

Влияние структуры армирования и формы профиля на предельную скорость вращения композитных искривленных дисков

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

Сформулирована и решена методом линейного программирования задача определения верхней кинематической границы несущей способности сложноармированных вращающихся плоских и искривленных дисков постоянной и переменной толщины. Показано, что наибольшую предельную угловую скорость вращения имеют диски с меридионально-окружной укладкой волокон. Искривление диска приводит к резкому снижению его несущей способности; максимально допустимые скорости вращения дисков, работающих в пределах упругого деформирования фаз композиции, в несколько раз ниже предельно допустимых скоростей.

Ключевые слова: диски, армирование, предельная скорость вращения, профилирование, жесткопластическая модель, линейное программирование.

В работах [1–3] и др. авторы исследовали влияние различных структур армирования на несущую способность и энергоемкость вращающихся плоских дисков. При этом предполагалось: все фазовые материалы дисков ведут себя упруго, что позволяет свести к минимуму малоцикловую усталость и повысить долговечность дисков. Однако известно [4], что твердые тела являются упругими лишь при весьма малых деформациях, поэтому несущая способность реальных конструкций выходит за пределы упругого деформирования. Особенно это касается композитных конструкций, несущая способность фазовых материалов которых может отличаться в несколько раз (и даже на порядки) как в пределах, так и за пределами упругости. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос определения предельной угловой скорости вращения, выдерживаемой армированными дисками при полном исчерпании несущей способности всеми субструктурными элементами композиции. Знание предельных скоростей вращения дисков необходимо, например, в случаях возникновения экстремальных (нештатных) ситуаций в работе газотурбинных двигателей, дисковых маховиков и т.п.

Поскольку полное решение или близкие (верхняя и нижняя) границы несущей способности конструкции в аналитической форме могут быть получены лишь для некоторого узкого круга задач [4], выдвигаемые практикой новые проблемы требуют решения математической задачи определения предельной скорости вращения дисков в рамках жесткопластической модели с привлечением численных методов.

Настоящее исследование посвящено определению верхней кинематической границы несущей способности вращающихся композитных дисков с различной структурой методом линейного программирования. В общем случае срединные поверхности дисков предполагаются неплоскими (осесимметрично искривленными), что может быть обусловлено конструктив-

ными особенностями изделия, накопленными деформациями ползучести или являться следствием предварительного натяга диска на вал. Кроме того, быстровращающиеся оболочки (частными случаями которых являются искривленные диски – пологие оболочки) могут использоваться в различных центрифугах и т.п., поэтому предложенный алгоритм справедлив и для их расчета.

Формулируя задачу в общем случае, рассмотрим тонкую оболочку вращения постоянной или переменной толщины $H = 2h(\theta)$. Исследуем лишь случай осесимметричного деформирования без скручивания, так как это главный этап расчета вращающейся конструкции (диска) на прочность [5, 6]. (Далее для краткости вращающуюся конструкцию будем называть диском). Для диска справедливы обычные упрощающие гипотезы [2, 6] и предполагается его меридионально-симметричное армирование (по толщине – регулярное и квазиоднородное), что при постоянной угловой скорости вращения ω приводит к совпадению направлений главных напряжений и деформаций в связующем и в композиции с меридиональным и окружным направлениями.

Главные радиусы кривизны R_i и параметры Ламе A_i ($i = 1, 2$) срединной поверхности оболочки вращения задаются равенствами [7]

$$\begin{aligned} R_1 &= R_0 / (1 + \gamma \sin^2 \theta)^{3/2}; & R_2 &= R_0 / (1 + \gamma \sin^2 \theta)^{1/2}; \\ A_1 &= R_1; & A_2 &= R_2 \sin \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где R_0 – значения радиусов кривизны при $\theta = 0$ (в полюсной точке оболочки); θ – угол между осью вращения и нормалью к срединной поверхности; γ – параметр, задающий геометрию оболочки: при $-1 < \gamma < \infty$ – эллипсоиды, при $\gamma = 0$ – сфера, при $\gamma = -1$ – параболоиды, при $\gamma < -1$ – гиперболоиды; здесь и далее нижний индекс 1 обозначает меридиональное, 2 – окружное, 3 – нормальное к срединной поверхности направления.

Чтобы избежать построения гиперповерхности текучести для композитных оболочек со сложными структурами армирования в обобщенных напряжениях (в четырехмерном фазовом пространстве усилий–моментов), будем рассматривать двухслойную модель диска. Расчеты, проведенные в [4] для оболочек, материалы которых равносопротивляются (сталь) и разносопротивляются (бетон) растяжению и сжатию, показали, что двухслойная модель оболочки гарантирует вполне приемлемую точность. Уточнение верхней границы несущей способности таких оболочек с использованием M -слойной модели ($M \geq 3$) с практической точки зрения пренебрежимо мало, однако при этом возникают значительные технические трудности. Кроме того, в общем случае оболочка может быть армирована в двух разнесенных слоях, что часто используется на практике; при этом выбор двухслойной модели является наиболее естественным.

