

## О статическом равновесии упругой ортотропной среды с произвольно ориентированной эллиптической трещиной

В. С. Кирилук, О. И. Левчук, В. Ф. Ткаченко

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

*Рассмотрена задача о распределении напряжений в упругой ортотропной среде с произвольно ориентированной эллиптической трещиной. Для построения решения задачи применен подход Виллиса, основанный на тройном преобразовании Фурье по пространственным переменным и Фурье-образе функции Грина для бесконечного анизотропного пространства. Проведено сравнение результатов исследований в частных случаях с данными других авторов. Изучено влияние ориентации эллиптической трещины в ортотропном пространстве на распределение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль ее контура.*

**Ключевые слова:** напряженное состояние, упругая ортотропная среда, эллиптическая трещина, произвольная ориентация, преобразование Фурье, функция Грина, коэффициенты интенсивности напряжений.

**Введение.** Исследование напряженного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в упругой изотропной среде с дискообразными или эллиптическими трещинами, а также системой таких трещин проводилось в работах [1–12] и др. Изучению распределения напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем дискообразные или эллиптические трещины, посвящено значительно меньше работ [7, 9, 13–16] и др. Существенным ограничением в этом случае являлось предположение о том, что плоские трещины расположены в плоскостях изотропии трансверсально-изотропного материала, т.е. ось трансропии материала перпендикулярна плоскости трещины. Исключение составила работа [17], в которой рассматривалась эллиптическая трещина, расположенная в такой среде не только в плоскости изотропии, но и перпендикулярно к ней. Однако полученное решение является некорректным, что показано в [18, 19].

Отметим, что нахождение замкнутых решений указанных задач основано на известных представлениях общих решений пространственных статических задач для изотропных и трансверсально-изотропных материалов. Для этих типов материалов фундаментальное решение (функция Грина для бесконечной среды) выражается в явном виде через элементарные функции, что принципиально отличает их от случая ортотропных материалов. Для последних также неизвестны общие представления решений трехмерных уравнений теории упругости, подобные, например, представлению Папковича–Нейбера для изотропного материала или Эллиота для трансверсально-изотропного. Обусловленные этим дополнительные математические трудности не позволяют при рассмотрении трехмерных задач теории упругости для ортотропных материалов использовать методы и подходы, которые успешно применяются при исследовании задач для изотропных и трансверсально-изотропных материалов.

Работы [18–21] посвящены изучению задач о распределении напряжений в ортотропных материалах вблизи сфероидальных полостей, включений, а также возле круговых или эллиптических трещин, расположенных в главных плоскостях ортотропии материала. Настоящая работа является продолжением этих исследований. Здесь используется подход [22], основанный на применении тройного преобразования Фурье, Фурье-образа функции Грина для ортотропной среды, а также теоремы о вычетах. Возникающие контурные интегралы вычисляются численно по квадратурным формулам Гаусса.

**Постановка задачи.** Предположим, что бесконечная ортотропная упругая среда (с главными осями ортотропии  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ) содержит некоторую произвольно ориентированную эллиптическую трещину. Пусть среда находится под воздействием однородного поля напряжений (основное напряженное состояние). Наличие трещины вносит возмущение в основное напряженное состояние. В целом напряженное состояние упругой среды с трещиной можно представить как сумму основного и возмущенного напряженного состояния, вызванного наличием трещины. Упругие свойства ортотропного материала характеризуются девятью независимыми постоянными величинами:  $c_{11}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{23}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{55}$ ,  $c_{66}$ . Упругие постоянные  $C_{ijkl}$  связаны с величинами  $c_{mn}$  зависимостями:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; & C_{2222} &= c_{22}; & C_{3333} &= c_{33}; \\ C_{1122} &= C_{2211} = c_{12}; & C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; & C_{2233} &= C_{3322} = c_{23}; \\ C_{2323} &= C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; & C_{1212} &= C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}. \end{aligned}$$

Все остальные компоненты тензора  $C_{ijkl}$  равны нулю.

