

Проблема больших перемещений подземных трубопроводов. Сообщение 1. Разработка численной процедуры

И. В. Орыняк, А. В. Богдан

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Разработана эффективная численная итерационная процедура для анализа напряженно-деформированного состояния плоского трубопровода в среде с учетом возможного наличия опор и разветвлений. Используемые постановочные уравнения равновесия и геометрические уравнения записаны в геометрически нелинейной постановке и дополнены граничными условиями, полученными аналитически для полубесконечного трубопровода при продольно-поперечном упругом изгибе. Рассматривается упругопластический закон взаимодействия трубопровода с грунтом при возможности дополнительного ограничения абсолютных перемещений трубопровода. Алгоритм расчета основан на понятиях поправочного и базового решений. Базовое уточняется на каждом итерационном шаге с использованием поправочного решения. Поправочное решение представляет собой непосредственное решение системы линеаризованных уравнений, в которой, например, для определения усилий взаимодействия трубы с грунтом используются базовые перемещения трубопровода. Алгоритм использует эффективный метод прогонки на каждом итерационном шаге, минимизирующий количество неизвестных. Результаты расчетов сравниваются с приведенными в литературных источниках численными и теоретическими решениями: закручивание консоли под действием изгибающего момента на конце; прокладка подводного трубопровода; потеря устойчивости на воздухе и др.

Ключевые слова: трубопровод, итерационная процедура, поправочное и базовое решения, упругопластическое взаимодействие, уравнения равновесия, траншея.

Введение. В странах бывшего СССР прочностные расчеты подземных трубопроводов выполняются в соответствии со СНиП-85 [1]. При этом роль основного нагружающего фактора играет внутреннее давление, которое приводит к возникновению окружных напряжений. Для предотвращения разрушений от последних необходимо, чтобы достаточно толстой была стенка трубы с учетом принятых коэффициентов запаса. Что касается учета других специфических условий нагружения (предельных состояний), обуславливающих возникновение значительных продольных напряжений от осевой силы и изгибающего момента во время строительства и эксплуатации трубопроводов (потеря устойчивости, подвижки грунтов, большие перемещения, всплытия и др.), то согласно отечественным Нормам следует использовать методы строительной механики. Традиционно в строительной механике в основном оперируют понятиями малых перемещений, которые, к сожалению, используются при расчетах подземных трубопроводов. Поэтому указанное выше требование часто остается лишь декларацией, поскольку в Нормам отсутствуют не только конкретные примеры расчетов, но и методики расчета. В этом плане показательными являются документы, регламентирующие прокладку трубопроводов в заболоченной местности [2] и выполнение работ по переизоляции трубопроводов [3]. Однако ни в одном из них не только не приводятся методы или примеры расчета потери устойчивости

трубопровода, но и не говорится о необходимости учета возможности ее потери.

В зарубежных Нормах на проектирование также не рассматриваются все предельные состояния, однако в них отмечается, что они не являются справочником по проектированию, и поэтому при необходимости можно руководствоваться другими документами и инженерной практикой [4]. Согласно зарубежной практике [5], заказчик обычно составляет дополнительные и более детальные, чем в стандартах, проектные критерии для сооружаемых объектов. Основные параметры нагружения, свойства материала, которые следует учитывать при решении рассматриваемых проблем, а также характер решения обычно приводятся в Рекомендованных практиках, примером которых для подземных трубопроводов является документ [6]. В нем достаточно четко указывается необходимость изучения больших перемещений при анализе подземных трубопроводов и даны примеры характера деформации, зависимости изгибающих моментов и продольных усилий.

Конечно, любые Нормы являются устаревшими с момента появления, поскольку по определению они должны регламентировать только устоявшуюся практику. Поэтому дискуссия об их недостатках и улучшениях должна вестись непрерывно. К сожалению, предложения по совершенствованию Норм в отечественной литературе в основном сводятся к уточнению коэффициентов запаса по окружным напряжениям. Бесспорно, они существенно влияют на капиталоемкость нового строительства и на экономическую эффективность действующих трубопроводов. Однако, с точки зрения обеспечения надежности трубопроводов, практика эксплуатации и статистика разрушений свидетельствуют о большой роли именно продольных напряжений. Например, по данным европейской группы по газопроводам [7] только от сдвижек грунтов происходит до 7% разрушений бездефектных труб, в то время как из-за окружных напряжений наблюдаются разрушения только при наличии дефектов.

Ранее [8] обращалось внимание на отсутствие в отечественной литературе практики расчета краевых эффектов возле упругих и заводских гибов, неучет которых может приводить к существенной недооценке действующих напряжений. В настоящей работе подробно проанализируем продольные напряжения, особенно для случая больших перемещений, когда трубопровод имеет свойства как гибкой нити, так и балки. Заметим, что только на основе рассмотрения больших перемещений можно оценить возможность потери устойчивости и главное – закритическое геометрическое положение и нагруженность трубопровода на прямых и искривленных участках с учетом подвижек земли при выполнении ремонтных и строительных работ, при наличии обводненных участков и т.д.

Существуют известные аналитические подходы, развиваемые, например, в работах [9–12] и др. Очевидным недостатком указанных работ является узость решаемых задач и использование различных гипотез, касающихся предполагаемого характера деформирования трубопровода. Однако, как будет показано ниже, даже при линейном взаимодействии трубы со средой характер напряженного состояния при поперечной сдвижке грунта на некотором участке зависит от интенсивности (величины) сдвижки, значения

продольной силы. Кроме того, имеющиеся решения в основном базируются на модели слабоискривленного стержня при продольно-поперечном изгибе и естественно не могут учитывать изменение продольной силы при искривлении оси и возникающих при этом продольных сил сцепления между трубой и грунтом. Что касается реальных задач для искривленных трубопроводов, где существует нелинейный характер взаимодействия грунта с трубопроводом, зависящий, в частности, от текущего расстояния оси от поверхности земли, то их невозможно решить аналитически.

Отметим, что анализ больших перемещений одномерных (балочных) конструкций на воздухе (без учета среды) не представляет большой сложности и реализован во многих коммерческих комплексах. Наиболее удобными при этом являются методы прогонки. Суть их состоит в том, что при первой прогонке все неизвестные перемещения и усилия выражаются через неизвестные параметры на выбранных начальных краях трубопровода и неизвестные усилия в узлах разветвления трубопровода. Эти неизвестные находятся путем удовлетворения граничных условий на остальных краях трубопровода. При второй прогонке определяются действительные значения усилий и перемещений в каждом сечении трубопровода. Однако при разработке численных методов расчета тел в среде возникает ряд существенных проблем. Главная из них состоит в том, что в случае упругого взаимодействия прямой трубы с грунтом собственные решения имеют вид $e^{-\lambda x}$ и $e^{\lambda x}$, где x – линейная координата; λ – собственное число решения (условная длина волны), равное для типичных грунтов и размеров сечения трубы примерно 5–8 м. Если длина участка составляет k/λ , то незначительная ошибка в решении на одном конце участка приводит к ее увеличению в e^k раз на другом, и численное решение при больших k ($k > 10$, т.е. если длина больше 50 м) расходится. Подобные задачи решаются методом конечных элементов [13, 14]. Это связано с введением большого числа неизвестных и длительностью расчета, что не эффективно при выполнении многовариантных расчетов.

Вторая проблема связана, собственно, с геометрической нелинейностью и процедурой проведения итераций с целью приближения к искомому решению. В этом случае обычно используются методы последовательных нагружений [15, 16], когда последовательно и пропорционально увеличивают приложенные усилия и находят изменения длины и кривизны, которые используют на следующем шаге. К сожалению, этот метод неприемлем для задач, где учитывается взаимодействие среды с трубой, когда действующие усилия зависят от перемещений. Даже незначительная неточность в определении истинного положения трубопровода вызывает появление сравнительно больших усилий взаимодействия, которые на следующем шаге итераций приводят к большим перемещениям и, как следствие, к еще большим усилиям взаимодействия и т.д.

