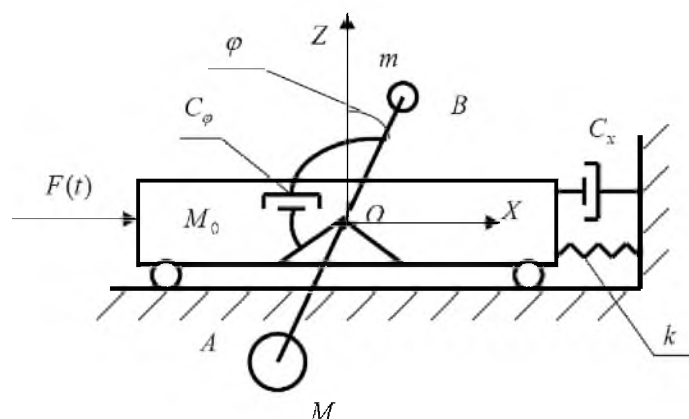


Рис. 1. Общий вид виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем.

**Постановка задачи.** Рассмотрим динамическое поведение виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем вынужденных колебаний при внешнем гармоническом воздействии  $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$  – рис. 1. Конструкция гасителя имеет вид гантели с неравными сосредоточенными массами на концах, причем большая масса  $M$  находится на нижнем конце гантели, меньшая масса  $m$  – на верхнем конце ( $M > m$ ). Такой своеобразный двухмассовый маятник  $AB$  закреплен шарнирно на несущем теле массой  $M_0$  в точке  $O$ . Длина плеча  $AO$  нижней части маятника равна  $L$ , длина плеча  $BO$  верхней части –  $l$ . Полагаем, что плечи  $AO$  и  $BO$  абсолютно жесткие и невесомые. Настройка маятника выполняется достаточно просто путем изменения масс  $M$  и  $m$  и длин  $L$  и  $l$ . Трение в шарнире  $O$  не учитывается. Поглощение энергии гасителем осуществляется за счет сил вязкого сопротивления в демпфере с коэффициентом вязкого сопротивления  $C_\varphi$ .

Движение несущего тела рассматривается вдоль оси  $OX$ , этому движению препятствует упругий элемент с коэффициентом жесткости  $k$  и вязкий демпфер с коэффициентом вязкого сопротивления  $C_x$  (рис. 1). Последний введен для учета демпфирования, обусловленного силами внутреннего трения в материалах конструкции или вертикального ствола высотного объекта. Здесь виброзащищаемая конструкция или высотный объект моделируются в виде несущего тела с приведенной массой  $M_0$ .

Цель работы заключалась в построении математической модели динамического поведения рассматриваемой механической системы, оптимизации габаритных размеров двухмассового гасителя и анализе динамических эффектов, возникающих в виброзащитной системе.

**Построение динамических уравнений движения виброзащитной системы. Определение собственной частоты колебаний двухмассового гасителя в виде гантели.** В качестве независимых обобщенных координат выберем следующие:  $\varphi$  – угол отклонения двухмассового гасителя от вертикальной оси  $OZ$ ;  $x_0$  – перемещение центра масс несущего тела вдоль оси  $OX$  (рис. 1).

Сформулируем геометрические соотношения для центров масс  $M$  и  $m$ . Для центра масс  $M$  имеем

$$x_M = x_0 - L \sin \varphi; \quad (1)$$

$$z_M = -L \cos \varphi, \quad (2)$$

для центра масс  $m$  –

$$x_m = x_0 + l \sin \varphi; \quad (3)$$

$$z_m = l \cos \varphi. \quad (4)$$

Для построения дифференциальных уравнений движения виброзащитной системы используем формализм Лагранжа [23, 24]. Выражение для кинетической энергии системы запишем в виде

$$T = \frac{M_0 \dot{x}_0^2}{2} + \frac{m}{2} [(\dot{x}_0 + \dot{\varphi} l \cos \varphi)^2 + \dot{\varphi}^2 l^2 \sin^2 \varphi] + \frac{M}{2} [(\dot{x}_0 - \dot{\varphi} L \cos \varphi)^2 + \dot{\varphi}^2 L^2 \sin^2 \varphi]. \quad (5)$$