Рассмотрим две системы координат, одна из которых  $(x, y, z)$  связана с главными осями ортотропии упругой среды  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , а другая (локальная) система  $(x^1, y^1, z^1)$  – с ориентацией трещины. Ось  $Oz^1$  этой системы координат ориентирована перпендикулярно плоскости расположения трещины. Оси  $Ox^1$  и  $Oy^1$  направлены вдоль полуосей эллиптической трещины. Произвольную ориентацию трещины можно описать с помощью связи систем координат  $(x, y, z)$  и  $(x^1, y^1, z^1)$ . При этом с изменением направлений локальной системы координат изменяются и упругие свойства материала. Так, например, если из исходной системы координат  $(x, y, z)$  поворотом вправо вокруг оси  $Ox$  на угол  $\alpha$  получаем локальную систему  $(x^1, y^1, z^1)$ , то тензор упругих модулей  $C_{ijkl}^\alpha$  в новой (локальной) системе координат находим с помощью обычного преобразования тензора четвертого порядка [23]:

$$C_{ijkl}^\alpha = C_{mnpq} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq},$$

где  $\alpha_{ij}$  – матрица преобразования координат,

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Закон Гука для ортотропного материала в новой системе координат принимает вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\alpha} \varepsilon_{kl},$$

где, как и при вычислении компонентов тензора  $C_{ijkl}^{\alpha}$ , суммирование проводится по повторяющимся индексам.

В общем случае произвольную ориентацию трещины можно получить, проводя последовательно вращение старой системы координат вокруг осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  на углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соответственно. Тогда тензор упругих модулей  $C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)}$ , который зависит от трех углов поворотов, в новой системе координат получим с помощью преобразования тензора четвертого порядка и матрицы преобразования более сложного вида:

$$C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = C_{mnpq} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}, \quad (1)$$

где  $T_{ij}$  – матрица преобразования координат,

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Матрица  $T_{ij}$  является результатом последовательного перемножения трех матриц, отражающих правые вращения вокруг каждой из осей координат:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Закон Гука для упругого ортотропного материала в новых координатах, связанных с вращением вокруг трех осей старой системы координат, получим в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

где суммирование проводится по повторяющимся индексам.

Далее все построения будем проводить в новой системе координат. (Во избежание громоздкости выражений верхние индексы “1” будем опускать.) Используем также тензорную запись, в которой будем подразумевать, что

суммирование проводится по повторяющимся индексам в рассматриваемых выражениях. Отметим, что вместо преобразования  $T_{ij}$ , связанного с последовательным вращением вокруг осей координат  $Ox, Oy, Oz$ , можно было бы ввести другое преобразование, например, отвечающее поворотам с углами Эйлера. Однако для простоты изложения выберем преобразование, состоящее из последовательных вращений вокруг трех различных осей координат.

Заметим, что при наличии плоской трещины в изотропной среде или при расположении ее в плоскости изотропии в трансверсально-изотропном материале задача общего вида распадается на две независимые задачи: симметричную и антисимметричную. В случае более низкой симметрии свойств упругого материала граничную задачу согласно [22] следует рассматривать в общем виде. Так, для однородного поля напряжений в среде с трещиной, воспользовавшись суперпозицией состояний основного поля и возмущения, вызванного наличием трещины, для нахождения возмущенного состояния получаем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \tau_{13}^{\pm} = -\tau_{13}^0; \quad \tau_{23}^{\pm} = -\tau_{23}^0; \quad \sigma_{33}^{\pm} = -\sigma_{33}^0 \quad (x \in S); \\ \bar{u}(\bar{x}) \rightarrow 0, \quad |\bar{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

**Метод решения.** Для определения поля напряжений используем интегральное представление функции Грина для бесконечной анизотропной среды (фундаментальное решение). Эта функция удовлетворяет следующим уравнениям равновесия анизотропного тела:

$$C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} G_{km, jl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} + \delta_{im} \delta(\bar{x} - \bar{x}') = 0,$$

где  $\delta(\bar{x} - \bar{x}')$  –  $\delta$ -функция Дирака;  $\delta_{im}$  – символ Кронекера.

Воспользуемся согласно [24] следующим интегральным выражением фундаментального решения для анизотропной среды:

$$G_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\bar{x} - \bar{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (4)$$

где  $N_{ij}(\vec{\xi})$  – соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы вида

$$\{K_{ki}(\vec{\xi})\} = \{C_{kjil}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_j \xi_l\} = \{C_{klij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{K_{ik}(\vec{\xi})\}; \quad (5)$$

$D(\vec{\xi})$  – ее определитель, представляющий собой многочлен шестого порядка относительно переменных  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ; используемый трехкратный интеграл далее будем обозначать  $\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\xi}$  ( $d\vec{\xi} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ ).