Достаточно эффективным является численный подход к анализу подземных трубопроводов, также основанный на методе конечных элементов [17, 18]. Проблема приближений по итерациям решается путем использования некоторых базовых аналитических решений для различных случаев нагру-

жения прямолинейных участков трубопровода. С одной стороны, в таком подходе отсутствует проблема накопления ошибок вида $e^{\lambda x}$, поскольку аналитические решения сопрягаются точно. С другой стороны, в пределах каждого участка условия нагружения должны быть идентичными. Кроме того, изменение угла поворота оси должно быть очень малым, что требует сгущения разбиения и приводит к увеличению используемых неизвестных и, как следствие, к росту длительности счета и ограничению длины анализируемого трубопровода. Отсутствует также механизм уточнения геометрии трубопровода, что ограничивает применение метода при больших перемещениях.

Исходя из этого цель настоящей работы – создание эффективной численной процедуры для анализа больших перемещений трубопровода в среде. Как и в [17], будут исследоваться только трубопроводы, расположенные в одной плоскости. Процедура должна базироваться на преимуществах методов прогонки в части минимизации числа неизвестных, и получаемые результаты должны быть сходящимися, как и в МКЭ. При ее разработке учитываются все возможные воздействия среды на трубу, наличие опор, разветвлений, нелинейный характер трения, различные ограничители перемещений и краевые условия. Ниже будет описан общий алгоритм и рассмотрены некоторые характерные тестовые задачи. Вместе с тем популяризация необходимости применения геометрически нелинейных подходов к расчету трубопроводов требует выделения некоторых модельных задач, на примере которых составляется общее понятие о характере деформирования трубопровода в зависимости от сочетания тех или иных исходных параметров.

1. Постановочные уравнения.

1.1. *Основные дифференциальные зависимости.* Рассмотрим плоский криволинейный элемент ds трубопровода (рис. 1). Введем локальную подвижную систему ортогональных векторов в локальной (связана с элементом ds) системе координат $\vec{t}(s)$ и $\vec{n}(s)$, где s – координата длины оси трубопровода. Вектор $\vec{t}(s)$ является касательным к оси и совпадает с направлением обхода трубопровода, а вектор нормали $\vec{n}(s)$ повернут относительно него на 90° против часовой стрелки. Введем также обычные декартовы координаты X и Y , с которыми связаны орты \vec{i} и \vec{j} , причем если трубопровод лежит в вертикальной плоскости, то ось Y направлена вверх против направления действия силы тяжести (рис. 1). Между векторами $\vec{t}(s)$ и $\vec{n}(s)$ имеют место следующие дифференциальные зависимости:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -k(s)\vec{t}; \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = k(s)\vec{n}, \quad (1)$$

где $k(s)$ – кривизна оси трубопровода в точке s , $k(s) = 1/\rho(s)$; $\rho(s)$ – радиус ее кривизны в точке s . Величина $k(s)$ является скалярной и может иметь различный знак: положительна, если элемент ds закручивается против часовой стрелки относительно нормали и касательной в начальной точке и отрицательна в противоположном случае. Касательный вектор $\vec{t}(s)$ одно-

значно характеризуется его наклоном к оси X . Угол наклона отсчитывается от вектора \vec{i} к $\vec{i}(s)$ против часовой стрелки и обозначается как $\theta(s)$, причем $0 \leq \theta(s) < 2\pi$.

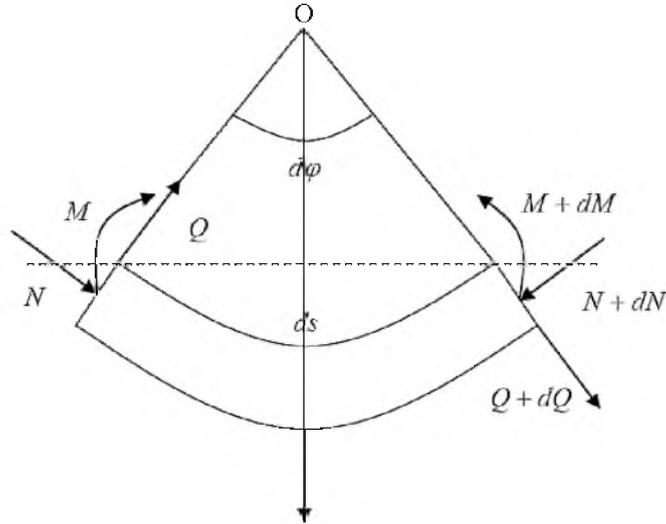


Рис. 1. Криволинейный элемент ds .

Полагаем, что каждая точка трубопровода (элемент ds) может подвергаться действию таких силовых факторов, как давление p (внутреннее, $p > 0$ или внешнее, $p < 0$); температурное нагружение ΔT , приводящее к изменению длины элемента; распределенные поперечная q_n и продольная q_t силы, направленные вдоль соответствующих векторов и вызванные реакцией среды; сила тяжести q_m с учетом выталкивающей силы жидкой среды q_j , действующей вдоль вектора \vec{j} (сила тяжести считается отрицательной).

В геометрически и физически линейной постановке основные дифференциальные соотношения, описывающие деформирование трубопровода, являются тривиальными:

а) уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{dQ(s)}{ds} + N(s)k(s) &= q_n(s) + q_m(s)\cos\theta(s) - p\pi R^2k(s); \\ \frac{dN(s)}{ds} - Q(s)k(s) &= q_t(s) + q_m(s)\sin\theta(s); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{dM(s)}{ds} = Q(s), \quad (3)$$

где поперечная сила $Q(s)$ направлена вдоль нормали к элементу ds , а продольная сила $N(s)$ – по направлению касательного вектора, положительное направление $M(s)$ определяется уравнением (3) – рис. 1 и приводит, как будет показано ниже, к увеличению угла наклона $\theta(s)$;

б) уравнения для перемещений и деформаций:

$$\frac{d\psi(s)}{ds} = k_{ad} = \frac{M(s)}{EI}; \quad (4)$$

$$\frac{dw(s)}{ds} + k(s)u(s) = \psi(s); \quad (5a)$$

$$\frac{du}{ds} - k(s)w(s) = -\frac{N}{EF} + \left(\alpha_T \Delta T - \nu \frac{pR}{Et} \right), \quad (5b)$$

где $\psi(s)$ – угол деформирования; u и w – перемещения точек оси в направлении касательной и нормали к оси; k_{ad} – дополнительное искривление оси (дополнительная кривизна) трубопровода вследствие действия изгибающего момента; E – в упругом случае равен модулю Юнга; α_T – коэффициент температурного расширения; ν – коэффициент Пуассона; I – момент инерции сечения, $I \approx \pi R^3 t$; F – площадь сечения, $F \approx 2\pi R t$.

Проблема учета больших перемещений состоит в том, что, во-первых, изменяется кривизна каждого элемента, равная сумме первоначальной (собственной) $k_0(s)$ и дополнительной $k_{ad}(s)$ кривизны элемента:

$$k(s) = k_0(s) + k_{ad}(s). \quad (6)$$

(В постановочных уравнениях (2)–(5) используется неизвестная заранее кривизна.) Во-вторых, в результате деформирования изменяется наклон оси трубопровода $\theta(s)$, который должен рассчитываться с учетом угла деформирования $\psi(s)$:

$$\theta(s) = \psi(s) + \theta_0(s), \quad (7)$$

где $\theta_0(s)$ – начальный угол наклона оси. Изменение угла приводит к изменениям ортов $\vec{i}(s)$ и $\vec{n}(s)$, а все постановочные уравнения содержат искомые неизвестные силы и перемещения, записанные в проекциях на эти орты.

1.2. Взаимодействие грунта с трубой. Силы взаимодействия трубопровода с грунтом – нелинейные и в общем случае имеют достаточно сложный характер. В литературных источниках используются различные подходы к их формализации и аналитическому описанию, среди которых известны принятые во ВНИИСТе [17, 18], в голландском стандарте NEN 3650 [19], американском стандарте ASCE [6]. Общим для них является идеализированное упругопластическое описание функций q_t и q_n , которые есть функциями от взаимного перемещения трубопровода и грунта.

Пусть имеем вектор смещения грунта $\vec{\Gamma}_{гр}$ и вектор смещения трубопровода $\vec{\Gamma}_{тр}$ в точке. Спроектируем вектор взаимного смещения $\vec{\Gamma}_{гр} - \vec{\Gamma}_{тр}$ на нормаль и касательную к трубопроводу. Абсолютная величина проекций

и будет аргументом для поиска значений функций q_n и q_t . Обобщенный график зависимости реакции грунта от взаимного смещения трубопровода и грунта показан на рис. 2. Характерными точками этого графика являются: q^0 , w^0 , по которым находят как тангенс угла наклона обобщенный коэффициент нормального сопротивления грунта C_y для поперечной реакции и обобщенный коэффициент касательного сопротивления C_x для продольной, а также значение q_B^0 , которое определяет пределы упругости при движении трубы вниз.