После некоторых преобразований получим

$$T = \frac{M_0 \dot{x}_0^2}{2} + \frac{m}{2} [\dot{x}_0^2 + 2\dot{x}_0 \dot{\varphi} l \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2] + \frac{M}{2} [\dot{x}_0^2 - 2\dot{x}_0 \dot{\varphi} L \cos \varphi + L^2 \dot{\varphi}^2]. \quad (6)$$

Составим выражение для суммы элементарных работ на соответствующих виртуальных перемещениях всех масс механической системы в независимых обобщенных координатах:

$$\delta A = [F(t) - (kx_0 + C_x \dot{x}_0)] \delta x_0 - MLg \sin \varphi \delta \varphi + mgl \sin \varphi \delta \varphi - \dot{\varphi} C_\varphi \delta \varphi. \quad (7)$$

Запишем уравнения Лагранжа II рода в общей форме:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Найдем обобщенные силы  $Q_i$  – правые части уравнений Лагранжа. Для этого перепишем выражение (7) в общем виде

$$\delta A = Q_x \delta x_0 + Q_\varphi \delta \varphi. \quad (9)$$

Из выражений (7) и (9) получим обобщенные силы  $Q_i$ :

$$Q_x = F(t) - (kx_0 + C_x \dot{x}_0); \quad (10)$$

$$Q_\varphi = (ml - ML)g \sin \varphi - C_\varphi \dot{\varphi}. \quad (11)$$

Подставим выражения (6), (10), (11) в формулу (8), в результате чего получим дифференциальные уравнения движения виброзащитной системы:

$$(M_0 + M + m)\ddot{x}_0 + C_x \dot{x}_0 + kx_0 + (ML - ml)(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) = F_0 \sin(\omega t); \quad (12)$$

$$(ML^2 + ml^2)\ddot{\varphi} + C_\varphi \dot{\varphi} - (ML - ml)\ddot{x}_0 \cos \varphi + g(ML - ml)\sin \varphi = 0. \quad (13)$$

После некоторых преобразований имеем такую систему уравнений:

$$(1 + \nu + \mu_0)\ddot{x}_0 + 2n_x \dot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + p(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) = \overline{F_0} \sin(\omega t); \quad (14)$$

$$\ddot{x}_0 \cos \varphi = q\ddot{\varphi} + 2n_\varphi \dot{\varphi} + g \sin \varphi, \quad (15)$$

где

$$\nu = \frac{M}{M_0}; \quad \mu_0 = \frac{m}{M_0}; \quad \overline{F_0} = \frac{F_0}{M_0}; \quad 2n_x = \frac{C_x}{M_0}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M_0};$$

$$p = \frac{\Delta}{M_0}; \quad \Delta = ML - ml; \quad q = \frac{\Sigma}{\Delta}; \quad \Sigma = ML^2 + ml^2; \quad 2n_\varphi = \frac{C_\varphi}{\Delta}.$$

При этом полагаем, что  $\Delta > 0$ .

Если не учитывать демпфирование в двухмассовом маятниковом гасителе ( $C_\varphi = 0$ ) и рассматривать несущее тело неподвижным ( $x_0(t) \equiv 0$ ), система уравнений (14), (15) превращается в одно дифференциальное уравнение движения маятника с неподвижной точкой подвеса  $O$ :

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{q} \sin \varphi = 0. \quad (16)$$

Для этого случая частоту малых собственных колебаний двухмассового маятникового гасителя в виде гантели находим по формуле

$$\omega_c = \sqrt{\frac{ML - ml}{ML^2 + ml^2}g}, \quad (17)$$

из которой следует, что  $\omega_c$  равна частоте малых собственных колебаний математического маятника с длиной эквивалентного подвеса

$$L_3 = \frac{ML^2 + ml^2}{ML - ml} = \frac{L^2 + \mu l^2}{L - \mu l}, \quad (18)$$

где  $\mu = m/M$ .