При постоянной угловой скорости вращения ω напряженное состояние в диске является квазистатическим, и некоторые внешние нагрузки пропорциональны ω^2 , поэтому, согласно формулировке кинематического метода [4], для определения верхней кинематической границы квадрата предель-

ной угловой скорости $\omega^2 \equiv p^*$ требуется найти минимум параметра p^* нагрузки, действующей на диск. В рамках двухслойной модели сечения оболочки со слоями толщиной и расстоянием между ними $h(\theta)$ диссипация энергии D равна сумме диссипаций для наружного ($i=1$) и внутреннего ($i=2$) слоев, поэтому, согласно [4], задача определения верхней границы ω^2 композитного диска (оболочки) формулируется так: найти минимум параметра нагрузки

$$p^* = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} (D^{(1)} + D^{(2)}) R_1 R_2 \sin \theta d\theta - 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} (g_1 v_1 + g_3 v_3) R_1 R_2 \sin \theta d\theta - 2\pi r_1 (M_0 \dot{\chi} + F_z \dot{\delta}_z), \quad r_1 = R_2(\theta_{**}) \sin \theta_{**} \quad (2)$$

при условии нормировки

$$2\pi r_1 (\bar{M}_\omega \dot{\chi} + \bar{P} \dot{\delta}_r) + 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} (\bar{p}_1 v_1 + \bar{p}_3 v_3) R_1 R_2 \sin \theta d\theta = 1, \quad (3)$$

ограничениях-неравенствах

$$D^{(i)} \geq h \{ \sigma_{11,r}^{(i)} [(v'_1 + v_3) + 0,5(-1)^i h((v_3'' - v'_1)/R_1 + 1,5\gamma \sin(2\theta)(v'_3 - v_1)/R_2)] / R_1 + \sigma_{22,r}^{(i)} [(v_1 \operatorname{ctg} \theta + v_3) + 0,5(-1)^i h \operatorname{ctg} \theta (v'_3 - v_1)/R_1] / R_2 \}, \quad i=1, 2, \quad r=1, 2, \dots, \zeta \quad (4)$$

и ограничениях-равенствах

$$v_1(\theta_*) = v_2(\theta_*) = v_3(\theta_*) = 0, \quad v'_3(\theta_*) = 0; \quad (5)$$

$$\dot{\delta}_r = v_1 \cos \theta + v_3 \sin \theta, \quad \dot{\delta}_z = v_1 \sin \theta - v_3 \cos \theta \quad (\theta = \theta_{**}); \quad (6)$$

$$\dot{\chi} = -v'_3/A_1 + v_1/R_1 = -v'_3/R_1 + v_1/R_1 \quad (\theta = \theta_{**}), \quad (7)$$

где

$$\bar{p}_1 = \bar{p} \cos \theta; \quad \bar{p}_3 = \bar{p} \sin \theta; \quad \bar{p} = H(\theta) R_2 \sin \theta (a \rho_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k); \quad a = 1 - \sum_{k=1}^N \omega_k(\theta); \quad (8)$$

$$\bar{P} = 0,5 H_*(\rho_{0*} a_* + \rho_* \omega_*) (r_2^2 - r_1^2); \quad a_* = 1 - \omega_*; \quad r_2 = r_1 + l; \quad (9)$$

$D^{(i)}$ – диссипация в i -м слое, отнесенная к единице площади срединной поверхности; θ_* , θ_{**} – координаты внутренней и внешней кромок диска соответственно ($0 \leq \theta_* < \theta_{**} < \pi$); $v_i = \dot{u}_i$ ($i = 1, 2, 3$) – кинематически допустимые скорости смещения точек срединной поверхности диска ($v_2 \equiv 0$, так как скручивание диска не рассматривается, u_3 – прогиб), удовлетворяющие граничным условиям (5) жесткого закрепления диска на валу; $g_1(\theta)$, $g_3(\theta)$ – не зависящие от скорости вращения диска распределенные поверхностные нагрузки, возникающие вследствие, например, давления набегающего потока; $\dot{\delta}_r$, $\dot{\delta}_z$ – скорости соответственно радиального и осевого смещений точек срединной поверхности на внешней кромке; $\dot{\chi}$ – скорость угла поворота внешней кромки диска в плоскости меридионального сечения; M_0 , F_z – не зависящие от ω^2 удельные изгибающий момент и осевое (направленное вдоль оси вращения z) усилие на внешней кромке полотна диска вследствие, например, действия набегающего потока на лопасти; \bar{M}_ω , \bar{P} – удельные изгибающий момент и радиальное (направленное перпендикулярно z) усилие на внешней кромке полотна диска, возникающие из-за центробежных сил, действующих на лопасти и разрезную замковую часть, при единичной угловой скорости вращения (величина \bar{P} имеет вид (9), если лопасть в первом приближении схематизировать в форме прямолинейного бруса постоянной толщины H_* (в осевом направлении z) и длины l [5], продольно армированного одним семейством волокон [2]); ω_* – интенсивность (плотность) армирования лопасти; ρ_{0*} , ρ_* – объемные плотности материалов связующего и арматуры лопасти соответственно; \bar{p}_1 , \bar{p}_3 – распределенные массовые нагрузки, действующие на полотно диска и вызванные центробежными силами при единичной угловой скорости вращения; ρ_0 , ρ_k – объемные плотности материалов связующего и арматуры k -го семейства соответственно; ω_k – плотность (интенсивность) армирования полотна диска волокнами k -го семейства; N – число семейств волокон, которыми армирован диск; $\sigma_{jj,r}^{(i)}$ – значения j -х осредненных напряжений в r -й угловой точке предельной кривой композиции i -го слоя; ζ – количество угловых точек линеаризованной предельной кривой (кривой текучести) материала композитного диска; нижний индекс после запятой обозначает номер угловой точки кривой текучести, точка над функцией – частную производную по времени, штрих – по переменной θ .