Для эллиптической трещины согласно [22] возмущенное состояние можно представить с помощью скачков перемещений через поверхность трещины следующим образом:

$$u_i(\vec{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S C_{jlm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} b_m(\vec{x}') \xi_l N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\vec{\xi} dx'_1 dx'_2, \quad (6)$$

где функции  $N_{ij}(\vec{\xi})$ ,  $D(\vec{\xi})$  для эллиптической трещины определяются с помощью формул (5), а неизвестный вектор  $\vec{b}(\vec{x})$  принимает вид

$$\vec{b}(\vec{x}) = \vec{b} \left( 1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

С использованием теоремы Коши о вычетах поле перемещений, вызванное неизвестными скачками перемещений через поверхность трещины, можно записать как

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{jlm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l^M N_{ij}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} \times \\ \times b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2, \quad (8)$$

где суммирование проводится для  $\xi_3^M$  – корней уравнения  $D(\vec{\xi}) = 0$  с отрицательной мнимой частью, вектор  $\vec{\xi}^M$  имеет вид  $\vec{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$ . Соответственно поле напряжений представим так:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} C_{pqm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_q^M \xi_l^M N_{kp}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} \times \\ \times b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2.$$

Рассмотрим компоненты напряжений на поверхности трещины и проведем некоторые упрощения. В результате согласно [22] получим

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \left( \frac{\eta_1}{a_1}, \frac{\eta_2}{a_2}, \xi_3^M(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2) \right) b_m d\varphi, \quad (9)$$

где  $\eta_1 = \cos \varphi$ ;  $\eta_2 = \sin \varphi$ ; функция  $F_{ijm}$  имеет вид

$$F_{ijm}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} C_{pqm3}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_q \xi_l N_{kp}(\bar{\xi})}{\partial D(\bar{\xi}) / \partial \xi_3}, \quad (10)$$

Далее для нахождения контурных интегралов используем метод квадратур Гаусса, и, удовлетворяя граничным условиям на поверхности трещины, определяем неизвестные значения скачков перемещений.

Дополнительный анализ асимптотических выражений напряжений в плоскости трещины позволил получить следующие выражения КИН для эллиптической трещины:

$$k_{ij} = i\sqrt{\pi} \left( \frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} \right)^{-1/4} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \left( \frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \xi_3^M(x_1/a_1^2, x_2/a_2^2) \right) b_m; \quad (11)$$

$$K_I = k_{33}; \quad K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; \quad K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1,$$

где компоненты нормали в плоскости  $(x, y)$  к границе эллиптической трещины имеют вид

$$n_1 = (x_1/a_1^2) / (x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{1/2}; \quad n_2 = (x_2/a_2^2) / (x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{1/2}.$$

При исследованиях использовали следующий алгоритм. Разбиение интервала интегрирования проводили с помощью узлов Гаусса, в которых вычисляли значения  $\xi_1, \xi_2$ . В результате решения уравнения  $D(\bar{\xi})=0$  определяли величины  $\xi_3^M$ . Затем из них выбирали корни с отрицательной мнимой частью и использовали выражение неизвестного скачка перемещения (7). Вычисляя интегралы с помощью квадратурных формул Гаусса, из формул (9) и граничных условий на поверхности получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения неизвестных компонентов вектора  $\vec{b}$ , которые входят в выражение (7) и в общем случае являются комплексными числами. После решения системы линейных алгебраических уравнений значения КИН вдоль контура эллиптической трещины вычисляли по выражениям (11).

**Апробация подхода и анализ численных результатов.** Рассмотрим задачу об эллиптической трещине, расположенной в трансверсально-изотропной среде в плоскости изотропии. В этом случае выражения КИН записываются в явном виде с помощью полных эллиптических интегралов первого и второго рода. Так, согласно результатам работы [9], значение КИН  $K_I$  при таком расположении трещины и симметричных нагрузках не зависит от упругих постоянных среды и совпадает с таковым для изотропного материала. При антисимметричных нагрузках величины  $K_{II}, K_{III}$  зависят от упругих свойств трансверсально-изотропного материала. В работах [9, 16] показано, что достаточно взять их выражения для изотропного материала и коэффициент Пуассона  $\nu$  заменить значением, которое для трансверсально-изотропной среды вычисляется специальным образом.

Согласно подходу [9] рассмотрим квадратное уравнение относительно  $n$ , которое зависит от упругих постоянных  $c_{ij}$  трансверсально-изотропного материала:

$$c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0.$$

Пусть  $n_1, n_2$  – корни этого уравнения, значение  $n_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$ . Введем также обозначения

$$m_1 = \frac{c_{11}n_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{n_1(c_{13} + c_{44})}{c_{33} - n_1c_{44}}; \quad m_2 = \frac{c_{11}n_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}} = \frac{n_2(c_{13} + c_{44})}{c_{33} - n_2c_{44}}. \quad (12)$$

