

Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщение 2. Динамическая жесткость гiba трубы

И. В. Орыняк, С. А. Радченко, А. С. Батура

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Сформулировано понятие динамического коэффициента податливости гiba трубы для использования в задачах расчета гармонических колебаний трубопроводов. На основе полубезмоментной теории Власова введены упрощающие гипотезы, позволяющие свести постановку задачи к решению дифференциального уравнения четвертой степени. С помощью результатов динамического анализа торообразных оболочек разработана методика учета повышенной податливости гiba трубы при динамическом нагружении. Получено выражение для коэффициента увеличения податливости в зависимости как от геометрических параметров гiba, так и частоты колебаний. На большом количестве примеров проиллюстрирована эффективность полученного выражения для коэффициента увеличения податливости.

Ключевые слова: трубопровод, прямая труба, гиб трубы, цилиндрическая оболочка, динамика, частота колебаний, коэффициент увеличения податливости.

Введение. При анализе деформирования трубопроводной системы одним из основных физических уравнений является дифференциальное уравнение связи угла поворота θ с изгибающим моментом M . Для гiba трубы (как криволинейного стержня) оно имеет следующий вид:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{KM}{EI}, \quad (1)$$

где E – модуль упругости; I – момент инерции сечения тонкостенной трубы, $I = \pi R^3 h$; K – коэффициент увеличения податливости гiba по сравнению с таковым в прямой трубе той же формы поперечного сечения; x – осевая (продольная) координата; R – радиус трубы; h – толщина стенки. Величина K связана с овализацией поперечного сечения [1, 2]. При динамических процессах овализация сечения, представляющего собой тонкостенное кольцо, должна зависеть от локальных сил инерции в плоскости сечения, поскольку деформирование кольца зависит от сил инерции, вызываемых перемещениями точек в плоскости сечения. Это значит, что величина K также зависит от скорости процесса нагружения, которое при гармонических колебаниях характеризуется частотой ω . Для динамического коэффициента увеличения податливости гiba введем обозначение K^d .

Метод и результаты решения [3] для криволинейных стержней как составленных из прямолинейных, соединенных безынерционными поворотными элементами, позволяют конкретизировать задачу для гiba трубы. Запишем дифференциальное уравнение поперечных колебаний участка гiba тру-

бы как прямолинейного стержня с увеличенной податливостью в самой простой постановке по Эйлеру:

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - K^{\text{д}} \frac{\rho F \omega^2}{EI} W = 0, \quad (2)$$

где W – поперечное перемещение осевой линии. Таким образом, задача сводится к определению динамического коэффициента увеличения податливости гiba $K^{\text{д}}$, используемого в уравнениях (2).

Очевидно, что коэффициент $K^{\text{д}}$ должен определяться теми же методами, что и статический коэффициент K , но с учетом сил инерции. При статическом нагружении значение K рассчитывают методами теории оболочек. В общем виде K является функцией многих геометрических и силовых параметров и зависит от параметра гибкости $\lambda = R^2/B_0 h$, кривизны гiba $\alpha = R/B_0$, внутреннего давления P , где B_0 – радиус оси гiba трубы. При примыкании гiba трубы к другим конструктивным элементам, что приводит к возникновению краевого эффекта, K также зависит от текущего расстояния x от этого элемента [1, 2, 4–6]:

$$K = f_1(\lambda, \alpha, P, x). \quad (3a)$$

Определение общей функции f_1 является сложной задачей даже для статического анализа. При переходе к динамическому анализу следует ограничиться простейшими постановками. Самым важным параметром, влияющим на K , является параметр гибкости λ . Поэтому ограничимся малыми значениями α ($\alpha \rightarrow 0$) и не будем учитывать проявление краевого эффекта и давление P :

$$K^{\text{д}} = f_2(\lambda, \omega^2). \quad (3б)$$

Такое искомое решение, по сути, представляет собой аналог статической задачи Кармана для гiba трубы при динамическом нагружении. Как и в статической задаче, будем рассматривать гiba достаточной длины L , чтобы не проявлялись краевые эффекты (в статике это требование имеет вид $L > \eta R \sqrt{R/t}$, где η – некоторый коэффициент [6]).

Поэтому цель работы заключалась в получении из упрощенного рассмотрения гiba трубы как оболочки значения коэффициента увеличения податливости в форме (3б) для использования его в уравнении для колебаний балки в форме (2).

Насколько нам известно, такая постановка задачи применяется впервые, хотя в литературных источниках [7, 8] отмечается важность описания динамических свойств тороидальной оболочки для динамического анализа трубопроводов.