Осредненные напряжения $\sigma_{11}^{(i)}$, $\sigma_{22}^{(i)}$ в композиции i -го слоя определяются соотношениями (используется модель армированного слоя из [8])

$$\sigma_{jj}^{(i)} = a\sigma_{0j}^{(i)} + \sum_{k=1}^N \sigma_k^{(i)} \omega_k l_{kj}^2 \quad (i, j = 1, 2); \quad (10)$$

$$l_{k1} = \cos \psi_k(\theta); \quad l_{k2} = \sin \psi_k(\theta),$$

где $\sigma_{01}^{(i)}$, $\sigma_{02}^{(i)}$ – меридиональное и окружное напряжения в связующем i -го слоя соответственно; $\sigma_k^{(i)}$ – напряжения в арматуре k -го семейства; ψ_k –

углы армирования волокнами k -го семейства, отсчитываемые от меридионального направления; a , ω_k – параметры, определяемые из уравнения (8).

В рамках используемой модели армированного слоя напряжения $\sigma_k^{(i)}$ в волокнах изменяются в пределах [8]

$$-\sigma_k^{**} \leq \sigma_k^{(i)} \leq \sigma_k^*, \quad \sigma_k^* > 0, \quad \sigma_k^{**} > 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (11)$$

где σ_k^* , σ_k^{**} – пределы текучести в арматуре k -го семейства при растяжении и сжатии соответственно. Напряжения $\sigma_{01}^{(i)}$, $\sigma_{02}^{(i)}$ должны находиться внутри или на предельной кривой материала связующего в фазовом пространстве $(\sigma_{01}, \sigma_{02})$.

Полагаем, что материал связующего подчиняется критерию текучести Треска–Сен-Венана, т.е. предельная кривая связующего представляет собой шестиугольник ($\zeta = 6$) с координатами вершин [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{01,1}^{(i)} = \sigma_{02,1}^{(i)} = \sigma_0^*; & \quad \sigma_{01,2}^{(i)} = 0, \quad \sigma_{02,2}^{(i)} = \sigma_0^*; & \quad \sigma_{01,3}^{(i)} = -\sigma_0^*, \\ \sigma_{02,3}^{(i)} = 0; & \quad \sigma_{01,4}^{(i)} = \sigma_{02,4}^{(i)} = -\sigma_0^*; & \quad \sigma_{01,5}^{(i)} = 0, \quad \sigma_{02,5}^{(i)} = -\sigma_0^*; \\ \sigma_{01,6}^{(i)} = \sigma_0^*, & \quad \sigma_{02,6}^{(i)} = 0 & \quad (\sigma_0^* > 0), \end{aligned} \quad (12)$$

где σ_0^* – предел текучести материала связующего. (Если связующее по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то вместо (12) получим другие линеаризованные кривые текучести, приведенные, например, в [9]. В рамках настоящего исследования это не принципиально.)

Между скоростью деформации $\dot{e}_k^{(i)}$ арматуры k -го семейства i -го слоя и скоростями деформаций $\dot{e}_{11}^{(i)}$, $\dot{e}_{22}^{(i)}$ существует связь [9]

$$\begin{aligned} \dot{e}_k^{(i)} = \dot{e}_{11}^{(i)} \cos^2 \psi_k + \dot{e}_{22}^{(i)} \sin^2 \psi_k; & \quad \dot{e}_{jj}^{(i)} = \dot{\epsilon}_{jj} - (-1)^i h \dot{\kappa}_{jj} / 2, \\ i, j = 1, 2, & \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned} \quad (13)$$

а скорости деформаций $\dot{e}_{jj}^{(i)}$ подчиняются ассоциированному закону течения связующего. В рамках используемой жесткопластической модели напряжения в арматуре (см. (11)) таковы:

$$\begin{aligned} \sigma_k^{(i)} = \begin{cases} \sigma_k^* & \text{при } \text{sign } \dot{e}_k^{(i)} = 1, \\ -\sigma_k^{**} & \text{при } \text{sign } \dot{e}_k^{(i)} = -1, \end{cases} & \quad (14) \\ -\sigma_k^{**} < \sigma_k^{(i)} < \sigma_k^* & \text{при } \text{sign } \dot{e}_k^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

На основе соотношений (10)–(14) и ассоциированного закона течения связующего можно построить предельные кривые для материала армиро-