Тогда значение, которым следует заменить коэффициент Пуассона  $\nu$  в соответствующих выражениях для КИН  $K_{II}, K_{III}$  для изотропного материала, находим согласно [9] следующим образом:

$$\nu_* = 1 - \frac{n_3^{-1/2}(m_2 - m_1)}{(1 + m_1)(1 + m_2)(n_1^{-1/2} - n_2^{-1/2})}. \quad (13)$$

В работе [16] также установлена взаимосвязь между значениями КИН для изотропной и трансверсально-изотропной сред при расположении трещины в плоскости изотропии материала. Соответствующее значение, которое необходимо подставлять в выражения КИН  $K_{II}, K_{III}$  для изотропного материала вместо коэффициента Пуассона  $\nu$ , таково:

$$\nu_{**} = 1 - \sqrt{\frac{0,5(c_{11} - c_{12})c_{33}(2c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33} + c_{13}})}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)(\sqrt{c_{11}c_{33} + c_{13}})}}. \quad (14)$$

При этом из выражений (13), (14) предельным переходом от трансверсально-изотропного материала к изотропному получаем значение  $\nu$ . В работах [18, 19] отмечалось, что численные значения, вычисленные по формулам (13), (14) для конкретных параметров трансверсально-изотропных материалов, совпадают с большой точностью. Ниже покажем, что в действительности нет необходимости в проведении таких численных сравнений, поскольку эти формулы эквивалентны, хотя более удобной, на наш взгляд, является формула (14), не требующая проведения дополнительных промежуточных вычислений.

Предварительно преобразуем некоторые выражения, входящие в формулу (13). Так, согласно (12) имеем

$$(m_2 - m_1) = \frac{c_{11}(n_2^{1/2} + n_1^{1/2})(n_2^{1/2} - n_1^{1/2})}{(c_{13} + c_{44})}; \quad \frac{1}{n_1^{-1/2} - n_2^{-1/2}} = \frac{\sqrt{n_1 n_2}}{n_2^{1/2} - n_1^{1/2}}; \quad (15a)$$

$$1 + m_1 = \frac{c_{11}n_1 + c_{13}}{c_{13} + c_{44}}; \quad 1 + m_2 = \frac{c_{11}n_2 + c_{13}}{c_{13} + c_{44}};$$

$$(n_2^{1/2} + n_1^{1/2}) = \sqrt{(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_2})^2} = \sqrt{(n_1 + n_2) + 2\sqrt{n_1 n_2}}. \quad (156)$$

В соответствии с теоремой Виета, для корней квадратного уравнения  $n_1$  и  $n_2$  получим

$$n_1 + n_2 = \frac{c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2}{c_{11}c_{44}}; \quad n_1 n_2 = \frac{c_{33}}{c_{11}}.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} v_* &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} \frac{c_{11} \sqrt{\frac{c_{33}c_{11} - c_{13}^2 - 2c_{13}c_{44}}{c_{11}c_{44}} + 2\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}(c_{13} + c_{44})}}{c_{44} \left( c_{11}c_{33} + c_{13} \frac{c_{33}c_{11} - c_{13}^2 - 2c_{13}c_{44}}{c_{44}} + c_{13}^2 \right)} = \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} c_{33} \frac{\sqrt{c_{44}c_{11}} \sqrt{\frac{c_{33}c_{11} - c_{13}^2 - 2c_{13}c_{44}}{c_{11}c_{44}} + 2\sqrt{\frac{c_{33}}{c_{11}}}}} {c_{11}c_{33} - c_{13}^2} = \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} c_{33} \frac{\sqrt{(\sqrt{c_{11}c_{33}} - c_{13})(\sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{13}) + 2(\sqrt{c_{11}c_{33}} - c_{13})c_{44}}}{\sqrt{(\sqrt{c_{11}c_{33}} - c_{13})(\sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{13})(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)}} = \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} c_{33} \frac{\sqrt{2c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{13}}}{\sqrt{(\sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{13})(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)}} = \\ &= 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})} c_{33} \frac{(2c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{13})}{(\sqrt{c_{11}c_{33}} + c_{13})(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)} = v_{**}. \end{aligned}$$

Таким образом, с помощью элементарных преобразований формулу (13) приведем к виду (14).