Динамическое поведение круговых цилиндрических оболочек хорошо изучено, и для многих задач частоты колебаний представлены в анали-

тической форме. Очень часто решение для частот колебаний определяется путем представления его в виде произведения двух простых законов, выражаемых обычно гармоническими и экспоненциальными функциями, каждая из которых зависит только от одной из двух координат и удовлетворяет граничным условиям. К сожалению, для тороидальных оболочек в дифференциальных уравнениях равновесия и в геометрических уравнениях функции форм деформирования в окружном направлении связаны между собой, что очень усложняет анализ. В [9] сделан вывод о невозможности получения аналитического решения в замкнутом виде. Более того, очень сложно найти соответствие между формами колебаний одинаково закрепленных цилиндрической и тороидальной оболочек равной длины, даже если параметр кривизны последней α стремится к нулю [9]. Поэтому, несмотря на большое количество методов решения, полученные с их помощью результаты [7–12] носят частный характер, а сама процедура решения заключается в применении численных методов, даже если постановка проблемы дана в аналитическом виде. Интегральные свойства сечений стержня в таких решениях не экстрагируются.

В реальных трубопроводных системах длина свободных участков обычно намного больше диаметра труб. Для низших частот свободных колебаний трубопроводов длина волны собственной формы колебаний в продольном направлении значительно больше длины волны в окружном направлении, ограниченной длиной полуокружности. Это позволяет при анализе оболочечных форм колебаний использовать полубезмоментную теорию Власова и существенно упростить вычисления. В этом и состоит отличие настоящей работы от многих исследований, где часто рассматриваются тороидальные оболочки, длина которых сопоставима с радиусом, и где преобладают оболочечные формы колебаний.

1. Основные соотношения для торообразной оболочки. Все обозначения, направления, обоснования принимаемых упрощений и гипотез совпадают с принятыми в статическом анализе [1]. Поэтому постановочные уравнения приводим в сокращенном виде. Уравнения равновесия торообразной оболочки при $\alpha \rightarrow 0$ имеют вид

$$\frac{N_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{N_x \sin \varphi}{B_0} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0; \quad (4a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{Q_\varphi}{R} + \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{N_x \cos \varphi}{B_0} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \quad (4б)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{Q_x \sin \varphi}{B_0} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad (4в)$$

$$Q_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} = 0; \quad (4г)$$

$$Q_x + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0, \quad (4д)$$

где N_φ , N_x , Q_φ , Q_x – внутренние продольные и поперечные силы в соответствующих направлениях; M_φ , M_x – внутренние изгибающие моменты; L , $M_{\varphi x}$ – касательные сила и момент соответственно; u , v , w – продольное, тангенциальное и радиальное перемещения срединной поверхности; φ – угловая координата по сечению трубы. Для гiba $x = B\xi$, где ξ – угловая координата поперечного сечения гiba.

Геометрические уравнения, связывающие перемещения точек срединной поверхности и деформации, имеют вид

$$\varepsilon_\xi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v \cos \varphi + w \sin \varphi}{B_0}; \quad (5а) \quad \chi_\xi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (6а)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}; \quad (5б) \quad \chi_\varphi = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{w}{R^2}; \quad (6б)$$

$$\gamma_{\xi\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad (5в) \quad \chi_{\xi\varphi} = \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}, \quad (6в)$$

где ε_ξ , ε_φ , $\gamma_{\xi\varphi}$ – деформации срединной поверхности; χ_ξ , χ_φ , $\chi_{\xi\varphi}$ – кривизны в соответствующих направлениях.

Внутренние силы и моменты связаны с деформациями следующим образом:

$$N_\varphi = H(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_\xi); \quad (7а) \quad M_\varphi = H\delta(\chi_\varphi + \mu\chi_\xi); \quad (8а)$$

$$N_x = H(\varepsilon_\xi + \mu\varepsilon_\varphi); \quad (7б) \quad M_x = H\delta(\chi_\xi + \chi_\varphi); \quad (8б)$$

$$L = \frac{H}{2}(1-\mu)\gamma_{\xi\varphi}; \quad (7в) \quad M_{\varphi x} = \frac{H\delta(1-\mu)}{2}\chi_{\xi\varphi}, \quad (8в)$$

где $H = \frac{Eh}{1-\mu^2}$; $\delta = \frac{h^2}{12}$; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона.

Опыт расчета тороидальной оболочки при статическом нагружении, в том числе с учетом краевого эффекта [4–6], показал, что для оболочечных компонент можно применить такие упрощающие гипотезы полубезмоментной теории Власова:

$$\gamma_{\xi\varphi} = 0; \quad \varepsilon_\varphi = 0, \quad (9а)$$

из которых следуют условия связи оболочечных компонент перемещений:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -R \frac{\partial v}{\partial x}; \quad w = -\frac{\partial v}{\partial \varphi}. \quad (9б)$$

При проведении динамического анализа также будем применять гипотезы (9), которые накладывают ограничение не только на длину волны, но и на рассматриваемые формы колебаний. Из теории Власова следует еще одно условие, которое позволяет упростить исходные уравнения. Рассматриваются только такие моды оболочечных колебаний, длина волны деформирования которых в осевом направлении значительно меньше таковой в окружном:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}. \quad (10)$$

В этом случае в уравнениях равновесия можно пренебречь величинами Q_x , M_x , M_φ . Запишем выражения для остальных силовых компонент в уравнениях (4).