Очевидно, что при  $m = 0$  формула (17) превращается в известную формулу для определения частоты малых собственных колебаний математического маятника с длиной подвеса  $L = L_3$  ( $\omega_c = \sqrt{g/L_3}$ ), что и требовалось доказать. Из (17) также следует, что колебания двухмассового маятникового гасителя могут осуществляться только при условии  $ML - ml > 0$  и что регулирование их частоты возможно в результате изменения трех основных параметров гасителя (например, в отличие от катковых гасителей):  $l$ ,  $L$ ,  $\mu$ . Это увеличивает возможности настройки гасителей такой конструкции на необходимую собственную частоту несущего тела и существенно расширяет диапазон рабочих частот (0,5...12 рад/с) при сохранении их компактности.

**Эффективность виброзащитной системы с двухмассовым маятниковым гасителем.** Экстремальная задача по минимизации габаритов гасителя. Допустим, необходимо подавить колебания несущего тела с собственной частотой  $\omega_c$ . В этом случае используем эквивалентный одномассовый маятниковый гаситель с длиной подвеса  $L_3 = g/\omega_c^2$ . Покажем, что такую же частоту можно получить, применяя двухмассовый маятниковый гаситель, но с меньшими габаритами. Используем полученную выше формулу (18) для эквивалентного одномассового маятникового гасителя с длиной подвеса  $L_3$ , имеющего параметры двухмассового. Поставим следующую экстремальную задачу: среди двухмассовых маятниковых гасителей найти такой, параметры  $L$  и  $l$  которого в сумме дают величину, меньшую  $L_3$ .

Для этого зафиксируем величины  $L_3$  и  $\mu$ , выразим  $l$  через  $L$  из (18) и составим целевую функцию в виде суммы  $L + l$ . С учетом того что параметр  $l$  выразили через  $L$ , указанная целевая функция будет функцией только одной переменной – параметра  $L$ :

$$F(L) = L + \frac{1}{2} \left( -L_3 + \sqrt{L_3^2 + \frac{4LL_3}{\mu} - \frac{4L^2}{\mu}} \right). \quad (19)$$

Найдем производную выражения (19) по  $L$  и приравняем ее нулю. Опуская промежуточные выкладки, записываем окончательные результаты решения экстремальной задачи. Для параметра  $L$  имеем

$$L = \frac{1}{2} L_3 (1 - \sqrt{\mu}), \quad (20)$$

для параметра  $l$  с использованием формулы (20) –

$$l = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} L_3 (1 - \sqrt{\mu}). \quad (21)$$

Теперь определим сумму выражений (20) и (21) и сравним ее с величиной  $L_3$ :

$$L + l = \frac{L_3}{2} (1 - \sqrt{\mu}) + \frac{L_3}{2} \frac{1 - \sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu}} = \frac{L_3}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu}} - \sqrt{\mu} \right) = \frac{L_3}{2} \left( \frac{1 - \mu}{\sqrt{\mu}} \right). \quad (22)$$

Для того чтобы величина  $L + l$  была меньше  $L_3$ , необходимо выполнение неравенства

$$\mu + 2\sqrt{\mu} - 1 > 0. \quad (23)$$

С учетом того что из (22) следует неравенство  $0 < \mu < 1$ , а из (23) –  $\mu > 3 - 2\sqrt{2}$ , неравенство для выбора параметра  $\mu$  в окончательном виде запишем так:

$$3 - 2\sqrt{2} < \mu < 1. \quad (24)$$

Таким образом, если параметры  $L$  и  $l$  выбирать в соответствии с формулами (20) и (21), а параметр  $\mu$  – из диапазона, который задан формулой (24), можно обеспечить такой габаритный размер  $L + l$  двухмассового маятникового гасителя, который всегда меньше величины  $L_3$ .