ванных слоев. Методика построения этих кривых подробно изложена, например, в [9]. В случае меридионально-окружного армирования оболочки-диска ($\psi_1 = 0, \psi_2 = \pi/2, N = 2$) кривая текучести композиции представляет собой шестиугольник ($\zeta = 6$) с угловыми точками:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{11,1}^{(i)} = a\sigma_0^* + \omega_1\sigma_1^*, & \sigma_{22,1}^{(i)} = a\sigma_0^* + \omega_2\sigma_2^*; \\ \sigma_{11,2}^{(i)} = -\omega_1\sigma_1^{**}, & \sigma_{22,2}^{(i)} = a\sigma_0^* + \omega_2\sigma_2^*; \\ \sigma_{11,3}^{(i)} = -a\sigma_0^* - \omega_1\sigma_1^{**}, & \sigma_{22,3}^{(i)} = \omega_2\sigma_2^*; \\ \sigma_{11,4}^{(i)} = -a\sigma_0^* - \omega_1\sigma_1^{**}, & \sigma_{22,4}^{(i)} = -a\sigma_0^* - \omega_2\sigma_2^{**}; \\ \sigma_{11,5}^{(i)} = \omega_1\sigma_1^*, & \sigma_{22,5}^{(i)} = -a\sigma_0^* - \omega_2\sigma_2^{**}; \\ \sigma_{11,6}^{(i)} = a\sigma_0^* + \omega_1\sigma_1^*, & \sigma_{22,6}^{(i)} = -\omega_2\sigma_2^{**}, \end{array} \right. \quad i = 1, 2. \quad (15)$$

При меридионально-симметричном спиральном армировании ($\psi_1 = -\psi_2, \omega_1 = \omega_2, \sigma_1^* = \sigma_2^*, \sigma_1^{**} = \sigma_2^{**}, N = 2$) кривая текучести композиции является восьмиугольником ($\zeta = 8$) с угловыми точками:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma_{11,1}^{(i)} = a\sigma_0^* + 2\omega_1\sigma_1^*l_{11}^2, & \sigma_{22,1}^{(i)} = a\sigma_0^* + 2\omega_1\sigma_1^*l_{12}^2; \\ \sigma_{11,2}^{(i)} = 2\omega_1\sigma_1^*l_{11}^2, & \sigma_{22,2}^{(i)} = a\sigma_0^* + 2\omega_1\sigma_1^*l_{12}^2; \\ \sigma_{11,4}^{(i)} = -a\sigma_0^* - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_{11}^2, & \sigma_{22,4}^{(i)} = -2\omega_1\sigma_1^{**}l_{12}^2; \\ \sigma_{11,5}^{(i)} = -a\sigma_0^* - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_{11}^2, & \sigma_{22,5}^{(i)} = -a\sigma_0^* - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_{12}^2; \\ \sigma_{11,6}^{(i)} = -2\omega_1\sigma_1^{**}l_{11}^2, & \sigma_{22,6}^{(i)} = -a\sigma_0^* - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_{12}^2; \\ \sigma_{11,8}^{(i)} = a\sigma_0^* + 2\omega_1\sigma_1^*l_{11}^2, & \sigma_{22,8}^{(i)} = 2\omega_1\sigma_1^*l_{12}^2; \\ \sigma_{11,3}^{(i)} = \begin{cases} -2\omega_1\sigma_1^{**}l_{11}^2, & 0 \leq \psi_1 \leq \pi/4, \\ -a\sigma_0^* + 2\omega_1\sigma_1^*l_{11}^2, & \pi/4 < \psi_1 \leq \pi/2; \end{cases} & \\ \sigma_{22,3}^{(i)} = \begin{cases} a\sigma_0^* - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_{12}^2, & 0 \leq \psi_1 \leq \pi/4, \\ 2\omega_1\sigma_1^*l_{12}^2, & \pi/4 < \psi_1 \leq \pi/2; \end{cases} & \\ \sigma_{11,7}^{(i)} = \begin{cases} 2\omega_1\sigma_1^*l_{11}^2, & 0 \leq \psi_1 \leq \pi/4, \\ a\sigma_0^* - 2\omega_1\sigma_1^{**}l_{11}^2, & \pi/4 < \psi_1 \leq \pi/2; \end{cases} & \\ \sigma_{22,7}^{(i)} = \begin{cases} -a\sigma_0^* + 2\omega_1\sigma_1^*l_{12}^2, & 0 \leq \psi_1 \leq \pi/4, \\ -2\omega_1\sigma_1^{**}l_{12}^2, & \pi/4 < \psi_1 \leq \pi/2 \end{cases} & \end{array} \right. \quad (16)$$

(при углах армирования $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/4$ восьмиугольник (16) вырождается в шестиугольник).

Значения напряжений $\sigma_{11,r}^{(i)}, \sigma_{22,r}^{(i)}$ в неравенствах (4) в зависимости от структуры армирования определяются по (12), (15) или (16).

Для минимизации функционала (2) при ограничениях (3)–(7) методами линейного программирования следует дискретизировать сформулированную

задачу. С этой целью разобьем участок $\theta \in [\theta_*, \theta_{**}]$ с помощью равномерной сетки с шагом $\Delta = (\theta_{**} - \theta_*) / (K - 1)$, где K – количество узлов сетки; интегралы в (2), (3) вычислим приближенно по формуле трапеций; производные по θ в (4), (5), (7) заменим их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне, а вторые производные в крайних узлах ($\theta = \theta_*, \theta_{**}$) – на четырехточечном шаблоне [10]. (Такая дискретизация имеет второй порядок по Δ и на порядок выше дискретизации, используемой в [4].) После дискретизации задача (2)–(7) с учетом (8), (9) решалась симплекс-методом Данцига [11].