В соответствии с гипотезами (9) и геометрическими уравнениями (6) из уравнения равновесия (4г) получим следующее выражение для поперечной силы Q_φ :

$$Q_\varphi = -\frac{H\delta}{R^3} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right). \quad (11)$$

Осевая сила N_x выражается через тангенциальные перемещения v . Полагая, что окружная сила $N_\varphi \rightarrow 0$, из выражений (7) с учетом (5) и (9) имеем

$$\frac{\partial N_x}{\partial \varphi} = -EhR \left(-\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sin \varphi}{RB_0} \left(v + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) \right), \quad (12)$$

где θ – угол поворота всего сечения как целого [1].

Дифференцируя уравнение (4в) один раз по угловой координате φ , получаем выражение для касательного усилия L , которое с учетом уравнения для N_x (12) записывается так:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} = EhR^2 \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\sin \varphi}{RB_0} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^2 \partial x} \right) \right) - \rho h R^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x}. \quad (13)$$

Отметим, что гипотезы (9) могут использоваться, если исключить величины N_φ и L из уравнений равновесия. Для этого уравнение (4а) дифференцируем один раз по угловой координате φ и вычитаем его из (4б). Продифференцировав два раза полученное уравнение по координате φ и подставив в него выражение для касательного усилия L (4в), с учетом $\alpha \rightarrow 0$ и условия (10) запишем следующее уравнение:

$$\frac{1}{R} \left(\frac{\partial^4 Q_\varphi}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 Q_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) + R \frac{\partial^3 N_x}{\partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{2N_x \cos \varphi}{B_0} + \frac{\sin \varphi}{B_0} \frac{\partial N_x}{\partial \varphi} \right) +$$

$$+ \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} \right) = 0. \quad (14)$$

Применение гипотез (9) позволило выразить все функции в (14) только через одну неизвестную величину – тангенциальное перемещение v . На примере цилиндрической оболочки покажем, что при анализе собственных частот применение гипотез (9) и (10) является обоснованным.

2. **Динамический анализ прямой трубы.** Для прямой трубы в постановочных уравнениях необходимо положить $B_0 = \infty$. Тогда уравнение (14) записываем так:

$$\left(\frac{\partial^8 v}{\partial \varphi^8} + 2 \frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} \right) + 12(1 - \mu^2) \frac{R^6}{h^2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{12(1 - \mu^2)R^4 \rho}{Eh^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} \right) = 0. \quad (15)$$

Поскольку цилиндрическая оболочка замкнута в окружном направлении, тангенциальные перемещения v с использованием условия периодичности по координате φ удобно представить в следующем виде:

$$v(x, \varphi, t) = V_n(x) \sin n\varphi \sin \omega t, \quad (16)$$

где $V_n(x)$ – неизвестные функции от осевой координаты x ; n – числа натурального ряда, характеризующие деформирование в окружном направлении.

Подставляя в уравнение (15) разложение (16), получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка по переменной x для определения неизвестных функций $V_n(x)$:

$$V_n^{IV} - \left(\frac{\rho \omega^2}{ER^2} n^2 (n^2 + 1) - \frac{n^4 (n^2 - 1)^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{h^2}{R^6} \right) V_n = 0. \quad (17)$$

Структура полученного уравнения подобна таковой дифференциального уравнения движения для балки (2). Заметим, что данное уравнение применимо только для оболочек средней и большой длины, для которых выполняется условие (10). Отметим также, что для волны очень большой длины в продольном направлении значение V_n^{IV} становится пренебрежимо малым, в результате получаем известные уравнения частот для кольца (см., например, [13]).

Решение такого уравнения может быть также получено для общего случая (для разных типов закрепления) и записано аналогично выражениям для балки (3) [3] через функции Крылова. Четыре неизвестные постоянные в решении уравнения (17) могут быть выражены через начальные значения четырех параметров, в качестве которых, как и при статическом нагружении,

