

К вопросу об использовании степенной функции для описания результатов усталостных испытаний

Б. С. Шульгинов, А. П. Коломиец

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Анализируются особенности степенной функции при описании кривой усталости. Показана взаимосвязь между кривыми усталости, построенными по сопряженным регрессиям. Приведены формулы для определения параметров уравнения кривой усталости по средним значениям циклических долговечностей при заданных напряжениях.

Ключевые слова: кривая усталости, сталь, степенная функция, регрессия, параметры линейного уравнения.

При построении осредненной кривой усталости, соответствующей 50%-ной вероятности разрушения, наиболее часто используется степенная функция [1–3]

$$\sigma^m N = C, \quad (1)$$

где σ – напряжение; N – число циклов до разрушения; m – показатель степени, равный тангенсу угла наклона линейного участка кривой усталости к оси ординат (в логарифмических координатах).

В зависимости от поставленной задачи уравнение кривой усталости может быть записано в виде

$$N = \frac{C}{\sigma^m} \quad (2)$$

или

$$\sigma = \left(\frac{C}{N} \right)^{1/m}. \quad (3)$$

Кривую усталости рекомендуется строить в двойных логарифмических или полулогарифмических координатах одним из следующих методов: методом графического интерполирования экспериментальных результатов или методом наименьших квадратов [4]. При графическом интерполировании получается одна кривая усталости, параметры которой m и C не зависят от вида уравнения (2) или (3). При использовании метода наименьших квадратов, учитывая логарифмически нормальный закон распределения долговечностей, зависимости (2) и (3) предварительно логарифмируют:

$$\lg N = \lg C - m \lg \sigma \quad (4)$$

и

$$\lg \sigma = \frac{1}{m} \lg C - \frac{1}{m} \lg N. \quad (5)$$

Эти линейные функции обычно представляют [5, 6] в более общем виде

$$\hat{x} = a - my \quad (6)$$

и

$$\hat{y} = b - kx, \quad (7)$$

где $a = \lg C$, $b = \lg C/m$, $k = 1/m$ – параметры уравнений кривых усталости.

Определение параметров уравнений (6) и (7) методом наименьших квадратов приводит к нарушению тождества данных уравнений. Это значит, что они описывают разные кривые усталости, которые имеют различный угол наклона и пересекаются в точке, координатами которой являются средние значения \bar{x} и \bar{y} . Поэтому коэффициенты b и k в уравнении (7) нельзя определить по соответствующим коэффициентам a и m уравнения (6). В теории корреляции эти уравнения используются для описания линейной зависимости какой-либо одной случайной величины от другой. Уравнение (6) называют регрессией \hat{x} по y (или \hat{x} на y), уравнение (7) – регрессией \hat{y} по x (или \hat{y} на x) [7–9]. Эти регрессии иногда называют прямыми, учитывая, что их линии являются прямыми [7, 9].

В работе [5], где рассматриваются вопросы сопротивления материалов усталости, уравнения (6) и (7) названы обратной и прямой регрессией соответственно. В данном случае название регрессии связано не с видом теоретической зависимости, а с видом зависимости одной случайной величины от другой, т.е. прямой регрессией называется зависимость (7), а обратной – зависимость (6). Поскольку зависимость случайной величины N от напряжения σ в принципе не отличается от зависимостей других случайных величин, далее будем использовать общепринятую в теории корреляции терминологию. В работах [5, 7] приведены формулы, по которым удобно определять параметры уравнений (6) и (7). В несколько измененном виде применительно к описанию кривой усталости, когда x уменьшается с увеличением y , они представлены ниже:

для регрессии \hat{x} по y

$$a = \frac{\sum x_i \sum y_i^2 - \sum (x_i y_i) \sum y_i}{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}; \quad (8)$$

$$m = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum (x_i y_i)}{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}; \quad (9)$$

для регрессии \hat{y} по x

$$b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum (x_i y_i) \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}; \quad (10)$$

$$k = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad (11)$$

где n – общее число испытанных до разрушения образцов на всех уровнях напряжений; i – порядковый номер образца, изменяющийся от единицы до n .