Примем, что арматура имеет постоянное поперечное сечение и обрывается только на кромках диска. Тогда интенсивность армирования k -м семейством волокон определяется равенством [12]

$$\begin{aligned} \omega_k(\theta) &= h_* \omega_{k*} \cos \psi_{k*} R_{2*} \sin \theta_* / [h(\theta) \cos \psi_k(\theta) R_2(\theta) \sin \theta], \\ h_* &= h(\theta_*), \quad \omega_{k*} = \omega_k(\theta_*), \quad \psi_{k*} = \psi_k(\theta_*), \quad R_{2*} = R_2(\theta_*), \end{aligned} \quad (17)$$

где ω_{k*} – произвольные постоянные. Равенство (17) не выполняется лишь при окружном армировании (так как $\cos \psi_k \equiv 0$), в этом случае $\omega_k(\theta)$ – произвольная функция [12].

На конкретных примерах исследуем влияние структуры армирования и формы меридионального профиля диска на его предельную угловую скорость вращения. В качестве критерия сопоставимости различных проектов армирования дисков выберем одинаковую их массу M , фиксируемую для любых композиций и структур армирования и определяемую равенствами

$$\begin{aligned} M &= \rho_0(V - \Omega) + \sum_{k=1}^N \rho_k \Omega_k; \quad V = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} H(\theta) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta; \\ \Omega_k &= \int_V \omega_k dV = 2\pi \int_{\theta_*}^{\theta_{**}} H(\theta) \omega_k(\theta) R_1(\theta) R_2(\theta) \sin \theta d\theta \quad (1 \leq k \leq N), \quad (18) \\ \Omega &= \sum_{k=1}^N \Omega_k, \end{aligned}$$

где V – объем диска; Ω_k – объемное содержание волокон k -го семейства.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из диска, ограниченного кромками радиусами $r_0 = R_2(\theta_*) \sin \theta_* = 0,05$ м, $r_1 = R_2(\theta_{**}) \sin \theta_{**} = 0,1975$ м, и лопаток длиной $l = 0,114$ м [5] и толщиной $H_* = 0,003$ м. Лопатки изготовлены из сплава титана ВТ6С и армированы волокнами бора (В) с интенсивностью $\omega_* = 0,6$. Срединная поверхность диска представляет собой часть сферы ($\gamma = 0$) радиуса $R_0 = 0,6$ м. Диск может быть изготовлен из сплава алюминия АДН, магния ИМВ-2 или титана ВТ6С и армирован углеродными волокнами марки Торнелл-300 (С) по различным траекториям с разной интенсивностью. Физико-механические характеристики фазовых материалов конструкции приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Физико-механические характеристики фазовых материалов конструкции [1, 13]

Материал	σ^* , МПа	σ^{**} , МПа	ρ , кг/м ³
Сплавы			
АДН (Al)	100	100	2710
ИМВ-2 (Mg)	190	190	1590
ВТ6С (Ti)	900	900	4430
Волокна бора (B)	3150	3150	2550
Волокна марки Торнелл-300 (C)	3150	3150	1770

На рис. 1 изображены кривые, характеризующие зависимости предельного количества оборотов дисков в минуту ($n = 30\omega/\pi$ об/мин) от угла спирального армирования ψ . Поскольку диски имеют постоянную толщину ($H(\theta) = H_c = \text{const}$), для каждой композиции своя (такая, чтобы их массы были равны, см. (18) и табл. 2), и армированы меридионально-симметрично двумя семействами волокон ($N = 2$) с постоянными углами ($\psi_1(\theta) = -\psi_2(\theta) = \psi = \text{const}$, $\omega_1(\theta) = \omega_2(\theta)$) с интенсивностями на внутренней кромке $\omega_{1*} = \omega_{2*} = 0,35$, для каждой композиции объем таких дисков (V) и общий расход арматуры в них (Ω) одинаков (см. (17), (18)).

Т а б л и ц а 2

Толщина дисков из разных композиций

№ кривой на рис. 1	H_c , мм
1	8,0
2	5,34
3	3,54
1'	8,15
2'	4,78
3'	2,92
1'', 1'''	8,24

Кривые 1, 2, 3 (рис. 1) характеризуют несущую способность дисков из композиций Mg–C, Al–C, Ti–C соответственно. Характер кривых – немонотонный: на их левых участках ($0 \leq \psi < \psi_* \approx \pi/4$) наблюдается незначительное повышение скорости вращения с увеличением угла армирования ψ , на правых участках ($\psi_* < \psi < \pi/2$) – резкое уменьшение предельной скорости вращения. Прямые 1', 2', 3' приведены для сравнения предельных скоростей вращения неармированных изотропных дисков из сплавов ИМВ-2, АДН, ВТ6С соответственно. Сопоставление кривых 1–3 с 1'–3' позволяет оценить эффективность замены изотропных дисков композитными дисками той же геометрии и массы. Так, благодаря замене магниевых и алюминиевых дисков армированными с тем же связующим можно повысить их несущую способность в 1,5–2 раза.