выбираем тангенциальное v и продольное u перемещения, осевое N_x и касательное L усилия. Уравнения для этих параметров имеют следующий вид:

$$v_n = v_n^0 Y_{1,n} + (-1)^n \frac{nu_n^0}{R} \frac{Y_{2,n}}{k_n} + (-1)^n \frac{nN_{xn}^0}{EhR} \frac{Y_{3,n}}{k_n^2} - \frac{n^2 L_n^0}{EhR^2} \frac{Y_{4,n}}{k_n^3}; \quad (18a)$$

$$u_n = u_n^0 Y_{1,n} + \frac{N_{xn}^0}{EhR} \frac{Y_{2,n}}{k_n} + (-1)^{n+1} \frac{nL_n^0}{EhR} \frac{Y_{3,n}}{k_n^2} - (-1)^{n+1} \frac{k_n R v_n^0}{n} Y_{4,n}; \quad (18б)$$

$$N_{xn} = N_{xn}^0 Y_{1,n} + (-1)^{n+1} \frac{nL_n^0}{R} \frac{Y_{2,n}}{k_n} - (-1)^{n+1} \frac{k_n^2 EhR v_n^0}{n} Y_{3,n} + k_n E h u_n^0 Y_{4,n}; \quad (18в)$$

$$L_n = L_n^0 Y_{1,n} - \frac{k_n^3 EhR^2}{n^2} v_n^0 Y_{2,n} - (-1)^n \frac{n^2 EhR}{n} u_n^0 Y_{3,n} - (-1)^n \frac{k_n R}{n} N_{xn}^0 Y_{4,n}; \quad (18г)$$

где

$$k_n^4 = \frac{\rho \omega^2}{ER^2} n^2 (n^2 + 1) - \frac{n^4 (n^2 - 1)^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{h^2}{R^6}; \quad (19)$$

индекс “0” указывает на принадлежность к началу рассматриваемого участка.

Функции Крылова записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2} (\cos k_n x + \operatorname{ch} k_n x); & Y_2 &= \frac{1}{2} (\sin k_n x + \operatorname{sh} k_n x); \\ Y_3 &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} k_n x - \cos k_n x); & Y_4 &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} k_n x - \sin k_n x). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) несложно получить выражение для собственных частот колебаний цилиндрической оболочки длины S в общем виде

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho R^2 (n^2 + 1)} \left[\frac{(\lambda_m)^4}{n^2} + \frac{n^2 (n^2 - 1)^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{h^2}{R^2} \right], \quad (21)$$

где $\lambda_m = \frac{R}{S} \bar{A}$; число \bar{A} определяется из условия равенства нулю определителя системы уравнений (18), записанной с учетом граничных условий, и соответствует решениям для прямой балки (см., например, [14]).

Рассмотрим два случая колебаний цилиндрической оболочки.

2.1. *Собственные колебания цилиндрической оболочки с шарнирно опертыми краями.* В этом случае граничные условия записываем как $v = N_x = 0$, число $\bar{A} = m\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$ [14]. Полученное выражение для частот (21) представляет интерес, поскольку соответствует предельным случаям, а именно: при $n=1$ и $m \geq 1$ выражение (21) переходит в выражение для частоты колебаний шарнирно закрепленной полой прямой балки [13]:

$$\omega = \frac{m^2 \pi^2}{S^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \approx \frac{m^2 \pi^2}{S^2} \sqrt{\frac{ER^2}{2\rho}}; \quad (22)$$

при $m=0$ и $n \geq 2$ выражение (21) преобразуется в (17а) в [3] для частоты колебаний кругового кольца при плоской деформации.

Для других значений n и m сопоставим приведенное выше выражение для собственных частот с представленными в литературных источниках. Выражение для собственных частот, близкое к (21), получено в [15] на основе принципа минимума потенциальной энергии системы, а также с использованием гипотезы (9б). Классическим решением для собственных частот, полученным на основе точных постановок (рассматривается решение дифференциального уравнения 8-го порядка), является следующее выражение [16, 17]:

$$\omega_{nm}^2 = \frac{E}{\rho R^2} \left[\frac{\lambda_m^4}{(\lambda_m^2 + n^2)^2} + \frac{(\lambda_m^2 + n^2)^2}{12(1 - \mu^2)} \frac{h^2}{R^2} \right]. \quad (23)$$

Формула (23) подтверждается многочисленными экспериментальными данными, ее решение для предельных случаев кольца и балки дает значения частот, которые близки к теоретическим, но не совпадают с ними. При выполнении условия (10), которое для этого случая запишем как

$$n^2 \ll \lambda_m^2, \quad (24)$$

результаты, полученные по выражениям (21) и (23) для тонкостенных цилиндров, практически одинаковые.

2.2. *Собственные колебания цилиндрической оболочки со свободными краями.* В этом случае граничные условия запишем как $N_x = L = 0$, число $\bar{A} = 0; 4,73; 7,8532; 10,996; \frac{\pi}{2}(2m+1)$ [14]. Сопоставим рассчитанные по формуле (21) значения собственных частот с данными [7] (рис. 1). В [7] приведены как экспериментальные данные, так и результаты численного определения собственных частот для прямой трубы с такими параметрами: $E = 2,07 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; $\rho = 7850$ кг/м³; $S = 1,118$ м; $R = 0,0806$ м; $h = 0,00711$ м. При этом выполнена грация собственных частот в зависимости от мод колебаний, определяемых числами m и n . Как видно из рис. 1,

результаты расчета собственных частот по формуле (21) хорошо согласуются с численными и экспериментальными данными [7].