Если график кривой усталости строить в виде прямой линии в логарифмических координатах, то в зависимостях (6)–(11) имеем $x_i = \lg N_i$, $y_i = \lg \sigma_i$, если в полулогарифмических координатах, то $-x_i = \lg N_i$, $y_i = \sigma_i$. Как показали вычисления, выбор системы координат влияет на средне-квадратическое отклонение по долговечности. Поэтому следует выбирать систему координат, при которой отклонение по долговечности будет минимальным, что обычно не учитывается в нормативных документах.

Известно крайне мало литературных источников, где описывается анализ связи между кривыми усталости, определенными по регрессиям \hat{x} по y и \hat{y} по x , которые в этом случае называются сопряженными регрессиями. Например, в работе [5] приведены результаты испытаний гладких образцов нормализованной стали 40 в условиях консольного изгиба с вращением и значения параметров уравнений сопряженных линий регрессий, определенных по формулам (8)–(11). Несмотря на то что получены разные значения параметров, на рис. 1.82 [5] представлена только одна кривая усталости, построенная методом графической интерполяции, а линии, соответствующие сопряженным регрессиям, не показаны. Поэтому непонятна цель определения в работе [5] параметров линий регрессий по уравнениям (8)–(11). Проведенный анализ результатов испытаний стали 40 свидетельствует, что кривые усталости, параметры которых определены по зависимостям (8)–(11), имеют заметно разные углы наклона, а кривая усталости, полученная по методу графической интерполяции, не лежит между ними и у нее самый большой угол наклона, что говорит о возможной значительной погрешности при определении положения кривой усталости по последнему методу.

В работе [6] отмечалось, что из двух линий регрессии “практическое значение имеет, как правило, одна из них”. Однако не уточняется какая. Можно только догадываться, что при оценке сопротивления материала усталости это относится к регрессии \hat{x} по y . Оценка ресурса деталей машин и конструкций при нерегулярной напряженности и неограниченном ресурсе [10] проводится с использованием степенной зависимости в виде (1). При этом метод определения параметров этой зависимости не указывается. В нормативном документе [4] также отсутствуют сведения о разных видах регрессии при использовании метода наименьших квадратов. Таким образом, можно заключить, что возможности использования степенной функции или уравнений типа (6) и (7) при описании наклонного участка кривой усталости проанализированы недостаточно полно.

Для анализа влияния вида регрессии на параметры уравнения кривой усталости использовали данные усталостных испытаний в условиях симметричного изгиба 84 цилиндрических образцов из хромокремнемарганцевой стали 30ХГСА*. Результаты испытаний при четырех уровнях напряжений приведены в табл. 1, где σ_j – заданная амплитуда напряжений; q_j – число образцов при j -м уровне амплитуды напряжения σ_j . С целью сокращения объема статьи вместо логарифмов напряжений и логарифмов долговечнос-

* Испытания проводились в Институте механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины М. Э. Гарфом и О. Ю. Крамаренко.

тей каждого образца при заданном уровне амплитуды напряжения представлены соответствующие суммы: логарифмов напряжений (Σy_i), логарифмов долговечностей (Σx_j), их произведений ($\Sigma x_i y_i$) и квадратов (Σy_j^2 , Σx_j^2).

Для каждого вида регрессии определяли параметры линейных уравнений (6) и (7) по зависимостям (8)–(11), среднеквадратические отклонения логарифмов долговечностей $s_x = s_{\lg N}$ и напряжений $s_y = s_{\lg \sigma}$ от теоретической кривой. Кроме того, приведены экспериментально определенный предел выносливости σ_{-1} , коэффициент корреляции r и координаты точки пересечения смежных регрессий $\bar{\sigma}$ и \bar{N} , значения которых были получены путем потенцирования средних значений $\lg \sigma$ и $\lg N$ соответственно. Коэффициент корреляции r находили [11] по зависимости

$$r = \sqrt{mk}, \tag{12}$$

где m и k – коэффициенты уравнений (9) и (11) соответственно.