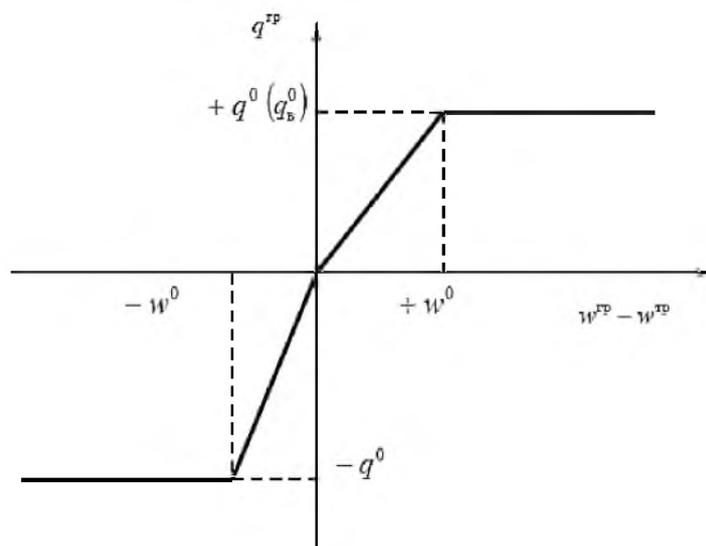


Рис. 2. Обобщенная диаграмма взаимодействия трубопровода с грунтом.

1.3. Граничные условия и опоры.

1.3.1. *Опоры и условия контакта.* Подземные трубопроводы часто содержат воздушные переходы, на которых могут находиться опоры и ограничители перемещения, например кожухи. Наличие опоры приводит к появлению сосредоточенных контактных сил P в некотором характерном для нее направлении, величина которых пропорциональна перемещению трубопровода и в общем случае описывается уравнением:

$$\lambda P = w - w_0, \quad (8)$$

где λ – коэффициент податливости, для жесткой опоры $\lambda = 0$; w – перемещение трубы в том же направлении; w_0 – начальное перемещение опоры.

Для односторонних опор условия контакта имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda P &= w - w_0; \\ P &= 0, \text{ если } w > w_0. \end{aligned} \quad (9)$$

В случае сосредоточенных ограничителей перемещения, когда трубопровод находится, например, в трубе большего диаметра (кожухе), условия контакта следующие:

$$\begin{cases} w(s) = \lambda P + w_0(s) & \text{при нижнем контакте, } P > 0; \\ w(s) - h = \lambda P + w_0(s) & \text{при верхнем контакте, } P < 0; \\ P = 0 & \text{без контакта,} \end{cases} \quad (10)$$

где h – максимальное поперечное смещение оси трубопровода относительно оси кожуха; $w_0(s)$ – начальное положение оси кожуха.

Часто опоры и ограничители движения обладают характеристиками трения, причем сила трения пропорциональна контактной силе и может быть направлена в одном из двух противоположных направлений. В общем случае условие трения записывается в виде

$$\begin{cases} T = k_{\text{тр}}|P|, & \text{если } u < 0; \\ T = -k_{\text{тр}}|P|, & \text{если } u > 0; \\ u = 0, & \text{если } -k_{\text{тр}}|P| < T < k_{\text{тр}}|P|. \end{cases} \quad (11)$$

Величина и направление сил трения зависят от истории нагружения. Поэтому необходимо предусмотреть опцию в алгоритме, учитывающую реальную последовательность нагружения.

1.3.2. *Граничные условия.* На каждом конце трубопровода запишем три граничных условия, описывающих связь перемещений с усилиями. Если трубопровод разветвляется, то в точке разветвления возникают три дополнительных неизвестных усилий и моментов, которые определяются с помощью трех граничных условий на появившемся конце трубопровода. В частном случае, если два конца трубопровода замыкаются, имеем шесть дополнительных условий равенства трех силовых (два усилия и момент) и трех деформационных (два перемещения и угол поворота) компонент.

Протяженность подземного трубопровода очень большая, поэтому на практике необходимо рассматривать только какую-то его часть. Отброшенный участок трубы заменяется специальными граничными условиями, полученными в результате аналитического решения для полубесконечного трубопровода. Поскольку для криволинейного трубопровода такого универсального решения не существует, а пластические решения для прямого трубопровода не позволяют учитывать историю нагружения, оптимальным является использование решений для прямых полубесконечных трубопроводов в условиях упругих взаимодействий с грунтом [18]. Однако это связано с дополнительными условиями применительно к длине рассматриваемой части трубопровода: характер поведения грунта и трубопровода в окрестности его концов должен быть упругим.

Постановочные линеаризованные уравнения для прямолинейного трубопровода получаются из (2)–(5), если кривизну $k(s)$ положить равной нулю везде, кроме первого уравнения (2), где $k(s)$ полагаем пропорциональной моменту, а значит, и второй производной от w . Тогда система уравнений разбивается на две независимые подсистемы второго порядка для продольных сил и перемещений и четвертого порядка для поперечной силы, момента, угла поворота и поперечного перемещения:

$$w^{IV} + \beta w'' + 4\alpha_y^2 w = q_m \quad \text{и} \quad u'' = \gamma u(s)/EF, \quad (12)$$

где

$$\alpha_y = \sqrt[4]{\frac{C_y}{4EI}}; \quad \beta = \frac{N + \pi p R^2}{EI}; \quad \gamma = \sqrt{\frac{C_x}{EF}}. \quad (13)$$

Для получения граничных условий обычно пренебрегают величинами β и q_m , а также рассматривают сходящиеся решения (12), что дает следующие связи между значениями искомых переменных на границах [12, 17]:

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{EI} &= 2\alpha_y^2 \left(\frac{\theta_0}{2} - w_0 \right), & \frac{Q_0}{EI} &= 2\alpha_y^3 \left(\frac{\theta_0}{\alpha_y} - 2w_0 \right), \\ N_0 - \left(\alpha_T \Delta T - \nu \frac{pR}{Et} \right) EF &= -\gamma EF u_0. \end{aligned} \quad (14)$$

Недостатки этих широко используемых в литературных источниках условий очевидны. В них не учитываются распределенная масса q_m и влияние обобщенной продольной силы $\beta EI = N + \pi p R^2$ на характер решения первого уравнения (12). Кроме того, очень часто приводится неверная трактовка усилия N в записи последнего граничного условия (14) как суммы реального значения и так называемой силы в свету $\pi p R^2$. В связи с этим приведем полные правильные граничные условия, вытекающие из линеаризованной постановки (12).

В соответствии с принятой системой знаков, при положительном β имеем сжатие, при отрицательном – растяжение. Исследование всех возможных решений (12) в зависимости от β свидетельствует о трех различных записях граничных условий:

центральные граничные условия (значение продольного усилия не достигает критического значения: $-4\alpha_y^2 < \beta < 4\alpha_y^2$). Тогда для начальных условий имеем

$$\frac{M_0}{EI} = -(A^2 + B^2) \left(w_0 - \frac{q_m}{4\alpha_y^2} \right) + 2B\theta_0; \quad (15a)$$

$$\frac{Q_0}{EI} = -(2A^2B + 2B^3) \left(w_0 - \frac{q_m}{4\alpha_y^2} \right) + (3B^2 - A^2)\theta_0; \quad (15б)$$

$$N_0 - \left(\alpha_T \Delta T - \nu \frac{pR}{Et} \right) EF = -\gamma EF u_0. \quad (15в)$$

где

$$A = \frac{\sqrt{4\alpha_y^2 + \beta}}{2}; \quad B = \frac{\sqrt{4\alpha_y^2 - \beta}}{2}; \quad (15г)$$

“большое” растяжение (продольное усилие меньше критического отрицательного значения $\beta \leq -4\alpha_y^2$). Граничные условия таковы:

$$\frac{M_0}{EI} = A^2 \left(w_0 - \frac{q_m}{4\alpha_y^2} \right), \quad \frac{Q_0}{EI} = A^2 \theta_0, \quad (16)$$

где

$$A = \sqrt{-\frac{\beta}{2} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 16\alpha_y^4}}{2}}, \quad (17)$$