Для рассматриваемой оболочки рассчитывали также первую собственную частоту с помощью программы “3D PipeMaster” [3, 18], предназначенной для анализа трубопроводов как стержневой системы. Этой частоте соответствует мода колебаний 1,1. В зависимости от уравнений движения стержня реализованы две версии программы: в постановке балки Эйлера и в постановке балки Тимошенко. В постановке Эйлера значение $\omega_{1,1} = 834,6$ Гц и совпадает со значением, полученным по (21). В более точной постановке Тимошенко значение $\omega_{1,1} = 749,3$ Гц, что практически соответствует экспериментальному результату (рис. 1).

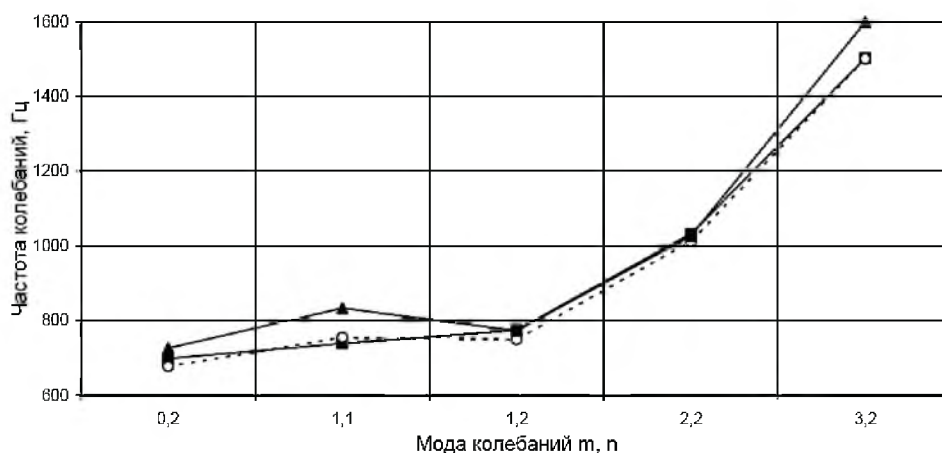


Рис. 1. Собственные частоты колебаний цилиндрической оболочки со свободными краями: ■ – данные эксперимента; ○ – данные по FEA [7]; ▲ – по формуле (21).

Значения собственных частот, рассчитанные по выражению (21) для разных n и m , достаточно хорошо совпадают с численными и экспериментальными результатами, приведенными в литературных источниках. Это свидетельствует о корректности применения гипотез (9) и (10) для анализа частот колебаний цилиндрической оболочки. Будем использовать их и при анализе торообразной оболочки.

3. Динамический анализ торообразной оболочки. Заметим, что рассматривается динамическое деформирование оболочки, аналогичное таковому в задаче Кармана (Сен-Венана), когда краевыми условиями сопряжения гiba с другими конструктивными элементами трубопроводной системы можно пренебречь. Для изгибающего момента в сечении, как и ранее [1], запишем соотношение

$$M = k_{\sigma}(x)\bar{\sigma}\pi R^2 t, \quad (25)$$

где $\bar{\sigma}$ – единичное напряжение; k_{σ} – безразмерный коэффициент, характеризующий величину внешнего нагружения. Решение задачи для перемещений точек деформирования оболочки будем искать в виде

$$v(x, \varphi, t) = \Omega R [V_2(x, \omega) \sin 2\varphi + V_3(x, \omega) \cos 3\varphi + \dots] \sin \omega t, \quad (26)$$

где коэффициент $\Omega = \frac{\bar{\sigma} B_0}{ER}$ введен для удобства; V_n – искомые функции.

Тогда выражение для динамического коэффициента увеличения податливости гйба $K^{\text{д}}$ согласно (12) и (26) при $\alpha \rightarrow 0$ представим так:

$$K^{\text{д}}(x, \omega) = 1 - \frac{3}{2k_{\sigma}(x)} V_2(x, \omega). \quad (27)$$

Неизвестную функцию $V_2(x, \omega)$ определяем с помощью уравнения (14) для тора. При этом используем гипотезы (9) и (10), обоснованность применения которых была проиллюстрирована в статическом анализе [6], а также выше в динамическом анализе прямой трубы.