По данным табл. 1 в логарифмических координатах были построены кривые усталости стали 30ХГСА (на рис. 1 кривые 1, 2), которые пересекаются и имеют перелом при пределе выносливости $\sigma_{-1} = 455$ МПа. Видно, что кривые 1 и 2 характеризуются минимальными среднеквадратическими отклонениями s_x и s_y соответственно, что и отличает одну регрессию от другой. Результаты влияния вида регрессии на абсциссу точки перелома кривой усталости N_0 и на ограниченный предел выносливости σ_{-1N} [12] при базе $N_6 = 8 \cdot 10^5$ цикл представлены в табл. 2. Там же для каждого вида регрессии приведены соответствующие значения N_{0i} при пределе выносливости $\sigma_{-1} = 455$ МПа и их разность ΔN_0 в циклах и процентах, а также расчетные пределы ограниченной выносливости при заданной базе N_6 и их разность $\Delta \sigma_{-1N}$ в абсолютном значении и в процентах к пределу ограниченной выносливости $\sigma_{-1N} = 455,9$ МПа.

Т а б л и ц а 1

Регрессионный анализ результатов испытаний на усталость образцов из стали 30ХГСА

№ уровня напряжений	q_j	σ_j , МПа	Σy_j	Σx_j	$\Sigma x_j y_j$	Σy_j^2	Σx_j^2
1	21	480	56,306061	120,501435	323,093388	150,970119	694,667179
2	25	500	67,474250	136,793588	369,201790	182,110977	749,881994
3	21	540	57,380274	109,265801	298,557219	156,785516	568,873647
4	17	590	47,104484	82,486638	228,558266	130,519554	400,394836
Сумма	$n = 84$	–	228,265069	449,047462	1219,410663	620,386166	2413,817656
Регрессия \hat{x} по y : $a = 31,212376$; $m = 9,518724$; $s_x = 0,249109$						$\bar{\sigma} = 521,72$ МПа, $\bar{N} = 221719$ цикл, $\sigma_{-1} = 455$ МПа, $r = 0,78$	
Регрессия \hat{y} по x : $b = 3,058912$; $k = 0,063877$; $s_y = 0,020406$							

Из данных табл. 2 видно, что для наблюдаемых сопряженных регрессий отмечается значительное расхождение (более 100%) между абсциссами точек перелома кривых усталости при одном напряжении и незначительное (~ 5%) между пределами ограниченной выносливости при заданной базе.

Т а б л и ц а 2

Влияние вида регрессии на характеристики усталости стали 30ХГСА

Вид регрессии	N_0 , цикл	ΔN_0 , цикл	σ_{-1N} , МПа	$\Delta\sigma_{-1N}$, МПа
По всем значениям долговечностей				
\hat{x} по y	$N_{01} = 0,815161 \cdot 10^6$	1,070979 · 10 ⁶ (131,4%)	455,9	24,8 (5,26%)
\hat{y} по x	$N_{02} = 1,886140 \cdot 10^6$		480,7	
По средним значениям долговечностей				
\bar{x} по y	$N_{03} = 0,815161 \cdot 10^6$	15 · 10 ³ (1,8%)	455,9	0,9 (0,2%)
\bar{y} по x	$N_{04} = 0,8310 \cdot 10^6$		456,8	

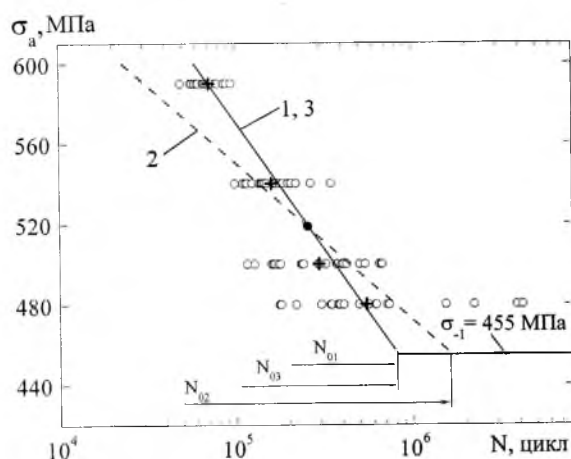


Рис. 1. Кривые усталости стали 30ХГСА: 1 – обратная регрессии \hat{x} по y ; 2 – прямая регрессии \hat{y} по x ; 3 – обратная регрессии \bar{y} по x , параметры уравнения которой определены по средним значениям логарифмов долговечностей.