причем выражение связи продольной силы с продольным перемещением не изменяется;

“большое” сжатие (продольное усилие больше критического положительного значения $\beta \geq 4\alpha_y^2$). Уравнения взаимосвязи граничных условий получить невозможно, поскольку все четыре решения (12) имеют вид $\cos(\lambda_{1,2}s)$, $\sin(\lambda_{1,2}s)$ и являются расходящимися. В этом случае необходимо увеличить длину рассматриваемого участка. Однако для обеспечения непрерывности алгоритма произвольно положим коэффициенты при $\cos(\lambda_{1,2}s)$, $\sin(\lambda_{1,2}s)$ равными нулю. Тогда граничные условия примут следующий вид:

$$\frac{M_0}{EI} = -A^2 \left(w_0 - \frac{q_m}{4\alpha_y^2} \right), \quad \frac{Q_0}{EI} = -A^2 \theta_0, \quad (18)$$

где

$$A = \sqrt{\frac{\beta}{2} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 16\alpha_y^4}}{2}}. \quad (19)$$

2. Алгоритм. Нелинейные задачи обычно решаются по принципу “предиктор-корректор”, т.е. нелинейная задача аппроксимируется линейной и по результатам ее расчета вносятся определенные последующие коррективы в процедуру линеаризации.

Как отмечалось выше, к наиболее известным относятся методы пошагового увеличения нагрузки: в некоторую начальную геометрию тела вносятся коррекции по результатам расчета при постоянно увеличивающейся нагрузке. Однако эти методы неприемлемы для анализа подземных трубопроводов, например при исследовании потери устойчивости при нагревании. При задании произвольной положительной температуры, меньшей критической, трубопровод не получает никаких перемещений. А небольшое ее повышение сверх критического значения приводит к резкому их росту. Кроме того, часто начальная геометрия подземного трубопровода неизвестна, есть информация только о траншее его прокладки. Поэтому в данной работе реализован контроль по перемещениям и предлагается оригинальный подход, основанный на введении понятий базового и поправочного решений.

2.1. Понятие базовых и поправочных (прогоночных) параметров.

2.1.1. Базовая геометрия и базовая нагрузка. Зададим некоторую (возможно пробную) начальную геометрию трубопровода и разобьем его на n элементарных участков. В результате получим начальные координаты каждой точки в глобальной декартовой системе координат X, Y . Назовем такую геометрию начальной базовой, а точки разбиения A_j^0 обозначим так: $A_j^0 = (X_j^{b,0}, Y_j^{b,0})$. Полагаем, что нижний индекс обозначает значение величины в точке с номером индекса, верхний – номер текущей итерации. Кроме координат каждой точки разбиения к начальной базовой геометрии относится длина каждого участка, его начальный угол наклона $\theta_j^0(s)$ к оси X и начальная кривизна $k_j^0(s)$.

Введем понятие “текущих базовых параметров” (на i -й итерации). Отметим, что в результате деформирования каждый элементарный участок трубопровода удлиняется на величину $du_j^{b,i}$ и приобретает кривизну $k_j^{b,i}$. Эти базовые параметры являются основными (первичными), т.е. с их помощью можно получить полную информацию о деформированном трубопроводе. Кроме того, вводятся дополнительные базовые параметры геометрии, учитывающие перемещение рассматриваемого участка, полученное в результате деформирования других участков трубопровода: угол наклона участка к оси X – θ_j^b ; базовая длина участка ds_j^b ; дополнительное (приобретенное) смещение точки, вызванное деформированием трубопровода $(X_j^{b,tr,i}, Y_j^{b,tr,i})$, $j = \overline{1, n}$ (рис. 3). Заметим, что базовые координаты на i -м шаге итерации находятся как сумма начального положения трубопровода и приобретенного движения $X_j^{b,i} = X_j^{b,0} + X_j^{tr,i}$, $Y_j^{b,i} = Y_j^{b,0} + Y_j^{tr,i}$.

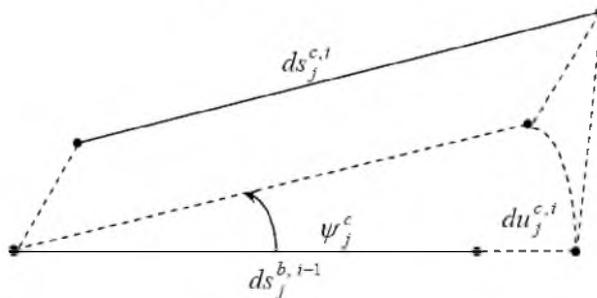


Рис. 3. Связь базовых параметров.

Понятно, что изменение базовой геометрии трубопровода (удлинение и изменение кривизны элементарного участка) произошло в результате действия некоторых нагрузок. Важно базовой геометрии поставить в соответствие те нагрузки, которые отвечают новой базовой геометрии. Исходя из этих соображений и вводится понятие базовых нагрузок, к которым относятся все силовые характеристики трубопровода: растягивающее усилие N_j^b , $j = \overline{1, n}$; изгибающий момент M_j^b , $j = \overline{1, n}$; перерезывающее усилие Q_j^b , $j = \overline{1, n}$.

Чтобы выполнять итерационный процесс, этих базовых параметров достаточно.

2.1.2. *Поправочные параметры.* Пусть имеем некоторое базовое решение, описываемое указанными выше геометрическими и силовыми базовыми параметрами. Поскольку базовое решение на рассматриваемой итерации не обязательно удовлетворяет всем шести дифференциальным уравнениям (2)–(5), вводим понятие поправочного решения, которое удовлетворяет следующим шести уравнениям, записанным для базовой геометрии:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ(s)}{ds^b} + N(s)k^b(s) = q_n(s) + q_m(s)\cos\theta(s) - P\pi R^2 k(s); \\ \frac{dN(s)}{ds^b} - Q(s)k^b(s) = q_t(s) + q_m(s)\sin\theta(s); \\ \frac{dM(s)}{ds^b} = Q(s); \\ \frac{d\psi(s)}{ds^b} = \frac{M(s) - M^b(s)}{EI}; \\ \frac{dw}{ds^b} + k^b(s)u(s) = \psi(s); \\ \frac{du}{ds^b} - k^b(s)w(s) = \left(\frac{N(s) - N^b(s)}{EF} + \left(\alpha_T \Delta T - \nu \frac{pR}{Et} \right) \right) \frac{ds_0}{ds^b}, \end{array} \right. \quad (20)$$

где q_n, q_t – усилия, прикладываемые при взаимодействии грунта с трубопроводом, определенные по базовым перемещениям.

Граничные условия для начальной точки записываются в зависимости от соотношения между коэффициентами α_y и β (13), где β определено для базового продольного усилия. Например, для центральных граничных условий (п. 1.3.2) они примут вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M_0 - M_0^b}{EI} = -(A^2 + B^2) \left(w_0 - \frac{q_m}{4\alpha_y^2} \right) + 2B\theta_0; \\ \frac{Q_0 - Q_0^b}{EI} = -(2A^2B + 2B^3) \left(w_0 - \frac{q_m}{4\alpha_y^2} \right) + (3B^2 - A^2)\theta_0; \\ N_0 - N_0^b - \left(\alpha_T \Delta T - \nu \frac{pR}{Et} \right) EF = -\gamma EFu_0, \end{array} \right. \quad (21)$$

где A и B определяются по формуле (15г).

2.1.3. *Процедура уточнения базового решения.* Процедуру уточнения базовых параметров следует выполнять в конце каждого шага i итерационного процесса. Поправочное решение может приводить к большим перемещениям и усилиям, в результате чего возможно нарушение принципа

линейности системы (20). Такое решение свидетельствует только о тенденции движения к правильному решению. Поэтому на полученные величины поправочных параметров накладываются некоторые достаточно разнообразные геометрические ограничения:

1) перемещения по касательной $|u|$ не должны быть больше, чем kD (D – диаметр трубы; k – коэффициент, который можно изменять в зависимости от условий задачи), либо они ограничиваются величиной u_0 , где u_0 – характерное значение усилий при взаимодействии грунта с трубопроводом (рис. 2);

2) ограничивать подобным образом поперечные перемещения нецелесообразно, поскольку они могут быть намного больше продольных. Более разумно ограничить углы поворота ψ каждого участка, так как в постановочных уравнениях принято, что изменение углов вызвано только изгибающими моментами. В действительности угловая деформация приводит к продольной деформации ε_x , которая не учитывается в постановочных уравнениях:

$$\varepsilon_x \approx 0,5(\psi^2 - \psi k(s)ds), \quad (22)$$

где $k(s)$ – кривизна.