Проиллюстрируем это на числовом примере. Предположим, что необходимо подавить колебания несущего тела с частотой  $\omega_c = 1,81$  рад/с, т.е. традиционный одномассовый маятниковый гаситель должен иметь длину подвеса  $L_3 = 3$  м. При этом высота помещения для его установки ограничена и составляет 2 м. Такая ситуация возникает, например, на радиовышках, телебашнях, дымовых и вытяжных трубах, где в верхних частях их несущих стволов практически нет места для размещения гасителей с большими габаритными размерами.

Параметр  $\mu$  двухмассового маятникового гасителя выберем равным 0,64. Тогда его максимальный габаритный размер  $L + l$  будет

$$L + l = 1,5 \frac{1 - 0,64}{0,8} = 0,675 \text{ м.}$$

Из этого следует, что одномассовый маятниковый гаситель невозможно установить в таком помещении, а двухмассовый можно и с большим запасом. Кроме того, оптимальный выбор параметров двухмассового маятникового гасителя позволит более чем в четыре раза уменьшить его габаритные размеры по сравнению с одномассовым. Таким образом, преимущество



предлагаемого двухмассового маятникового гасителя перед одномассовым состоит в его компактности, которую всегда можно обеспечить. Особенно это проявляется на малых частотах (0,5...2,0 рад/с), т.е. при больших  $L_3$ . С уменьшением вертикального размера двухмассового маятникового гасителя также уменьшается его горизонтальный размер (отклонения масс  $m$  и  $M$  в поперечном направлении).

Ниже приведен график функциональной зависимости, которая устанавливается по формуле (22).

**Эффективность функционирования двухмассового маятникового гасителя в расширенном рабочем диапазоне частот.** Из формулы (17) видно, что диапазон частот, который охватывает двухмассовый маятниковый гаситель при заданных параметрах  $L$  и  $l$ , существенно зависит от параметра  $\mu$ :

$$\omega(\mu) = \sqrt{\frac{g(L - \mu l)}{L^2 + \mu l^2}}. \quad (25)$$

Выберем самый простой случай равных значений параметров  $L = l$  и рассмотрим формулу (25) при крайних значениях параметра  $\mu$  из неравенства  $0 \leq \mu \leq 1$ . Очевидно, что верхняя частотная граница, равная частоте колебаний математического маятника  $\sqrt{g/L}$ , будет получена при  $\mu = 0$ , нижняя – при  $\mu = 1$ . Для выбранного варианта  $L = l$  нижняя частотная граница равна нулю. Таким образом, двухмассовый маятниковый гаситель может эффективно функционировать в *частотном диапазоне*, заданном неравенством  $0 \leq \omega \leq \sqrt{g/L}$ , при одних и тех же параметрах  $L$  и  $l$ , в то время как одномассовый маятниковый гаситель при одном и том же параметре  $L$  только на *одной частоте*, и регулированию не поддается.

**Численный анализ.** Уровень виброподавления вынужденных колебаний несущего тела в случае применения двухмассового маятникового гасителя можно проанализировать при использовании, например, сертифицированного пакета прикладных программ MATHCAD [25]. При проведении численных исследований необходимо было установить сравнительные уровни виброподавления вынужденных колебаний несущего тела в области резонансной частоты при функционировании в составе системы двух типов маятниковых гасителей: одномассового и двухмассового.

При численных исследованиях динамики системы с *одномассовым* маятниковым гасителем параметры выбраны оптимальными (в соответствии с известными методиками, например, [23]):  $L = 2,42$  м;  $l = 0$ ;  $\nu = 0,042$ ;  $\mu_0 = 0$ ;  $n_\varphi = 0,5$  м/с;  $\omega = 2$  рад/с;  $\omega_0 = 2$  рад/с;  $n_x = 0,03$  с<sup>-1</sup>;  $\overline{F_0} = 0,03g$ , для системы с *двухмассовым* маятниковым гасителем они таковы:  $L = 2,0$  м;  $l = 0,1$  м;  $\nu = 0,032$ ;  $\mu = \mu_0/\nu = 0,313$ ;  $\mu_0 = 0,01$ ;  $n_\varphi = 0,5$  м/с;  $\omega = 2$  рад/с;  $\omega_0 = 2$  рад/с;  $n_x = 0,03$  с<sup>-1</sup>;  $\overline{F_0} = 0,03g$ .