Можно предположить, что при оценке циклической долговечности объекта при заданном напряжении необходимо использовать регрессию \hat{x} по y , при оценке предела ограниченной выносливости при заданной долговечности – регрессию \hat{y} по x . Однако и в этом случае возникают определенные трудности из-за отсутствия единой кривой усталости. Поэтому была рассмотрена возможность уменьшения угла наклона между сопряженными линиями регрессии.

Изучим особенности расположения кривой усталости относительно экспериментальных точек. На рис. 2 в логарифмических координатах приведены четыре произвольно взятые точки (1–4), прямая линия регрессии, параметры которой определены методом наименьших квадратов по зависи-

мостям (8) и (9), и на ней точка A с координатами $\bar{x} = \overline{\lg N}$ и $\bar{y} = \overline{\lg \sigma}$. Примем, что линия регрессии есть рычаг первого рода, а точка A – неподвижная опора рычага. Обозначим абсциссы точек через $\lg N_i$, а соответствующие расчетные долговечности на прямой – $\lg N_{ip}$ (на рис. 2 светлые точки). Разности $\Delta_i = \lg N_i - \lg N_{ip}$ будем рассматривать как векторы сил, направленные от теоретической линии к соответствующим экспериментальным точкам (рис. 2).

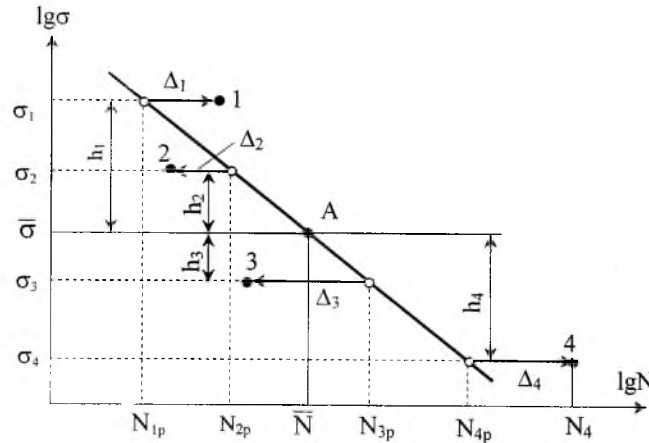


Рис. 2. Схема нагружения наклонного участка кривой усталости.

Вычисления показали, что сумма моментов относительно точки A , создаваемых силами Δ_i , равна нулю, т.е. $\sum M_i = \sum(\Delta_i h_i) = 0$, где h_i – плечо силы Δ_i . Это значит, что рычаг находится в равновесии. Расчеты, проведенные с использованием результатов испытаний стали 30ХГСА, также подтвердили это. Очевидно, что наклонный участок кривой усталости будет находиться в равновесии не только под действием сил Δ_j , полученных при испытаниях всех образцов на каждом уровне напряжений, но и под действием их равнодействующих. В этом случае для определения параметров кривой усталости достаточно найти средние значения долговечностей \bar{x}_j при каждом j -м уровне напряжений (на рис. 1 крестики), а дальнейшие вычисления проводить по нижеприведенным зависимостям. В общем случае параметры уравнений кривых усталости при разном числе испытанных образцов при заданных уровнях напряжений можно определить по следующим зависимостям, которые получены путем преобразования зависимостей (8)–(11):

для регрессии \bar{x} по y

$$a = \frac{\sum_{j=1}^q \omega_j \bar{x}_j \sum_{j=1}^q \omega_j y_j^2 - \sum_{j=1}^q \omega_j \bar{x}_j y_j \sum_{j=1}^q \omega_j y_j}{\sum_{j=1}^q \omega_j y_j^2 - \left(\sum_{j=1}^q \omega_j y_j \right)^2}, \quad (13)$$

$$m = \frac{\sum_{j=1}^q \omega_j \bar{x}_j \sum_{i=1}^q \omega_i y_i - \sum_{i=1}^q \omega_i \bar{x}_i y_i}{\sum_{i=1}^k \omega_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^k \omega_i y_i \right)^2}; \quad (14)$$