Указанные ограничители применяются следующим образом: соответствующие максимальные по модулю для всего трубопровода рассчитанные геометрические поправочные параметры сравниваются с ними. Если расчетные величины больше принятых ограничителей, то вводится коэффициент движения f на параметры поправочного решения, представляющий собой отношение ограничителя к максимальному расчетному значению. Для улучшения сходимости и избежания флуктуации вокруг правильного решения вводятся дополнительные правила учета знака решения на предыдущем шаге: если в точке, где расчетный параметр на предыдущем шаге был максимальным по модулю по всему трубопроводу и на следующем шаге имеет тот же знак, то считаем, что решение “идет” в том же направлении. Если решение движется в одном направлении, то максимальный коэффициент движения f увеличиваем в c_1 раз, если решение изменяет направление по сравнению с предыдущим шагом итерации, то f уменьшаем в c_2 раз, при этом $c_2 > c_1$. В любом случае коэффициент движения f не может быть больше, чем установленный из геометрических соображений.

Рассмотрим, собственно, процедуру уточнения базовой геометрии. Существуют две возможности ее уточнения. Первая заключается в уточнении первичных величин деформации: удлинения $du_j^{b,i}$ и кривизны $k_j^{b,i}$. Эти базовые параметры – основные (первичные), т.е. по ним можно получить полную информацию о всех геометрических характеристиках отрезка трубопровода, например, в результате дополнительной (третьей) прогонки от начала трубопровода до его конца. Однако при этом могут накапливаться ошибки, и более предпочтительным является одновременное независимое уточнение всех геометрических характеристик. Поскольку w – перемещение по нормали, u – по касательной, то, очевидно, что глобальная геометрия

(координаты каждой точки в абсолютной системе координат) будет уточняться с помощью выражения

$$\bar{\Pi}_j^{tr,b,i} = \bar{\Pi}_j^{tr,b,i-1} + (fu_j^c)\bar{t}_j^{b,i-1} + (fw_j^c)\bar{n}_j^{b,i-1}, \quad (23)$$

где $\bar{\Pi}_j^{tr,b,i}$ – радиус-вектор каждой точки, $\bar{\Pi}_j^{tr,b,i} = X_j^{tr,i}\bar{i} + Y_j^{tr,i}\bar{j}$.

В рамках данной идеологии уточнение угла происходит так:

$$\theta_j^{b,i} = \theta_j^{b,i-1} + f\psi_j^c, \quad (24)$$

где ψ_j^c – угол, найденный в результате решения системы (20).

Изменение кривизны происходит за счет действия изгибающих моментов. Поэтому ее уточнение будем осуществлять по формуле

$$k_j^{b,i} = k_j^{b,i-1} + f \frac{M_j^c}{EI_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (25)$$

где M_j^c – поправочные моменты в результате решения системы (20).

Самый сложный вопрос – это уточнение длины элемента, поскольку угловая деформация также приводит к ее увеличению (22). С одной стороны, ограничения на перемещения уменьшают вклад угловых деформаций, с другой стороны, их желательно учитывать. Рассматривая изменение длины криволинейного элемента (рис. 3) до и после выполнения текущей итерации, можно получить

$$ds_j^{b,i} = ds_j^{b,i-1} \sqrt{\left(1 + f \frac{du_j^c}{ds^{b,i-1}}\right)^2 + (f\psi_j^c)^2 - f\psi_j^c\theta_j^{b,i-1}}, \quad (26)$$

где $du_j^c/ds^{b,i-1}$ – деформация элемента, найденная в результате решения системы (20).

Уточнение базовых нагрузок выполняется в полном соответствии с приобретенными деформациями на данной итерации. Таким образом, для базовых моментов, продольных и поперечных усилий уточнение происходит так:

$$M_j^{b,i} = M_j^{b,i-1} + f(M_j^c - M_j^{b,i-1}); \quad (27a)$$

$$N_j^{b,i} = N_j^{b,i-1} + \left(1 - \sqrt{\left(f \frac{du_j^c}{ds_j^{b,i-1}} + 1\right)^2 + (f\psi_j^c)^2 - f\psi_j^c\theta_j^{b,i-1}}\right) EF; \quad (27b)$$

$$Q_j^{b,i} = Q_j^{b,i-1} + f(Q_j^c - Q_j^{b,i-1}), \quad (27в)$$

где Q_j^c – усилия, полученные из системы (20).

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока текущие “поправочные” перемещения не будут пренебрежимо малыми по сравнению с начальными.

2.2. Понятия траншеи и искривленного трубопровода. Эти понятия являются очень важными моментами построителя геометрии и процедуры решения. Часто начальное положение трубопровода неизвестно, известен только профиль траншеи, в которую он уложен, причем траншея может иметь только одностороннее воздействие. Уложенный искривленный трубопровод назовем *естественным*. Для такого трубопровода характерно то, что его реальная геометрия получена в результате приложения к прямолинейному трубопроводу некоторой системы изгибающих моментов, которые необходимо учитывать при расчете еще перед началом итерационного процесса с помощью введения начальных базовых моментов, пропорциональных кривизне траншеи k_j^s , введенной на этапе построения геометрии:

$$M_j^{b,0} = k_j^s EI_j.$$

Заводской искривленный трубопровод характеризуется отсутствием начальных базовых моментов: $M_j^0 \equiv 0$ при наличии начальной кривизны (на практике это значит, что трубопровод получен в результате заводской выплавки). В расчетах принимается, что текущая геометрия отвечает ненагруженному состоянию трубопровода.

В программном интерфейсе построение трубопровода может выполняться с помощью встроенных элементов (упругоизогнутый элемент как траншея или как заводской гиб и прямая труба) либо по точкам. Понятно, что для встроенных элементов начальная кривизна известна. В случае задания по точкам определяется линия траншеи, а кривизна рассчитывается из условий непрерывности оси и ее первой производной (касательной).

2.3. Усовершенствованный метод прогонки. Численный вид системы (20) будет представляться системой линейных уравнений с 12 неизвестными сил и перемещений. Сокращенно при отсутствии опор и разветвлений ее можно записать в виде $\bar{S}_k = A_k \bar{S}_{k-1} + \bar{B}_k$, где $\bar{S}_k = (Q_k, N_k, M_k, \theta_k, u_k, w_k)$; A_k – матрица связи между $(k-1)$ -м и k -м участками; \bar{B}_k – вектор свободных членов. Связь между основными параметрами начала и конца трубопровода получим в результате многократного перемножения матриц связи и преобразований свободных членов промежуточных узлов разбиения: $\bar{S}_k = A \bar{S}_0 + \bar{B}$.

Рассмотрим более сложные построения матрицы связи для трубопровода с опорами и разветвлениями.

Матрица связи для трубопровода с опорами. Поделим матрицу связи на три части (рис. 4): I – описывает связь между основными параметрами (Q, N, M, θ, u, w) при отсутствии опор, ее размерность 6×6 ; II – пока-

зывает, как влияют реакции опор на связь между основными параметрами, ее размерность $6 \times n_0$ (n_0 – количество опор на трубопроводе); III – описывает связь между реакциями опор, податливостью опоры и перемещениями.

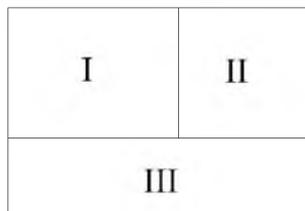


Рис. 4. Схема матрицы связи для трубопровода с опорами.

Уравнение связи формально можно представить в виде

$$\vec{S}_N = \left(\prod_{j=1}^N A_j \right) \vec{S}_0 + \sum_{i=1}^N \left(\prod_{j=i+1}^N A_j \right) \vec{B}_i + \sum_{i=1}^{n_0} \left(\prod_{j=l_i}^N A_j \right) \vec{P}_{l_i},$$

где первое слагаемое записывается в первую часть матрицы связи, второе – в столбец свободных членов, третье (\vec{P}_k – неизвестные реакций опор) – во вторую часть матрицы связи; l_i – номер точки разбиения, в которой находится опора с порядковым номером i . Третья часть матрицы связи состоит из уравнений, которые строятся следующим образом: если, например, опора ограничивает поперечные перемещения, то в соответствующий номеру опоры ряд записывается шестая строчка (она отвечает за перемещения w) из первой и второй частей матрицы, а в столбец с номером опоры – значение податливости, аналогично в конец столбца свободных членов добавляется свободный член с шестым номером.