На рис. 2 показано изменение во времени максимальной амплитуды вынужденных колебаний несущего тела при использовании *одномассового* и *двухмассового* маятниковых гасителей. Видно, что уровень виброподавления вынужденных колебаний несущего тела в области резонансных частот при

использовании *двухмассового* маятничкового гасителя достаточно высок. Максимальная амплитуда  $A_{\max}$  вынужденных колебаний несущего тела при использовании одномассового и двухмассового гасителей составляет соответственно 0,614 и 0,521 м. Суммарная рабочая масса двухмассового гасителя выбрана равной рабочей массе одномассового, а его вертикальный размер на 0,32 м меньше длины подвеса последнего. Без функционирования двухмассового гасителя максимальная амплитуда вынужденных колебаний несущего тела приблизительно в шесть раз больше, чем с ним.

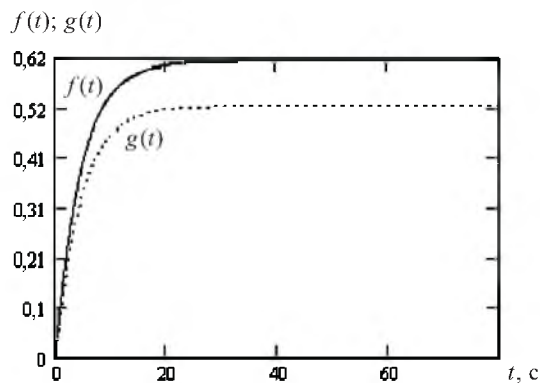


Рис. 2. Изменение максимальной амплитуды вынужденных колебаний несущего тела во времени  $t$  при использовании одномассового (сплошная линия) и двухмассового (птриховая линия) маятничковых гасителей.

На рис. 3 приведена зависимость максимального вертикального размера двухмассового маятничкового гасителя от параметра  $\mu$ , построенная при  $L_3 = 3$  м. Как видно, от параметра  $\mu$  существенно зависят *габаритные размеры* гасителя.

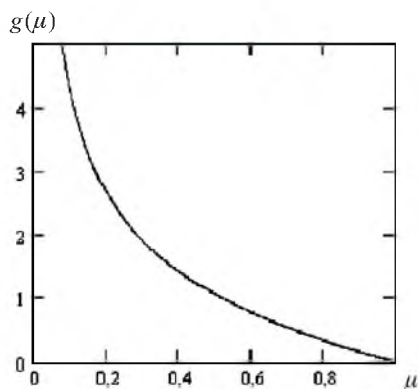


Рис. 3. Зависимость максимального вертикального размера  $L+l$  двухмассового маятничкового гасителя  $g(\mu)$  от безразмерного параметра  $\mu$ .

На рис. 4 показана зависимость частоты  $\omega_i$  малых собственных колебаний двухмассового маятничкового гасителя от  $\mu$  для трех вариантов параметров  $L=l$ . Анализ зависимости свидетельствует о том, что от параметра  $\mu$  также значительно зависит *ширина рабочего диапазона частот* данного