Подставив в уравнение (17) разложение (26) для перемещений v с учетом (11)–(13) и сравнив коэффициенты при одинаковых тригонометрических членах, т.е. $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$, $n = 2, 3, \dots$, получим взаимосвязанные дифференциальные уравнения четвертого порядка по переменной x для определения неизвестных функций $V_n(x)$ при колебаниях в плоскости кривизны тора. В общем виде эти уравнения запишем так:

$$a_{1,n} V_n + a_{2,n} V_{n-2} + a_{3,n} V_{n+2} + a_{4,n} V_{n-1}'' + a_{5,n} V_{n+1}'' + a V_n^{\text{IV}} = f_n, \quad (28a)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,n} = \overline{a_{1,n}} - n^2(n^2 + 1)B; \\ \overline{a_{1,n}} = \begin{cases} 144 + 12A, & n = 2; \\ n^4(n^2 - 1)^2 + 6An^2(n^2 + 1), & n \geq 3; \end{cases} \\ a_{2,n} = 3An^2(3 - n)(1 + n); & a_{3,n} = 3An^2(3 + n)(1 - n); \\ a_{4,n} = \overline{a_{4,n}}(1 - \mu^2)\lambda R^2 \frac{R}{h}; & a_{5,n} = \overline{a_{5,n}}(1 - \mu^2)\lambda R^2 \frac{R}{h}; \\ \overline{a_{4,n}} = 12(-1)^{n+1} \frac{n^3 - n^2 + n}{n - 1}; & \overline{a_{5,n}} = 12(-1)^n \frac{n^3 + n^2 + n}{n + 1}; \\ A = \frac{R^4(1 - \mu^2)}{B_0^2 h^2} = (1 - \mu^2)\lambda^2; & \begin{cases} f_2 = -72Ak_{\sigma}(x), & n = 2; \\ f_n = 0, & n \geq 3; \end{cases} \\ a = 12(1 - \mu^2) \frac{R^2}{h^2} R^4; & B = \frac{12(1 - \mu^2)\rho R^4 \omega^2}{h^2 E}. \end{array} \right. \quad (28б)$$

Уравнения (28) по структуре близки к уравнениям, получаемым при решении задачи с учетом краевого эффекта [4–6], за исключением того, что в данном случае отыскиваем частное, а не общее решение. В статике частное решение было достаточно простым, поскольку коэффициент $f_2 = \text{const}$. В динамическом анализе f_2 зависит от x .

Рассмотрим решение системы из четырех уравнений, т.е. до $n \leq 5$:

$$a_{1,2}V_2 + a_{3,2}V_4 + a_{5,2}V_3'' + aV_2^{IV} = -72Ak_\sigma(x); \quad (29a)$$

$$a_{1,3}V_3 + a_{3,3}V_5 + a_{4,3}V_2'' + a_{5,3}V_4'' + aV_3^{IV} = 0; \quad (29б)$$

$$a_{1,4}V_4 + a_{2,4}V_2 + a_{4,4}V_3'' + a_{5,4}V_5'' + aV_4^{IV} = 0; \quad (29в)$$

$$a_{1,5}V_5 + a_{2,5}V_3 + a_{4,5}V_4'' + aV_5^{IV} = 0. \quad (29г)$$

Получение решения системы (29) в аналитической форме весьма затруднительно. Чтобы упростить его, сделаем несколько допущений, позволяющих пренебречь подчеркнутыми компонентами в (29).

Первое допущение, которое вполне согласуется с принятой методологией решения, необходимо для получения замкнутого решения. Полагаем, как и в задаче Кармана, что все локальные оболочечные перемещения, а именно: V_2, V_3, V_4, \dots пропорциональны глобальному (балочному) изгибающему моменту, т.е. $\bar{V} \sim k_\sigma(x)$. Поскольку в стержне все компоненты, в том числе и момент, удовлетворяют уравнению (2), ему удовлетворяют и оболочечные компоненты. В связи с этим можно провести следующую замену, позволяющую значительно упростить решение:

$$V_n^{IV} = \frac{\rho FK^\pi(\lambda, \omega^2)\omega^2}{EI_\pi} V_n. \quad (30)$$

Следующее допущение сделано относительно пренебрежения слагаемых, содержащих коэффициент $B(\omega^2)$, в уравнениях (29) при $n \geq 3$. Например, сравнение компонент $a_{1,3}V_3$ и aV_3^{IV} в (29б) с учетом (30) показало, что этими членами можно пренебречь, если выполняется условие

$$B << \frac{57,6 + 6A}{1 + K^\pi/45} = [\bar{B}], \quad (31)$$

где $[\bar{B}]$ – некоторая предельная величина. Это условие является достаточным также для уравнений (29в) и (29г), так как согласно (28б) коэффициенты $a_{1,i+1} \gg a_{1,i}$.