Однако не только структура армирования, но и форма срединной поверхности диска влияют на его несущую способность. Кривая 1'' (рис. 1) описывает предельную угловую скорость вращения плоского диска ($R_0 \rightarrow \infty$)

постоянной толщины из композиции Mg–C. Сравнение кривой I с I'' показало, что даже незначительное искривление срединной поверхности диска приводит к резкому уменьшению его несущей способности. Так, на рис. 1 ординаты точек кривой I в 1,5–2 раза меньше, чем кривой I'' . Искривление срединной поверхности диска приводит не только к количественному, но и качественному изменению зависимости $n(\psi)$: на кривой I при $\psi_* < \psi < \pi/2$ наблюдается резкое уменьшение значений $n(\psi)$ по сравнению таковыми на участке $0 \leq \psi < \psi_*$, в то время как на кривой I'' , наоборот, при $\pi/4 < \psi < \pi/2$ предельная скорость вращения увеличивается по сравнению со случаем армирования в пределах $0 \leq \psi < \pi/4$. (Точки изломов кривых I'' , 3 соответствуют вырождению восьмиугольника текучести (16) в шестиугольник при $\psi = \pi/4$).

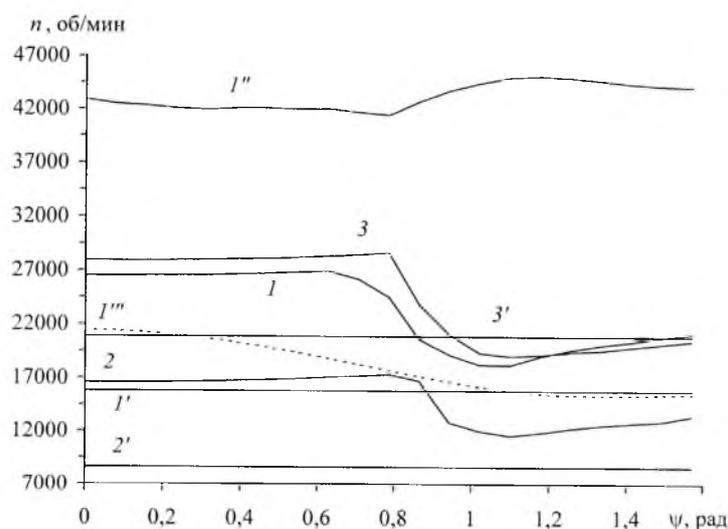


Рис. 1. Зависимости предельных скоростей вращения дисков от угла спирального армирования.

С помощью изложенных ранее [2] методов была рассчитана кривая I''' (рис. 1), характеризующая несущую способность плоских дисков из композиции Mg–C при упругом деформировании всех фаз композиции. Сравнение кривой I'' с I''' (рис. 1) свидетельствует о том, что в пределах упругости несущая способность дисков рассматриваемой структуры далека от полного исчерпания, так как ординаты точек на кривой I''' в два с лишним раза меньше, чем на кривой I'' . Это обусловлено тем, что предельная упругая деформация волокон марки Торнелл-300 (С) в три раза больше аналогичной величины магниевых сплавов ИМВ-2 [1, 13], поэтому при упругом деформировании диска несущая способность волокон используется не более чем на 33%, а при жесткопластическом деформировании – на 100%.

Кривые I'' и I''' (рис. 1) отличаются не только количественно, но и качественно. Кривая I''' с ростом ψ монотонно убывает и максимум имеет при $\psi = 0$, т.е. при упругом деформировании плоского диска из всех рассматриваемых спиральных структур армирования наилучшей является структура с радиальным армированием. Характер кривой I'' немонотонный,

максимум достигается при углах армирования, близких к $\psi = 3\pi/8$. Следовательно, при упругом и пластическом деформировании наибольшая несущая способность дисков достигается при разных структурах армирования. Хотя характер кривой I'' немонотонный, вариация соответствующей ей функции невелика по сравнению со средним ее (функции) значением. Поэтому, не соблюдая особо строго траекторий рационального армирования, при практической реализации плоских дисков можно получить структуры, обеспечивающие несущую способность, весьма близкую к максимальной, что упрощает технологии изготовления конструкций.

Выше рассматривались диски постоянной толщины $H = H_c$. Однако на практике [5, 6] чаще используются диски переменной толщины, что позволяет при одинаковой массе повысить их несущую способность по сравнению с дисками постоянной толщины. Рассмотрим диски переменной толщины, изменяющейся по линейному закону:

$$\begin{aligned} H(\theta) &= [(\theta - \theta_*)H_1 - (\theta - \theta_{**})H_0]/(\theta_{**} - \theta_*), \\ H_0 &= H(\theta_*), \quad H_1 = H(\theta_{**}). \end{aligned} \quad (19)$$

Будем варьировать толщину диска H_0 на внутренней кромке, толщину H_1 на внешней кромке – выбирать из условия равенства массы диска $M(H_0, H_1)$ (см. (18)) массе дисков постоянной толщины, рассмотренных выше. В случае $H_0 > H_c$ толщина диска уменьшается вдоль меридиана от внутренней кромки к внешней (см. (19)), с увеличением H_0 толщина диска H_1 уменьшается.