для регрессии y по \bar{x}

$$b = \frac{\sum \omega_j y_j \sum \omega_j \bar{x}_j^2 - \sum \omega_j \bar{x}_j y_j \sum \omega_j \bar{x}_j}{\sum \omega_j \bar{x}_j^2 - (\sum \omega_j \bar{x}_j)^2}, \quad (15)$$

$$k = \frac{\sum \omega_j \bar{x}_j \sum \omega_j y_j - \sum \omega_j \bar{x}_j y_j}{\sum \omega_j \bar{x}_j^2 - (\sum \omega_j \bar{x}_j)^2}, \quad (16)$$

где частость $\omega_j = q_j/n$.

Если при каждом напряжении σ_j испытывалось одинаковое количество образцов, то зависимости (13)–(16) имеют более простой вид:

для регрессии \bar{x} по y

$$a = \frac{\sum \bar{x}_j \sum y_j^2 - \sum \bar{x}_j y_j \sum y_j}{q_j \sum y_j^2 - (\sum y_j)^2}, \quad (17)$$

$$m = \frac{\sum \bar{x}_j \sum y_j - m_j \sum \bar{x}_j y_j}{m_j \sum y_j^2 - (\sum y_j)^2}; \quad (18)$$

для регрессии y по \bar{x}

$$b = \frac{\sum y_j \sum \bar{x}_j^2 - \sum \bar{x}_j y_j \sum \bar{x}_j}{m_j \sum \bar{x}_j^2 - (\sum \bar{x}_j)^2}, \quad (19)$$

$$k = \frac{\sum \bar{x}_j \sum y_j - m_j \sum \bar{x}_j y_j}{m_j \sum y_j^2 - (\sum y_j)^2}. \quad (20)$$

В (13)–(20): $\bar{x}_j = \overline{\lg N_j}$; $y_j = \lg \sigma_j$. Параметры уравнений кривых усталости стали 30ХГСА, вычисленные по средним значениям логарифмов долговечностей $\bar{x}_j = \overline{\lg N_j}$ на каждом уровне напряжений $y_j = \lg \sigma_j$ по зависимостям (13)–(16), и соответствующие значения среднеквадратических отклонений $s_{\bar{x}}$ и s_y приведены в табл. 3.

Т а б л и ц а 3

Регрессионный анализ результатов испытаний на усталость образцов из стали 30ХГСА по средним значениям логарифмов долговечностей

№ уровня напряжений	q_j/n	σ_{aj} , МПа	$y_j = \lg \sigma_j$	$\frac{q_j}{n} y_j$	$\frac{m_j}{n} y_j^2$	$\bar{x}_j = \lg \bar{N}_j$	$\frac{m_j}{n} \bar{x}_j$	$\frac{m_j}{n} \bar{x}_j^2$	$\frac{m_j}{n} \bar{x}_j y_j$
1	0,25	480	2,681241	0,670310	1,797263	5,738164	1,434541	8,231630	3,846350
2	0,297619	500	2,698970	0,803265	2,167987	5,471743	1,628495	8,910707	4,395259
3	0,25	540	2,732394	0,638098	1,866494	5,203133	1,300783	6,768149	3,554252
4	0,202381	590	2,770852	0,560768	1,553805	4,852155	1,981984	4,764738	2,720931
Сумма	1			2,717441	7,385549	21,265195	5,345803	28,675224	14,516792
Регрессия \bar{x} по y : $a = 31,212376$, $m = 9,518724$, $s_x = 0,03518$							$\bar{\sigma} = 521,7$ МПа,		
Регрессия y по \bar{x} : $b = 3,271252$, $k = 0,103594$, $s_y = 0,003687$							$\bar{N} = 221719$ цикл, $r = 0,993$		