Примем, что допустимое значение безразмерной частоты $[B]$, обеспечивающее корректность решения, равно половине величины $[\bar{B}]$, определяемой из (31):

$$[B] = \frac{28,8 + 3A}{1 + K^\pi/45}. \quad (32)$$

Таким образом, если выполняется условие, что $B \leq [B]$, то в уравнениях (29) при $n \geq 3$ можно пренебречь компонентами с четвертой производной, а выражение для коэффициента $a_{1,n}$ примет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{1,n} = \overline{a_{1,n}} - n^2(n^2 + 1)B; & \overline{a_{1,n}} = 144 + 12A, & n = 2; \\ a_{1,n} = \overline{a_{1,n}}; & \overline{a_{1,n}} = n^4(n^2 - 1)^2 + 6An^2(n^2 + 1), & n \geq 3. \end{cases} \quad (33)$$

С учетом сделанных допущений можно показать, что в ходе решения допускается пренебрежение остальными подчеркнутыми членами, а система (29) сводится к линейному уравнению относительно одной неизвестной функции V_2 :

$$V_2 = \frac{-72Ak_\sigma(x)}{F_1 - B(20 - K^\Pi F_2)}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \overline{a_{1,2}} - a_{3,2} \frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} = \frac{4800 + 536A + 3A^2}{8(600 + 17A)}; \\ F_2 &= 2 - \frac{A}{6} \frac{\left(\overline{a_{5,2}} - a_{3,2} \frac{\overline{a_{4,4}}}{a_{1,4}} \right) \left(\overline{a_{4,3}} - a_{5,3} \frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} \right)}{\overline{a_{1,3}} - a_{3,3} \frac{a_{2,5}}{a_{1,5}}} = 2 - \frac{A(5600 + 137A)^2}{8(600 + 17A)^2(48 + 5A)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставив выражение для V_2 (34) в (27), получим квадратное уравнение относительно динамического коэффициента увеличения податливости K^Π . Решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$K^\Pi = \frac{B(20 + F_2) - F_1 + \sqrt{(F_1 - B(20 - F_2))^2 + 432AF_2B}}{2F_2B}. \quad (36)$$

Заметим, что в предельном случае при $B = 0$ выражение (34) дает статическое значение V_2 , а выражение (36) переходит в формулу Кармана для K^Π (коэффициент увеличения податливости, полученный из решения задачи Сен-Венана) во втором приближении:

$$K^\Pi = \frac{4800 + 4136A + 105A^2}{4800 + 536A + 3A^2}. \quad (37)$$

В качестве примера на рис. 2 приведены зависимости K^Π , рассчитанные по формуле (36), от безразмерной частоты B для разных значений A . Графики построены до значений $B \leq [B]$, определяемых выражением (32). С повышением частоты наблюдается увеличение коэффициента K^Π .