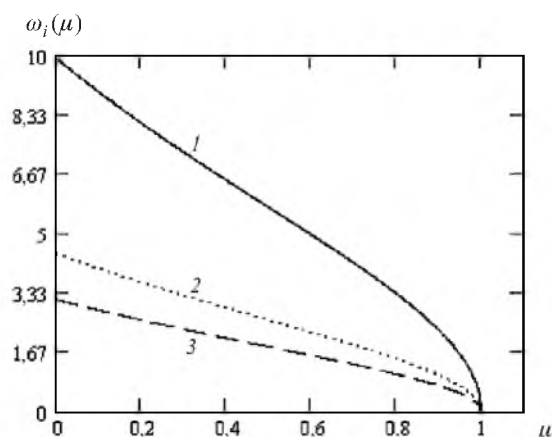


Рис. 4. Зависимость частоты  $\omega_i$  малых собственных колебаний двухмассового маятникового гасителя от  $\mu$  для трех вариантов параметров  $L=l$ : 1 –  $\omega_1(\mu)$ ,  $L=l=0,1$  м; 2 –  $\omega_2(\mu)$ ,  $L=l=0,5$  м; 3 –  $\omega_3(\mu)$ ,  $L=l=1$  м.

гасителя. Для первого варианта она составляет:  $0 \leq \omega \leq 9,9$  рад/с; для второго –  $0 \leq \omega \leq 4,43$  рад/с; для третьего –  $0 \leq \omega \leq 3,13$  рад/с. В то же время одномассовый гаситель адекватно работает только на одной рабочей частоте для каждого из трех вариантов соответственно:  $\omega = 9,9$  рад/с при  $L = 0,1$  м;  $\omega = 4,43$  рад/с при  $L = 0,5$  м;  $\omega = 3,13$  рад/с при  $L = 1$  м.

## Выводы

1. Проведенный на основе разработанной математической модели численный анализ динамического поведения виброзащитной системы с гасителем вынужденных колебаний в виде гантели показал, что предложенная система виброподавления вынужденных колебаний позволяет значительно снизить уровень амплитуд колебаний несущих тел и тем самым исключить возможность появления резонансных явлений в механической системе. Этого можно достичь за счет оптимальной настройки параметров гасителя на соответствующие частоты собственных колебаний несущего тела.

2. Установлено, что частота малых собственных колебаний гасителя в виде гантели равна частоте малых собственных колебаний математического маятника с длиной эквивалентного подвеса  $L_3 = \frac{ML^2 + ml^2}{ML - ml}$ . Нормально работать гаситель при горизонтальных колебаниях несущего тела может только при условии  $ML - ml > 0$ .

3. На основе решения экстремальной задачи по минимизации габаритных размеров гасителя получены формулы для оптимальных параметров  $l$  и  $L$ , в которых основным фактором является параметр  $\mu = m/M$ . От этого же параметра зависит ширина рабочего диапазона частот, в котором эффективно функционирует двухмассовый маятниковый гаситель при фиксированных параметрах  $l$  и  $L$ .

4. Численный анализ уровня виброподавления вынужденных колебаний несущего тела показал большую эффективность двухмассового маятникового гасителя по сравнению с одномассовым.

5. Регулирование собственной частоты гасителя в виде гантели следует осуществлять путем оптимального выбора и настройки трех основных его параметров:  $l$ ,  $L$ ,  $\mu$ . Еще одним регулирующим параметром гасителя по амплитуде является коэффициент вязкого сопротивления  $C_\varphi$  в его демпфере. Рабочий диапазон собственных частот (0,5...12 град/с) таких гасителей более широкий, чем одномассовых маятниковых на подвесе и катковых.

Результаты исследования могут использоваться разработчиками и проектировщиками виброгасителей вынужденных колебаний несущих тел при их конструктивных решениях и в процессе определения оптимальных характеристик.

### Резюме

Розглядаються вимушені коливання віброзахисної механічної системи твердих тіл (маятниковий гасник типу гантелі – несуче тіло) під дією зовнішнього гармонічного збудження. Сформульовано динамічні рівняння сумісного руху елементів віброзахисної системи та досліджено віброзахисні ефекти, що досягаються при використанні гасника.

1. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия*. Справочник проектировщика / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1981. – 216 с.
2. *Сысоев В. И.* Устройства для гашения колебаний. Справочник проектировщика “Динамический расчет зданий и сооружений” / Под ред. Б. Г. Коренева, И. М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1984. – С. 264 – 271.
3. *Беспрозванная И. М., Соколов А. Г., Фомин Г. М.* Воздействие ветра на высокие сплошные сооружения. – М.: Стройиздат, 1976. – 234 с.
4. *Фролов К. В., Фурман А. Ф.* Прикладная теория виброзащитных систем. – М.: Машиностроение, 1980. – 320 с.
5. *Вибрации в технике*. Справочник Т. 6. Защита от вибрации и ударов. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
6. *Коренев Б. Г.* Динамические гасители колебаний: Тез. докл. на междунар. симп. “Виброзащита в строительстве”. – Л., 1984. – Т. 2. – С. 7 – 17.
7. *Кондра М. П., Остроумов Б. В.* Опыт применения динамических гасителей для виброзащиты башен: Тез. докл. на междунар. симп. “Виброзащита в строительстве”. – Л., 1984. – Т. 2. – С. 33 – 34.
8. *Остроумов Б. В.* Динамический гаситель колебаний в виде перевернутого маятника с демпфированием // Изв. вузов. – 2002. – № 9. – С. 36 – 38.
9. *Остроумов Б. В.* Расчет сооружений с динамическим гасителем колебаний // Промышленное и гражданское стр-во. – 2003. – № 5. – С. 18 – 22.
10. *Остроумов Б. В.* Исследование, разработка и внедрение высотных сооружений с гасителями колебаний: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – М., 2003. – 48 с.

11. *Плахтиенко Н. П.* Нелинейные поступательные колебания твердого тела с гравитационно-фрикционным сейсмоамортизатором // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 9. – С. 121 – 127.
12. *Легеза В. П.* Динамика виброзащитных систем с роликовым гасителем низкочастотных колебаний // Пробл. прочности. – 2004. – № 2. – С. 106 – 118.
13. *Легеза В. П.* Динамика виброзащитных систем с шаровым гасителем низкочастотных колебаний // Там же. – № 3. – С. 83 – 94.
14. *Легеза В. П.* Моделі і метод віброзахисту динамічних систем на основі котково-демпфірувальних пристроїв: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Київ, 2004. – 38 с.
15. *Легеза В. П.* Применение теории роликовых амортизаторов для виброзащиты транспортных конструкций // Пробл. прочности. – 2006. – № 2. – С. 147 – 155.
16. *Коренев Б. Г.* Об экспериментальном определении параметров маятникового динамического гасителя колебаний // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – № 2. – С. 22 – 28.
17. *Резников Л. М., Фишман Г. М.* Оптимальные параметры и эффективность динамического гасителя при действии периодических импульсов // Машиноведение. – 1973. – № 1. – С. 29 – 35.
18. *Резников Л. М.* Оптимизация параметров динамических гасителей колебаний с различными видами сопротивления // Пробл. прочности. – 1970. – № 9. – С. 43 – 50.
19. *Резников Л. М.* Оптимальные параметры динамического гасителя с частотно-независимым трением при автоколебаниях сооружений // Динамика механических систем. – Киев: Наук. думка, 1983. – С. 80 – 85.
20. *Зиньковский А. П., Матвеев В. В.* Оценка и предотвращение опасной вибронпряженности лопаточного аппарата рабочих колес ГДТ // Вибрации в технике и технологиях. – 2001. – № 4 (20). – С. 16 – 18.
21. *Токарь И. Г., Зиньковский А. П., Матвеев В. В.* К вопросу о возможности повышения демпфирующей способности рабочих лопаток современных газотурбинных двигателей // Пробл. прочности. – 2003. – № 4. – С. 58 – 68.
22. *Токарь И. Г., Зиньковский А. П.* Исследование влияния повреждений однотипных элементов на колебания регулярных систем // Там же. – 2006. – № 2. – С. 39 – 47.
23. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
24. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
25. *Дьяконов В. В.* MATHCAD-2001. Специальный справочник. – СПб.: ПИТЕР, 2002. – 832 с.

Поступила 27. 09. 2005