На рис. 2 изображены кривые, характеризующие зависимости $n(H_0)$ для меридионально-армированных ($\psi_1 = 0$, $\omega_{1*} = 0,7$, $N = 1$) – кривые 1, 2, 3 и изотропных ($\omega_{1*} = 0$) дисков – кривые 1', 2', 3'. Левые точки на кривых рис. 2 соответствуют левым точкам на кривых рис. 1 с теми же номерами. Правые точки на кривых 1'–3' (рис. 2) определяются значением толщин дисков на внешней кромке $H_1 = 0$, правые точки на кривых 1–3 – значением $\omega_1(\theta_{**}) = \omega_{\max} = 0,7$, что на практике соответствует предельно допустимому значению интенсивности армирования. При дальнейшем увеличении толщины диска H_0 на внутренней кромке на внешней кромке имеем $\omega_1(\theta_{**}) > \omega_{\max}$, поэтому соответствующие участки кривых 1–3 на рис. 2 не изображены. Все кривые на рис. 2 имеют тенденцию к монотонному росту, а значит, благодаря профилированию дисков можно увеличить их предельную скорость вращения на несколько тысяч оборотов в минуту (для изотропного титанового диска, например, почти в 1,5 раза – кривая 3'). Дополнительно повысить несущую способность дисков можно, по-видимому, за счет использования профилей более сложной формы, чем (19), что и имеет место на практике [5, 6].

Рассмотрим диски постоянной толщины H_c , армированные по меридионально-окружным направлениям, совпадающим с направлениями главных напряжений. Интенсивность армирования ω_1 меридиональным ($\psi_1 = 0$) семейством волокон определяется равенством (17), а интенсивность армирования окружным семейством зададим формулой $\omega_2(\theta) = \omega_{1*} - \omega_1(\theta)$.

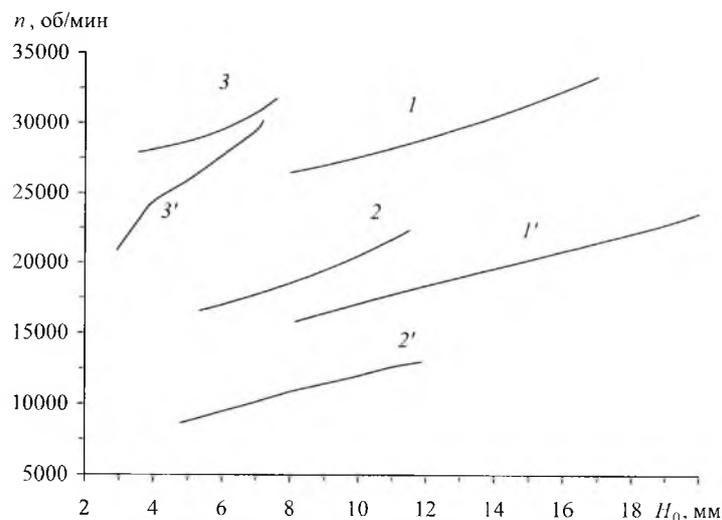


Рис. 2. Зависимости предельных скоростей вращения дисков от их толщины на внутреннем контуре. (Обозначения кривых соответствуют таковым на рис. 1.)

При этом суммарная плотность армирования будет постоянной ($\omega_{1*} = \omega_1(\theta) + \omega_2(\theta) = \text{const}$). С увеличением ω_{1*} в пределах $0 \leq \omega_{1*} \leq \omega_{\text{max}}$ повышается относительное объемное содержание волокон в диске. Поскольку во всех композициях объемная плотность материала волокон ρ_k меньше или почти равна той же величине связующего ρ_0 , а предельные напряжения σ_k^* , σ_k^{**} в волокнах существенно больше σ_0^* в связующем (табл. 1), увеличение объемного содержания арматуры должно приводить к повышению несущей способности диска. На рис. 3 представлены зависимости $n(\omega_{1*})$ для изогнутых дисков, имеющих ту же геометрию, что и рассматриваемые выше, с меридионально-окружными структурами армирования. При этом толщины дисков ($H = H_c(\omega_{1*})$) задавались так, чтобы их массы были фиксированными и такими же, как во всех предыдущих расчетах. Ординаты левых точек на кривых 1, 2, 3 – рис. 3 ($\omega_{1*} = 0$) совпадают с ординатами прямых линий 1', 2', 3' на рис. 1 соответственно. Кривые 2, 3 на рис. 3 монотонно возрастают, кривая 1 является кусочно-гладкой, ее левый возрастающий участок характеризуется пластическим течением полотна диска, а правый (небольшой) горизонтальный участок – разрушением лопаток в корневом сечении. Угловая скорость, при которой происходит разрушение лопатки, определяется формулой (9)

$$\bar{P}\omega^2 = H_*(\sigma_{0*}a_* + \sigma_{1*}\omega_*),$$

где σ_{0*} , σ_{1*} – пределы текучести материалов связующего и арматуры лопатки соответственно.