Матрица связи для трубопровода с разветвлениями. Существуют два подхода к расчету трубопроводов с разветвлениями. В соответствии с первым в точке разветвления устанавливаются следующие правила:

$$\vec{W}_{entr} = \vec{W}_{ex}^1 = \vec{W}_{ex}^2 \quad \text{и} \quad \vec{Q}_{entr} = \vec{Q}_{ex}^1 + \vec{Q}_{ex}^2,$$

где $\vec{Q} = (Q, N, M)$ и $\vec{W} = (\theta, u, w)$ – компоненты сил и перемещений вектора переменных $\vec{S} = (\vec{Q}, \vec{W})$; \vec{Q}_{entr} – усилия, которые входят в узел разветвления; $\vec{Q}_{ex}^1, \vec{Q}_{ex}^2$ – усилия, которые выходят с узла разветвления по первой и второй веткам соответственно. При этом полагаем, что имеют место три разных участка разбиения. Согласно второму подходу принимаем, что в точке разветвления существуют два участка: сначала рассчитываем один из них с неизвестными \vec{Q} в точке разветвления, затем находим эти неизвестные уже при обходе второго участка. В случае повторного замыкания концов разветвления недостающие граничные условия получаем из равенства компонент сил и перемещений в точке замыкания.

Матрица связи при разбиении. Иногда бывает полезно разбить рассчитываемый участок трубопровода на несколько участков и требовать выполнения условий непрерывности на границах этих участков: $\bar{S}_N = \bar{S}_{N+1}$, если разрыв состоялся в точке с номером N .

Хотя такая процедура увеличивает количество неизвестных, все же при этом обеспечивается скорость сходимости решения, что делает эффективным расчет длинных трубопроводов. Более детально эту процедуру рассмотрим в следующем разделе с использованием конкретных примеров.

Построенную систему уравнений дополним граничными условиями (три начальных и три конечных). В результате находим все (шесть) неизвестные основные параметры в начальной точке трубопровода и все реакции опор. На заключительном этапе части прогонки отыскиваем значение основных параметров в каждой точке.

3. Результаты расчетов.

3.1. Закручивание консоли под действием приложенного на свободном конце изгибающего момента. С целью проверки корректности численной процедуры для больших перемещений рассмотрим ряд задач. Одна из них – это расчет деформации консоли ($EF = 2 \cdot 10^6$ Н; $EI = 2 \cdot 10^7$ Н·м²; $l = 1000$ м), к свободному концу которой приложен изгибающий момент. На рис. 5 показана деформированная балка для разных значений изгибающего момента. Результаты расчета сравнивали с теоретическим решением [20]. Как видно из данных таблицы, численное решение достаточно хорошо согласуется с теоретическим.

Сравнение численных результатов расчета с аналитическими

$\frac{Ml}{2\pi EI}$	x_2/l [20]	x_2/l (наши данные)
0,25	0,63662505	0,6368647
0,50	0,63670545	0,6384041
0,75	0,21235461	0,2146023
1,00	$1,052 \cdot 10^{-15}$	$9,36 \cdot 10^{-10}$

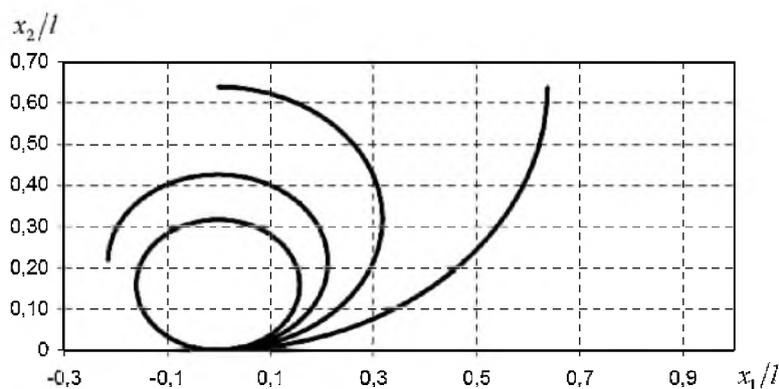


Рис. 5. Закручивание консоли на воздухе.

3.2. **Потеря устойчивости прямой трубы на воздухе.** Исследуем прямолинейный трубопровод с участком на воздухе длины l . Края трубопровода находятся в жестком грунте. Таким образом, его можно рассматривать как стержень с жесткой заделкой на краях. Рассчитаем критическую температуру, которая отвечает эквивалентным сжимающим усилиям при потере устойчивости. Для прямолинейного стержня значение критического усилия, согласно формуле Эйлера, запишем в виде [18]

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{0,25l^2}.$$

Поскольку эквивалентное критическое усилие от температуры $N_{\text{кр}} = \alpha_T \Delta T E F$, критическая температура

$$\Delta T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 I}{0,25 \alpha_T F l^2}.$$

Действительно, при задании в программном комплексе температуры ниже критического значения $\Delta T_{\text{кр}}$ прямолинейный трубопровод не изменял изначальную форму, но при температуре на 2-3°C выше наступал процесс потери устойчивости.

Отметим, что аналогичные результаты можно получить, если изменять не температуру, а внутреннее давление.

3.3. **Деформирование подземного трубопровода, уложенного с начальным изгибом.** Рассмотрим заглубленный трубопровод, находящийся под действием сжимающих усилий, вызванных повышением температуры и внутреннего давления.

Аналитическую зависимость сопротивления грунта поперечным перемещениям трубы можно выразить в виде

$$q = \alpha w \quad \text{при} \quad 0 < w \leq w_{\text{пр}};$$

$$q = q_{\text{пр}} \left(1 + \frac{c_p}{\alpha} \right) - c_p w \quad \text{при} \quad \frac{q_{\text{пр}}}{\alpha} < w \leq H,$$

где $q_{\text{пр}}$ – предельное сопротивление грунта поперечным перемещениям трубы вверх; H – высота засыпки грунта.

Симметричная форма начального прогиба трубопровода при $0 < x < \infty$ такова:

$$w_0 = f_0 e^{-0,75x/l} \left[\sin\left(\frac{0,75\pi x}{l}\right) + \cos\left(\frac{0,75\pi x}{l}\right) \right].$$

В [18] были рассчитаны перемещения и изгибающие моменты начального прогиба $\bar{f}_0 = 1$ при разных значениях продольного усилия \bar{S} и длины полуволны \bar{l} . Решение выполнено в безразмерных параметрах: $\bar{f}_0 = f_0/i -$

отношение стрелки начального прогиба к радиусу инерции трубы; $\bar{S} = S / (2\sqrt{EI\alpha})$ – отношение продольного усилия к критической силе в бесконечной балке; $\bar{l} = l / (\pi \sqrt[4]{EI / (16\alpha)})$ – отношение длины полуволны к длине полуволны, которая отвечает потере устойчивости бесконечной балки.

На рис. 6 представлена зависимость безразмерного параметра величины прогиба $\bar{f} = f/i$ для стрелки начального прогиба $\bar{f}_0 = 1$ от длины полуволны \bar{l} при продольном усилии $\bar{S} = 0,65$, полученная по нашим расчетам и расчетам [18]. Как видно, результаты расчетов достаточно хорошо согласуются между собой.

Кроме того, можно указать форму деформированного трубопровода. На рис. 7 показана форма (начальная и деформированная) трубопровода для полуволны длиной $\bar{l} = 1$ и 2.

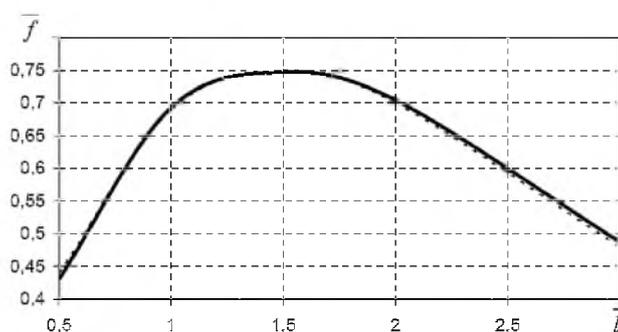


Рис. 6. Зависимость стрелки максимального прогиба от длины полуволны при $\bar{S} = 0,65$ (сплошная линия – наши данные, штриховая – по [18]).