Сравнивая данные табл. 3 с табл. 1, а значения N_0 и ΔN_0 (табл. 2) с y_i и $(q_j/n)y_j$ (табл. 3), можно утверждать, что при переходе от расчета по всем точкам выборки к расчету по средним долговечностям при заданных напряжениях параметры уравнения кривой усталости, соответствующей регрессии \hat{x} по y , не изменяются, следовательно, не изменяется и ее положение. Параметры уравнения кривой усталости, соответствующие регрессии \hat{y} по x , заметно увеличиваются, приближаясь к значениям параметров уравнения регрессии \hat{x} по y . Таким образом, кривая усталости, соответствующая регрессии \hat{y} по x , значительно приближается к кривой, соответствующей регрессии \hat{x} по y , при неизменном положении точки пересечения линий регрессий. По данным табл. 3 была построена линия 3 регрессии \bar{y} по x , которая практически совпадает с кривой усталости 1 (рис. 1). Для рассматриваемой выборки из четырех точек результаты влияния вида регрессии на долговечность N_0 при физическом пределе выносливости σ_{-1} и на ограниченный предел выносливости σ_{-1N} при заданной базе N_6 приведены в табл. 2. Преимущество зависимостей (13)–(20), где используются средние значения логарифмов долговечностей для каждого уровня напряжений, перед зависимостями (8)–(11), в которых используются значения логарифмов долговечностей всех образцов, очевидно, поскольку объем вычислений существенно сокращается без изменения конечного результата.

Заключение. Предложены формулы для ускоренного определения параметров линейного уравнения кривой усталости с использованием средних значений логарифмов циклических долговечностей при каждом уровне напряжений цикла как с разным, так и с одинаковым количеством образцов. Показано, что кривая усталости регрессии \bar{x} по y , параметры которой определены по средним значениям логарифмов долговечностей, полностью совпадает с исходной кривой усталости регрессии \hat{x} по y , параметры которой определены по известным формулам с использованием значений логарифмов долговечностей всех образцов.

Показано, что положение кривой усталости регрессии \hat{y} по x может существенно отличаться от положения кривой усталости регрессии \hat{x} по y при

определении параметров их уравнений по результатам испытаний всех образцов и незначительно при определении параметров их уравнений по средним $\bar{x}_j = \lg N_j$ для каждого уровня напряжений.

Построение кривой усталости методом графического интерполирования дает более достоверный результат, если используются точки, соответствующие результатам испытаний не всех образцов, а только средним логарифмам долговечностей при каждом уровне напряжений.

Резюме

Аналізуються особливості степеневі функції при опису кривої втоми. Показано взаємозв'язок між кривими втоми, що побудовані по спряженим регресіях. Приведено формули для визначення параметрів рівняння кривої втоми за середніми значеннями циклічних довговічностей при заданих напруженнях.

1. *ГОСТ 25.504-82*. Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. – М.: Изд-во стандартов, 1982. – 80 с.
2. *Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П.* Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. Справочник. – М.: Машиностроение, 1985. – 223 с.
3. *International Standard, ISO 12107:2003*. Metallic Materials. Fatigue Testing. Statistical Planning and Analysis of Data.
4. *ГОСТ 25.502-79*. Методы механических испытаний металлов. Методы испытаний на усталость. – М.: Изд-во стандартов, 1979. – 32 с.
5. *Троценко В. Т., Сосновский Л. А.* Сопротивление усталости металлов и сплавов. Справочник. Ч. 1. – Киев: Наук. думка, 1987. – 505 с.
6. *Степнов М. Н.* Статистические методы обработки результатов механических испытаний. Справочник. – М.: Машиностроение, 1985. – 231 с.
7. *Закс Л.* Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976. – 598 с.
8. *Румишский Л. З.* Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное руководство. – М.: Наука, 1971. – 192 с.
9. *Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.* Краткий курс математической статистики для технических приложений. – М.: Физматгиз, 1959. – 436 с.
10. *Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М.* Несущая способность и расчет деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие: 3-е изд., перераб. и доп. / Под ред. С. В. Серенсена. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
11. *Налимов В. В.* Применение математической статистики при анализе вещества. – М.: Физматгиз, 1960. – 430 с.
12. *ДСТУ 2444-94*. Розрахунки та випробування на міцність. Опір втомі. Терміни та визначення. – Чинний з 01. 07. 95.

Поступила 23. 05. 2005