Для тестирования подхода приведем выражения КИН для эллиптической трещины в изотропном материале. Согласно [8] при действии растягивающих  $\sigma_{33}^0 \neq 0$  или сдвигающих  $\sigma_{23}^0 \neq 0$  усилий получим

$$K_I = \frac{\sigma_{33}^0}{E(k)} \left( \frac{\pi b}{a} \right)^{1/2} (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}; \quad (16)$$



$$K_{II} = (\pi ab)^{1/2} \frac{k^2 \sigma_{23}^0 \sin \beta}{[(k^2 + \nu k_1^2)E(k) - \nu k_1^2 K(k)](a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}; \quad (17)$$

$$K_{III} = \left(\frac{\pi b^3}{a}\right)^{1/2} \frac{(1-\nu)k^2 \sigma_{23}^0 \cos \beta}{[(k^2 + \nu k_1^2)E(k) - \nu k_1^2 K(k)](a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}; \quad (18)$$

$$k = (1 - b^2/a^2)^{1/2}; \quad k_1 = b/a,$$

где  $K(k)$  и  $E(k)$  – полные эллиптические интегралы первого и второго рода. При замене коэффициента Пуассона  $\nu$  величиной  $\nu_*$  или  $\nu_{**}$  находим значения КИН для трансверсально-изотропной среды при расположении эллиптической трещины в плоскости изотропии материала.

В данном случае КИН вычисляли по формулам (11) и непосредственно согласно выражениям (16)–(18) заменой  $\nu$  величинами  $\nu_*$  или  $\nu_{**}$ . При этом для вычисления контурных интегралов (9) использовали квадратурную формулу Гаусса по 24 узлам. Результаты сравнения вычислений КИН для  $\sigma_{33}^0 = 1$  и  $\sigma_{23}^0 = 1$  по формулам (11) и (16)–(18) при замене  $\nu$  величинами  $\nu_*$  или  $\nu_{**}$  (значения в скобках) приведены в табл. 1–3. При расчетах упругие постоянные материала полагали следующими:  $\nu_1 = 0$ ;  $\nu_2 = 0,4$ ;  $E_1 = 2G_1(1 + \nu_1)$ ;  $E_2/E_1 = 2$ ;  $G_2 = E_1$ , значение большей полуоси эллиптической трещины выбирали равным единице. В табл. 1, 2, 3 приведено сравнение данных по КИН  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , полученных по двум подходам. Как видно из данных таблиц, полученные по двум подходам результаты, хорошо согласуются между собой.

Т а б л и ц а 1

Сравнение значений КИН  $K_I$  при растяжении

$a_2$	$\varphi$					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,8	0,999774 (0,999915)	1,012973 (1,0130080)	1,045277 (1,045310)	1,081470 (1,081428)	1,108299 (1,108205)	1,118051 (1,117939)
0,6	0,833077 (0,833214)	0,866429 (0,866524)	0,939156 (0,939174)	1,010568 (1,010530)	1,058920 (1,058849)	1,075756 (1,075674)
0,4	0,616025 (0,616154)	0,681961 (0,682038)	0,798001 (0,798020)	0,894225 (0,894214)	0,954099 (0,954073)	0,974256 (0,974226)
0,2	0,337236 (0,337449)	0,454327 (0,454534)	0,588920 (0,589159)	0,681976 (0,682245)	0,736349 (0,736637)	0,754264 (0,754559)

Примерно такое же совпадение результатов наблюдалась для приведенных соотношений полуосей эллиптической трещины на всем интервале  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Для контроля вычислений интервал разбивался на 100 одинаковых подынтервалов, в концах которых проводилось сравнение значений.

Следовательно, полученные с высокой точностью значения КИН  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  для эллиптической трещины в трансверсально-изотропном мате-

риале, которая расположена в плоскости его изотропии, совпали, что подтверждает эффективность апробируемого подхода.

Исследуем коэффициенты интенсивности напряжений в ортотропной среде с эллиптической трещиной при различной ее ориентации. Упругие свойства ортотропного материала примем согласно [23] такими:  $E_1 = 3,68$ ;  $E_2 = 2,68$ ;  $E_3 = 1,10$ ;  $G_{12} = 0,50$ ;  $G_{23} = 0,41$ ;  $G_{31} = 0,45$ ;  $\nu_{12} = 0,105$ ;  $\nu_{23} = 0,431$ ;  $\nu_{31} = 0,405$  (модули Юнга и модули сдвига приведены в  $10^{-5}$  кгс/см<sup>2</sup>).