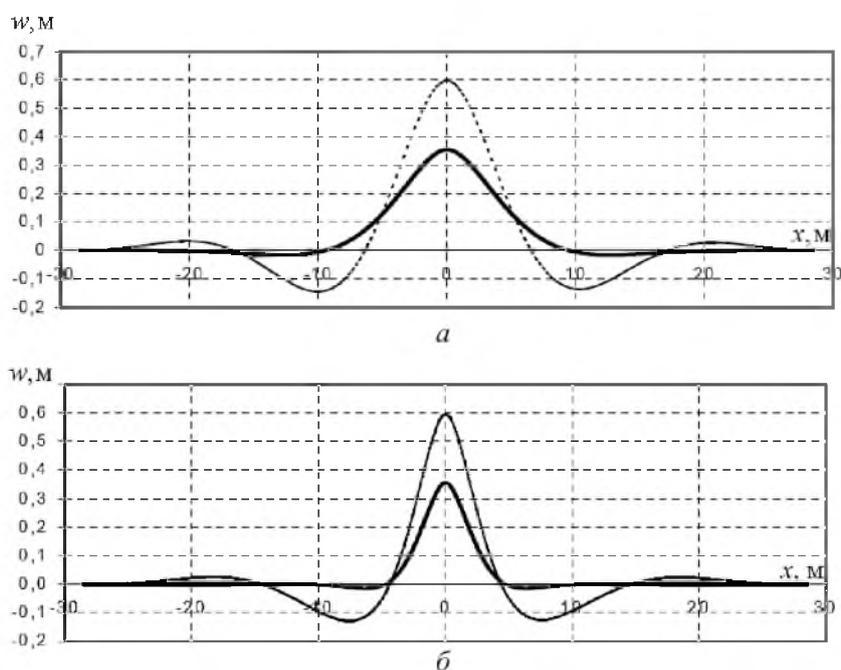


Рис. 7. Форма деформированного трубопровода: а – $\bar{l} = 1$; б – $\bar{l} = 2$.

3.4. **Задачи на всплытие трубопровода.** Задачи на всплытие имеют практическое применение при прокладке подводных трубопроводов. Рассмотрим следующий пример: необходимо узнать, какую форму примет труба длины l , один из концов которой находится в грунте, а другой – прикреплен к лебедке на корабле и спускается вниз по желобу радиуса кривизны r . В разработанном программном комплексе изначально зададим трубу длины l , предполагая, что она спускается с корабля вертикально вниз. При этом система (12) решается с новыми граничными условиями: фиксируются продольные и поперечные усилия на конце трубопровода (возле корабля) и прикладывается растягивающая нагрузка вначале, т.е. $W_k = 0$; $U_k = 0$; $Q_k = 0$ и $N_0 = -N_{app}$. Остальные два начальных граничных условия остаются стандартными. Эта же задача решалась в работе [21] для трубы с такими параметрами: внешний диаметр 914,4 мм; толщина стенки 17,8 мм; вес трубы в воде 0,883 кН/м (с учетом выталкивающей силы); вес трубы на воздухе 9,610 кН/м; радиус кривизны желоба 228,6 м; растягивающее усилие 588,6 кН; глубина заложения 150 м. Расстояние от уровня моря до положения трубы на желобе ее спуска равно 13,2 м. Уравновешенное положение трубопровода и его кривизна представлены соответственно на рис. 8 и 9. Геометрии уравновешенных трубопроводов совпадают, а несовпадение кривизны можно объяснить тем, что аналитическое решение не может точно смоделировать кривизну трубопровода на краю желоба.

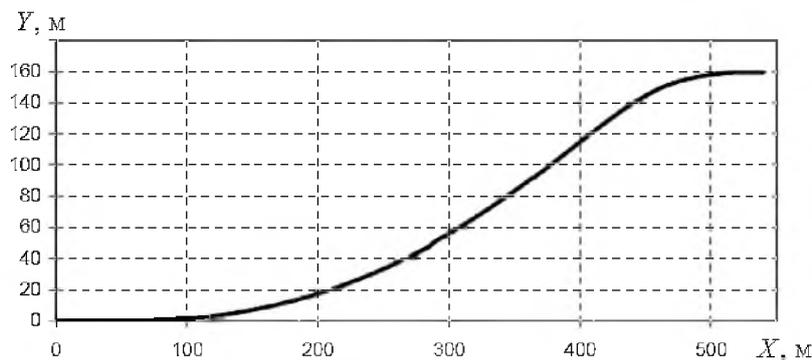


Рис. 8. Геометрия уравновешенного подводного трубопровода.

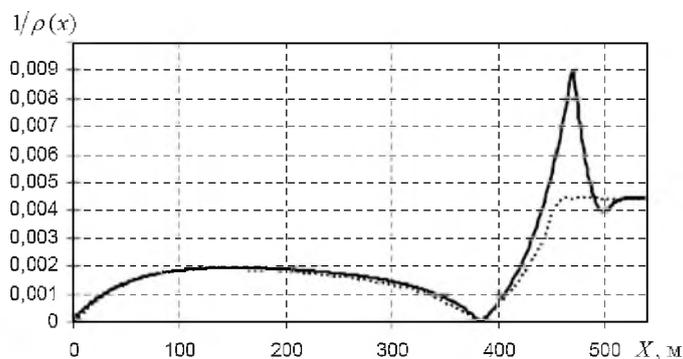


Рис. 9. Кривизна уравновешенного подводного трубопровода (сплошная линия – численное решение, пунктирная – аналитическое решение [21]).

3.5. Прокладка подземных трубопроводов. Магистральные трубопроводы являются в основном подземными и из экономических соображений по возможности прокладываются по прямой линии. Вынужденное изменение траектории его оси производится с помощью упругоизогнутых труб либо (в отдельных случаях) криволинейных вставок (заводские гибы труб).

Для тестирования расчетного модуля рассмотрим сравнения численных результатов с аналитическим решением, полученным ранее [8]. Исследуется трубопровод с параметрами: внешний радиус трубы 0,1778 м; толщина стенки 0,00792 м; радиус кривизны упругоизогнутого участка 300 м, угол 5° . На рис. 10 показано изменение изгибающих моментов M в зависимости от продольной координаты X . Для этой задачи теоретическое и численное решения полностью совпадают.

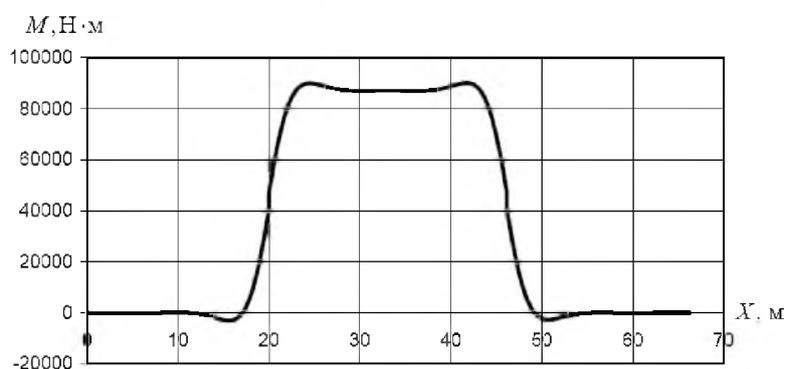


Рис. 10. Зависимость изгибающих моментов от X для подземногогиба.

3.6. Оптимальное разбиение. Выбор оптимального разбиения – важный фактор, влияющий на итерационный процесс. С этой целью введены два понятия: элемент разбиения и элемент сопряжения.

Элемент разбиения выбирается из соображений оптимального синтеза, обеспечивающего как точность решения, так и скорость (имеется в виду время прохождения одного итерационного шага) сходимости. Для этого предварительно отыскиваем приблизительную длину волны λ и выбираем элемент разбиения длиной $\lambda/20$. Этого, как показали расчеты, достаточно для того, чтобы удовлетворить представленным выше двум условиям для изначально прямолинейного участка трубопровода.