Если лопатки изготавливать не из боротитановой композиции, как выше, а из композиции Mg–C, то при $\omega_* = 0,6$ они будут разрушаться при $n = 62470$ об/мин, а не 46280 об/мин (рис. 3). Следовательно, такой заменой можно дополнительно повысить несущую способность конструкции диск-лопатки как из углемагниевого композиций, так и из остальных композиций

(в силу меньшей массы углемагниевого лопаток по сравнению с боротитановыми, табл. 1).

Таким образом, из всех исследуемых структур армирования наибольшую несущую способность обеспечивают диски с меридионально-окружной структурой, хотя они и не профилированы. Отметим, что этот вывод справедлив для рассматриваемых криволинейных дисков. В других случаях, например для плоских дисков из композиций Mg-C, Ti-C, как показано в [2], по крайней мере в пределах упругости наибольшей несущей способностью могут обладать и спирально армированные диски.

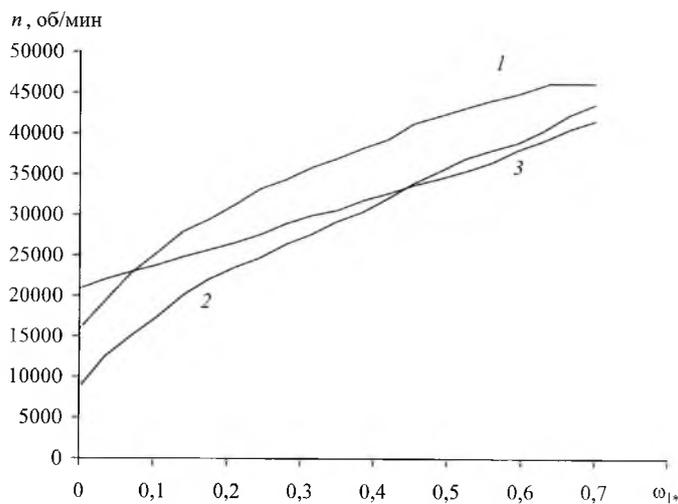


Рис. 3. Зависимости предельных скоростей вращения дисков от удельной суммарной плотности их армирования в случае меридионально-окружной укладки волокон. (Обозначения кривых те же, что и на рис. 1.)

Приведенные выше результаты расчетов были получены при равномерной разбивке зоны деформирования диска на 50 отрезков. При разбивке этой зоны на 100 отрезков уточнение предельной угловой скорости вращения диска составляет менее 0,2%. Следовательно, полученные верхние границы несущей способности вращающихся дисков можно считать весьма близкими к истинным значениям.

Проведенные исследования позволяют заключить, что максимально допустимые угловые скорости вращения дисков, работающих в пределах упругости, в несколько раз ниже предельных значений угловых скоростей вращения, при которых происходит переход в пластическое состояние (разрушение) всех фаз композиции полотна диска или лопаток. Искривление срединной плоскости диска приводит к резкому снижению его несущей способности. Из всех рассмотренных структур армирования наибольшую несущую способность дискам обеспечивает армирование по меридионально-окружным направлениям с постоянной суммарной плотностью армирования. Увеличить несущую способность дисков с фиксированной структурой армирования можно за счет их рационального профилирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00161-а).

Резюме

Сформульовано і розв'язано методом лінійного програмування задачу визначення верхньої кінематичної границі несучої здатності складноармованих обертових плоских та викривлених дисків, що мають постійну і змінну товщину. Показано, що найбільшу граничну кутову швидкість обертання мають диски з меридіонально-коловою укладкою волокон. Викривлення диска призводить до різного падіння його несучої здатності; максимально допустимі швидкості обертання дисків, що працюють у межах пружного деформування фаз композиції, в декілька разів нижчі, аніж гранично допустимі швидкості.

1. Васильев В. В., Протасов В. Д., Болотин В. В. и др. Композиционные материалы. Справочник / Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
2. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О влиянии структуры армирования на несущую способность термоупругих металлокерамических вращающихся дисков // Пробл. прочности. – 2001. – № 4. – С. 5 – 24.
3. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Влияние структуры армирования и теплового воздействия на энергоемкость дисковых маховиков // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 2. – С. 71 – 78.
4. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
5. Пономарев С. Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. – М.: Гос. изд-во машиностроит. лит., 1959. – Т. 3. – 1120 с.
6. Биргер И. А., Демьянушко И. В. Расчет на прочность вращающихся дисков. – М.: Машиностроение, 1978. – 247 с.
7. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
8. Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя // Прикл. механика и техн. физика. – 1969. – № 6. – С. 81 – 89.
9. Nemirovsky Yu. V. Yield surfaces for reinforced concrete axis-symmetrical plates and shells // Arch. Inz. Ladowej. – 1974. – 20, No. 4. – P. 575 – 590.
10. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 1. – 464 с.
11. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1964. – 348 с.
12. Немировский Ю. В., Янковский А. П. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – 3, № 2. – С. 20 – 40.
13. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.

Поступила 20. 09. 2005