Т а б л и ц а 2

Сравнение значений КИН  $K_{II}$  при сдвиге

$a_2$	$\varphi$					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,8	0 (0)	0,382960 (0,382951)	0,705975 (0,705954)	0,939240 (0,939211)	1,077465 (1,077431)	1,123049 (1,123013)
0,6	0 (0)	0,414063 (0,414054)	0,726672 (0,726654)	0,929554 (0,929530)	1,042891 (1,042863)	1,079409 (1,079381)
0,4	0 (0)	0,430962 (0,430958)	0,700599 (0,700594)	0,860559 (0,860553)	0,948174 (0,948170)	0,976347 (0,976342)
0,2	0 (0)	0,387249 (0,387408)	0,568277 (0,568511)	0,675447 (0,675725)	0,735506 (0,735708)	0,754886 (0,755196)

Т а б л и ц а 3

Сравнение значений КИН  $K_{III}$  при сдвиге

$a_2$	$\varphi$					
	0	$\pi/10$	$\pi/5$	$3\pi/10$	$2\pi/5$	$\pi/2$
0,8	0,993579 (0,993571)	0,932647 (0,932663)	0,768854 (0,768909)	0,539921 (0,539987)	0,276986 (0,277029)	0 (0)
0,6	0,827029 (0,827026)	0,756284 (0,756312)	0,593541 (0,593590)	0,400758 (0,400816)	0,201082 (0,201105)	0 (0)
0,4	0,610789 (0,610803)	0,524745 (0,524793)	0,381476 (0,381535)	0,247337 (0,247382)	0,121873 (0,121897)	0 (0)
0,2	0,333930 (0,334075)	0,235748 (0,235881)	0,154710 (0,154802)	0,097066 (0,097125)	0,047263 (0,047291)	0 (0)

На рис. 1–7 показано изменение коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта эллиптической трещины в зависимости от полярного угла  $\theta$  при одноосном растяжении  $\sigma_{33}^0 \neq 0$ . Значения полуосей эллипса при расчетах полагали равными  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = 0,5$ . На рис. 1, 2 приведено распределение КИН  $K_I$  при  $\alpha \neq 0$  и  $\gamma \neq 0$  соответственно, штриховыми линиями показан случай  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ . На рис. 3 представлено изменение КИН  $K_I$  для случаев  $\alpha = \beta = 90^\circ$  и  $\alpha = \gamma = 90^\circ$ . Рис. 4, 5 иллюстрируют распреде-

ление  $K_{II}$  и  $K_{III}$  при  $\alpha \neq 0$ , рис. 6, 7 – изменение этих же коэффициентов при  $\beta \neq 0$ . Из рис. 4–7 следует, что различие между величинами  $K_{II}$  и  $K_{III}$  при одноосном растяжении, перпендикулярном плоскости трещины, вызвано возникающей при поворотах системы координат анизотропией материала более сложного вида, чем ортотропия. Можно заключить, что в ряде случаев ориентация трещины существенно влияет не только на значения КИН, но и на характер их распределения. Это хорошо видно из рис. 2, 3 для КИН  $K_I$  и рис. 4 для КИН  $K_{II}$ .

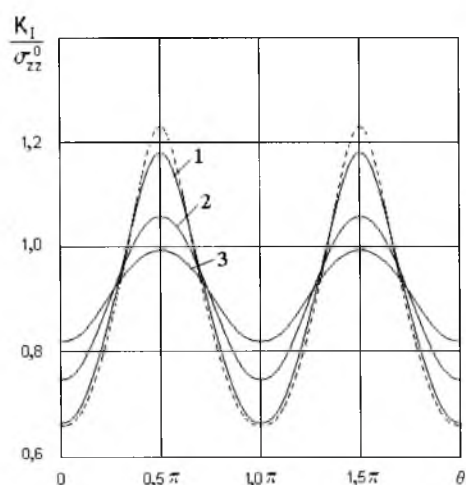


Рис. 1

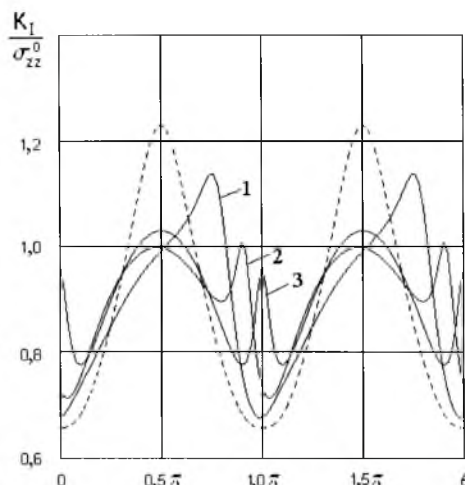


Рис. 2

Рис. 1. Распределение КИН  $K_I$  вдоль контура трещины при  $\alpha \neq 0$ : 1 –  $\alpha = 30^\circ$ ; 2 –  $\alpha = 60^\circ$ ; 3 –  $\alpha = 90^\circ$ .

Рис. 2. Распределение КИН  $K_I$  вдоль контура трещины при  $\gamma \neq 0$ : 1 –  $\gamma = 30^\circ$ ; 2 –  $\gamma = 60^\circ$ ; 3 –  $\gamma = 90^\circ$ .