Элемент сопряжения выбирается в основном из соображений скорости сходимости (имеется в виду количество итераций для достижения правильного решения). Например, часто при расчете напряженно-деформированного состояния трубопровода под воздействием подвижек грунта известна только примерная форма деформированного трубопровода. Если в ней присутствуют “длинные” прямолинейные участки, то это существенно замедлит скорость сходимости ввиду трудности описания функциями $e^{-\lambda x}$ и $e^{\lambda x}$ прямой линии. Поэтому целесообразно изначально выделить эти участки в отдельные элементы сопряжения. Такая операция добавит новые переменные (п. 3.3), но возникшее при этом замедление (имеется в виду время прохождения одного итерационного шага) будет значительно меньше, чем

ускорение при введении элементов сопряжения. Так, без введения элементов сопряжения для трубы длиной 100 м и сдвижки грунта посередине на участке 30 м интенсивностью 0,2 м правильное решение находится за 3000 итерационных шагов, а с введением элементов сопряжения вначале трубы длиной 10 м и в конце длиной 10 м – за 900 шагов.

Отметим, что механизм введения оптимальной длины элемента разбиения достаточно просто автоматизировать, так как по характеристикам грунта можно легко найти длину волны решения, однако этого недостаточно для выбора элементов сопряжения, в таком случае все зависит от пользователя программного комплекса.

Заключение. Разработана эффективная численная процедура для расчета напряженно-деформированного состояния трубопровода в среде с возможным наличием опор и разветвлений в геометрически нелинейной постановке. Ее особенность состоит в использовании оригинальных понятий базового и поправочного решений, которые в отличие от известных методов приближения по нагрузкам, реализуют последовательное приближение по перемещениям.

Базовое решение состоит из зафиксированных на данной итерации перемещений и внутренних усилий, поправочное – представляет собой решение системы постановочных уравнений в линеаризованной постановке для заданного базового положения трубопровода, в котором “вмонтированы” соответствующие базовые внутренние усилия. Поправочное решение есть результат несоответствия между зафиксированным внутренним положением трубопровода и приложенными к нему внешними нагрузками. Базовое решение уточняется путем добавления к нему поправочного решения, умноженного на коэффициент движения, который ограничивает абсолютную величину максимальных перемещений или углов, а также зависит от изменения направления поправочных перемещений по сравнению с таковыми на предыдущей итерации. Считается, что получено правильное решение, если поправочное решение равно нулю.

Для нахождения поправочного решения реализован эффективный метод прогонки, который сводит решение дифференциальных уравнений к решению системы линейных уравнений, количество переменных которой составляет 12 плюс количество сосредоточенных опор и три переменных на каждое разветвление.

В случае упругого взаимодействия трубы с грунтом обычный метод прогонки становится медленно сходящим. Это связано с тем, что решения выражаются функциями типа $e^{-\lambda x}$ и $e^{\lambda x}$. Поэтому в численной процедуре предусмотрена возможность “рассечения” таких участков на несколько. Для каждого дополнительного участка вводятся 12 неизвестных и реализуется процедура прогонки. Дополнительные уравнения составляются из условий равенства неизвестных в точках сопряжения соседних участков. Это увеличивает количество переменных в расчетной системе линейных уравнений, но на порядок уменьшает количество итераций, которое необходимо для получения правильного решения.

На основе точного аналитического решения для полубесконечного трубопровода в упругой среде при продольно-поперечном изгибе сформу-

лированы граничные условия. Это позволяет рассчитывать полубесконечные участки трубопровода, заменяя их соответствующими граничными условиями.

Проверка расчетного алгоритма осуществлялась с помощью приведенных в литературных источниках численных и теоретических решений: закручивание консоли под действием изгибающего момента; деформирование трубопровода с начальным прогибом; прокладка подводных трубопроводов с корабля; потеря устойчивости на воздухе. Результаты тестирования показали высокую точность и скорость сходимости разработанной численной процедуры.

Резюме

Розроблено ефективну числову ітераційну процедуру для аналізу напружено-деформованого стану плоского трубопроводу в середовищі з урахуванням можливої наявності опор і розгалужень. Постановочні рівняння рівноваги і геометричні рівняння, що використовуються, записані в геометрично нелінійній постановці і доповнені граничними умовами, отриманими аналітично для напівнескінченного трубопроводу при поздовжньо-поперечному пружному згині. Розглядається пружно-пластичний закон взаємодії трубопроводу з ґрунтом при можливості додаткового обмеження абсолютних переміщень трубопроводу. Алгоритм розрахунку базується на поняттях коректуючого і базового розв'язків. Базовий уточнюється на кожному ітераційному кроці з використанням коректуючого розв'язку. Коректуючий розв'язок – це безпосередній розв'язок системи лінеаризованих рівнянь, у якій, наприклад, для визначення зусиль взаємодії труби з ґрунтом використовуються базові переміщення трубопроводу. Алгоритм ґрунтується на ефективному методі прогонки на кожному ітераційному кроці, який мінімізує кількість невідомих. Результати розрахунків зіставляються з приведеними в літературних джерелах числовими і теоретичними розв'язками: закручування консолі під дією згинального моменту на кінці; прокладка підводного трубопроводу; втрата стійкості на повітрі та ін.

1. *СНиП 2.05.06-85*. Магистральные трубопроводы. Строительные нормы и правила. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1985. – 52 с.
2. *ВСН 007-88*. Строительство магистральных и промышленных трубопроводов. Конструкции и балластировка. – М.: ВНИИСТ, 1989. – 32 с.
3. *ВБН*. Магістральні трубопроводи. Капітальний ремонт. Розрахунок на міцність та стійкість лінійних ділянок магістральних газо- та нафтопроводів діаметром від 377 до 1200 мм. – Київ, 2000. – 56 с.
4. *ASME B31.8-1992*. Gas Transmission and Distribution Piping Systems. – 1992. – 83 p.
5. *Айнбиндер А. и др.* Прочностные критерии в американских нормах проектирования нефтегазопроводов и их сопоставление с критериями российских норм СНиП 2.06.06-85 // Газовая пром-сть. – 1994. – № 2. – С. 31 – 34.

6. *Guideline for the Design of Buried Steel Pipe*. – American Society of Civil Engineers (ASCE), 2001. – 83 p.
7. *Bolt R. and Kulik G. R. Safety in European gas transmission pipelines; EGIG shows its continuing improving safety performance: 22nd IGU World Gas Conf. (June 1–5, Tokyo)*. – Tokyo, 2003. – P. 31 – 44.
8. Орыняк И. В., Радченко С. А. Напряженное состояние в криволинейных подземных трубах // Пробл. прочности. – 2003. – № 4. – С. 93 – 104.
9. Бородавкин П. П. Подземные магистральные трубопроводы (проектирование и строительство). – М.: Недра, 1982. – 384 с.
10. Харионовский В. В. Повышение прочности газопроводов в сложных условиях. – Л.: Недра, 1990. – 180 с.
11. Віслобіцький П. А. Розрахунки граничних станів колон труб та трубопроводів. – Київ: Логос, 1997. – 364 с.
12. Билобран Б. С., Пискозуб Л. Й. Продольно-поперечный изгиб полубесконечного подземного трубопровода // Вестн. Львов. политехн. ин-та. Теплоэнергетические системы и устройства. – 1986. – № 208. – С. 3 – 6.
13. *Waszczyszyn Z., Cichon Cz., and Radwannska M. Stability of Structures by Finite Element Methods*. – Elsevier, 1994. – 350 p.
14. *O'Rourke M. J. and Liu X. Response of Buried Pipelines Subject to Earth Effects*. – New York: MCEER, 1999. – 212 p.
15. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.
16. Светлицкий В. А. Механика стержней. В 2 ч. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
17. Айнбиндер А. Б., Камерштейн А. Г. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. – М.: Недра, 1982. – 341 с.
18. Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. – М.: Недра, 1991. – 287 с.
19. *NEN 3650. Requirements for Steel Pipeline Transportation Systems, Dutch Standard, Netherlands Normalisatie-Instituut*. – 1998.
20. *Petrov E. and Geradin M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Pt. 1. Beam concept and geometrically exact nonlinear formulation // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* – 1998. – No. 165. – P. 43 – 127.
21. *Guarracino F. and Mallardo V. A refined analytical analysis of submerged pipelines in seabed laying // Appl. Ocean Res.* – 1999. – No. 21. – P. 281 – 293.

Поступила 21. 11. 2005