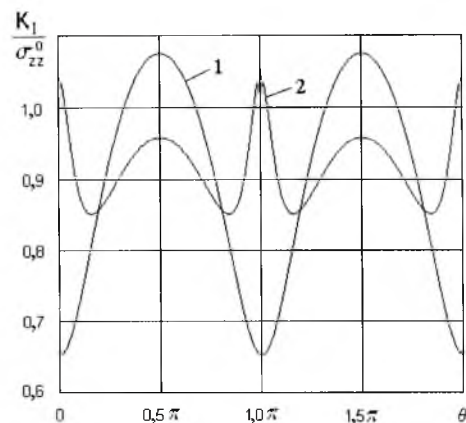


Рис. 3

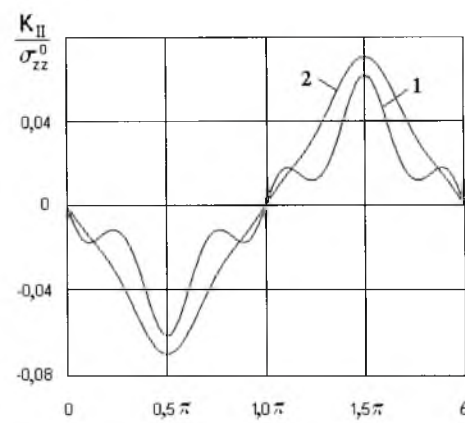


Рис. 4

Рис. 3. Распределение КИН  $K_I$  вдоль контура трещины при  $\alpha = \beta = 90^\circ$  (1) и  $\alpha = \gamma = 90^\circ$  (2).

Рис. 4. Распределение КИН  $K_{II}$  вдоль контура трещины при  $\alpha \neq 0$ : 1 –  $\alpha = 30^\circ$ ; 2 –  $\alpha = 60^\circ$ .

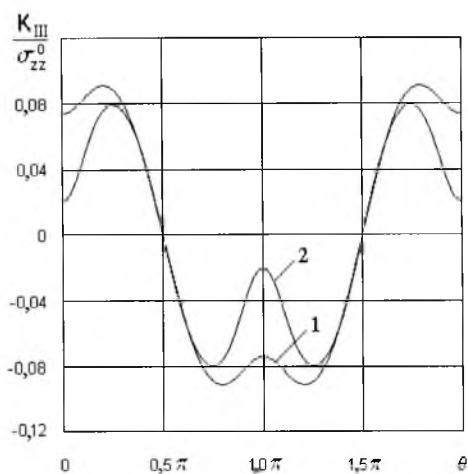


Рис. 5

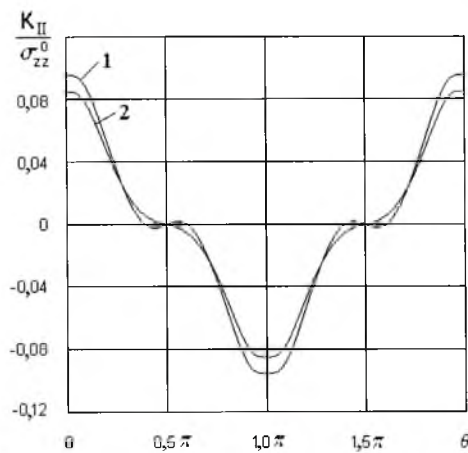


Рис. 6

Рис. 5. Распределение КИН  $K_{III}$  вдоль контура трещины при  $\alpha \neq 0$ : 1 –  $\alpha = 30^\circ$ ; 2 –  $\alpha = 60^\circ$ .

Рис. 6. Распределение КИН  $K_{II}$  вдоль контура трещины при  $\beta \neq 0$ : 1 –  $\beta = 30^\circ$ ; 2 –  $\beta = 60^\circ$ .

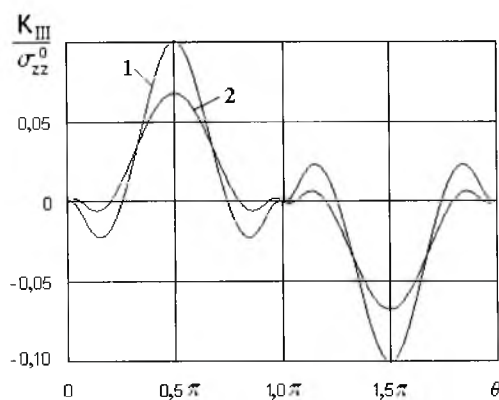


Рис. 7. Распределение КИН  $K_{III}$  вдоль контура трещины при  $\beta \neq 0$ : 1 –  $\beta = 30^\circ$ ; 2 –  $\beta = 60^\circ$ .

**Заключение.** Проведенные исследования показали, что наряду со свойствами упругих материалов, геометрией трещины, типом основного напряженного состояния в среде ориентация трещины в ортотропном материале также может оказывать существенное влияние не только на значения коэффициентов интенсивности напряжений, но и на характер их распределения вдоль границы трещины.

## Резюме

Розглянуто задачу про розподіл напружень у пружному ортотропному середовищі з довільно орієнтованою еліптичною тріщиною. Для побудови розв'язку задачі використано підхід Вілліса, що базується на потрійному перетворенні Фур'є за просторовими змінними та Фур'є-образі функції Гріна для нескінченного анізотропного простору. Проведено порівняння

результатів досліджень у частинних випадках із даними інших авторів. Вивчено вплив орієнтації еліптичної тріщини в ортотропному просторі на розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень вздовж її контуру.

1. *Андрейкив А. Е.* Пространственные задачи теории трещин. – Киев: Наук. думка, 1982. – 354 с.
2. *Бородачев А. Н.* Плоская эллиптическая трещина в произвольном поле нормальных напряжений // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 12. – С. 118 – 121.
3. *Вычислительные методы в механике разрушения / Под ред. С. Атлури.* – М.: Мир, 1990. – 391 с.
4. *Механика разрушения и прочность материалов. Справочное пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / Саврук М. П.* – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
5. *Орыняк И. В., Гуенко А. Ю.* Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщ. 1. Перемещение берегов трещины при полиномиальном законе нагружения // Пробл. прочности. – 2002. – № 1. – С. 22 – 40.
6. *Орыняк И. В., Гуенко А. Ю., Каменчук А. В.* Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщ. 2. Контакт берегов трещины // Там же. – № 2. – С. 41 – 52.
7. *Подильчук Ю. Н.* Граничные задачи статики упругих тел // Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1984. – 303 с.
8. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Под ред. Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – 1016 с.
9. *Kassir M. K. and Sih G.* Three-Dimensional Crack Problems. – Leyden: Nordhoff Int. Publ., 1975. – 425 p.
10. *Shan R. C. and Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract. Mech. – 1971. – **3**, No. 1. – P. 71 – 96.
11. *O'Donogue P. E., Nishioka T., and Athuri S. N.* Multiple coplanar embedded elliptical crack under arbitrary normal loading // Int J. Numer. Math. Eng. – 1985. – **21**, No. 4. – P. 437 – 449.
12. *Livieri P., Segala F., and Ascenzi O.* Analytic evaluation of the difference between Oore–Burns and Irwin stress intensity factor for elliptical cracks // Acta Mech. – 2005. – **176**, No. 1. – P. 95 – 105.
13. *Подильчук Ю. Н.* Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 10. – С. 3 – 30.
14. *Chiang C.-R.* Some crack problems in transversely isotropic solids // Acta Mech. – 2004. – **170**, No. 1. – P. 1 – 9.

15. *Fabrikant V. I.* Elliptic crack in a transversely isotropic body revisited: New symbolism // *Ibid.* – 2004. – **172**, No. 3–4. – P. 181 – 193.
16. *Wu Kuang-Chong.* On an elliptic crack embedded in an anisotropic materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**, No. 35. – P. 4841 – 4857.
17. *Hoening A.* The behavior of a flat elliptical crack in an anisotropic elastic body // *Ibid.* – 1978. – **14**, No. 11. – P. 925 – 934.
18. *Kirilyuk V. S.* On the stress state of the orthotropic medium with penny-shape crack // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, No. 12. – P. 84 – 91.
19. *Kirilyuk V. S.* The stress state of an elastic orthotropic medium with elliptic crack under tension and shear // *Ibid.* – 2005. – **41**, No. 4. – P. 358 – 366.
20. *Кирилюк В. С.* О влиянии ориентации сфероидальных полостей или жестких включений в ортотропной среде на концентрацию напряжений // *Пробл. прочности.* – 2006. – № 1. – С. 58 – 68.
21. *Kirilyuk V. S.* Static equilibrium of an elastic orthotropic medium with elliptic crack under bending // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, No. 8. – P. 895 – 903.
22. *Willis L. J.* The stress field around an elliptical crack in an anisotropic medium // *Int. J. Eng. Sci.* – 1968. – **6**, No. 5. – P. 253 – 263.
23. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
24. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. – Boston; London: Martinus Nijhoff, 1987. – 587 p.

Поступила 01. 03. 2006