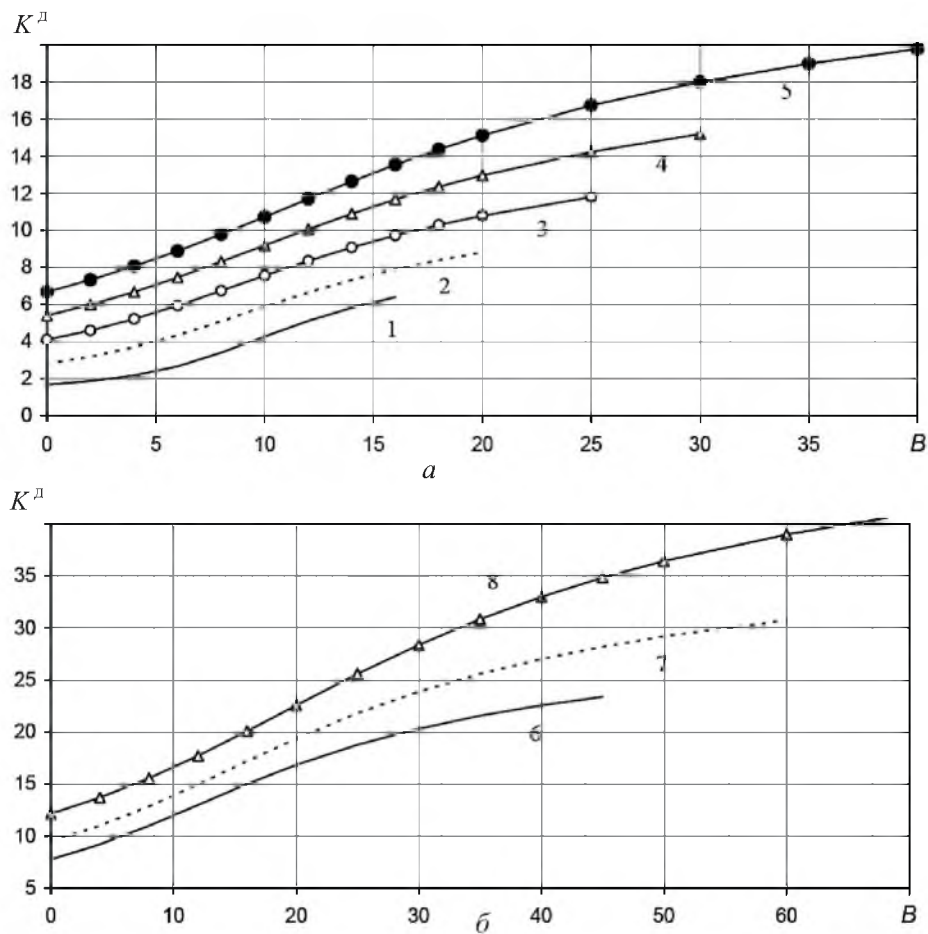


Рис. 2. Зависимости динамического коэффициента увеличения податливости K^D от безразмерной частоты B : 1 – $A = 1$; 2 – $A = 3$; 3 – $A = 6$; 4 – $A = 10$; 5 – $A = 15$; 6 – $A = 20$; 7 – $A = 30$; 8 – $A = 50$.

Сопоставим значения собственных частот торообразной оболочки, полученные по предлагаемому методу с учетом динамического коэффициента увеличения податливости, с результатами, приведенными в литературных источниках.

4. Примеры расчета собственных частот торообразной оболочки.

Пример 1. Гиб с прямыми трубами на концах [7]. В [7] приведены данные экспериментов и численного определения собственных частот колебаний длягиба трубы, сопряженного с прямыми трубами на концах. Анализ колебаний выполнен как в плоскостигиба (обозначим s), так и из плоскости (обозначим a). Исходные параметры таковы: длина центральной линии всей конструкции $S = 1,118$ м; длина каждой прямой трубы 0,2 м; радиусгиба $B_0 = 0,457$ м; уголгиба $\theta = 90^\circ$; средний радиус сечения трубы $R = 0,0806$ м; толщина стенки трубы $h = 0,00711$ м; модуль Юнга $E = 2,07 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; плотность $\rho = 7850$ кг/м³. Граничные условия – свободные края. В этом примере $\lambda = 2$.

Результаты расчета собственных частот, полученные с применением разработанной программы “3D PipeMaster” и путем решения системы (29), представлены в табл. 1. Там же приведены данные экспериментов и численные результаты [7]. Для большей наглядности эти результаты представлены также на рис. 3. Для иллюстрации влияния коэффициента увеличения податливости K на значение собственных частот был выполнен расчет с помощью программы “3D PipeMaster” для трех значений K :

- 1) гиб трубы не овализируется, и $K = 1$. Такая модель дает слишком завышенные значения собственных частот;
- 2) K не зависит от частоты колебаний и соответствует значению, определенному по Сен-Венану, $K^л = 3,13$. Такая модель также приводит к неточному (завышенному) определению собственных частот;
- 3) $K = K^л$ определяется по предложенной методике. Результаты расчета собственных частот по этой методике хорошо согласуются с экспериментальными данными [7].

Т а б л и ц а 1

Собственные частоты ω (Гц) колебаний гнба с прямыми трубами

| Мода колебаний [7] | Данные [7] | Полученные результаты при | | | $\frac{B}{[B]}$ |
|--------------------|---------------------|---------------------------|--------------|----------------|-----------------|
| | | $K = 1$ | $K^л = 3,13$ | $K^д$ | |
| $R,2s$ | $\frac{325}{366}$ | 637 | 377 | 358,0 (3,49) | 0,05 |
| $R,2a$ | $\frac{545}{538}$ | 1005 | 601 | 532,0 (4,04) | 0,11 |
| $1,2s$ | $\frac{742}{714}$ | 1592 | 1034 | 791,0 (5,72) | 0,24 |
| $1,2a$ | $\frac{742}{714}$ | 1203 | 952 | 767,0 (5,52) | 0,25 |
| $2,2a$ | $\frac{879}{879}$ | – | – | 822,5 | – |
| $2,2s$ | $\frac{881}{908}$ | – | – | 822,5 | – |
| $3,2s$ | $\frac{1258}{1367}$ | 2669 | 1980 | 1248,0 (9,47) | 0,65 |
| $3,2a$ | $\frac{1309}{1384}$ | 1854 | 1507 | 1244,0 (9,50) | 0,64 |
| $1,1s$ | $\frac{1453}{1436}$ | – | – | 1454,0 | – |
| $1,1a$ | $\frac{1550}{1533}$ | 2671 | 1969 | 1419,0 (10,45) | 0,85 |

Примечания. 1. Над чертой приведены данные экспериментов, под чертой – полученные расчетами по МКЭ. 2. Здесь и в табл. 2, 3 в скобках указаны соответствующие значения $K^д$, при которых были получены собственные частоты.

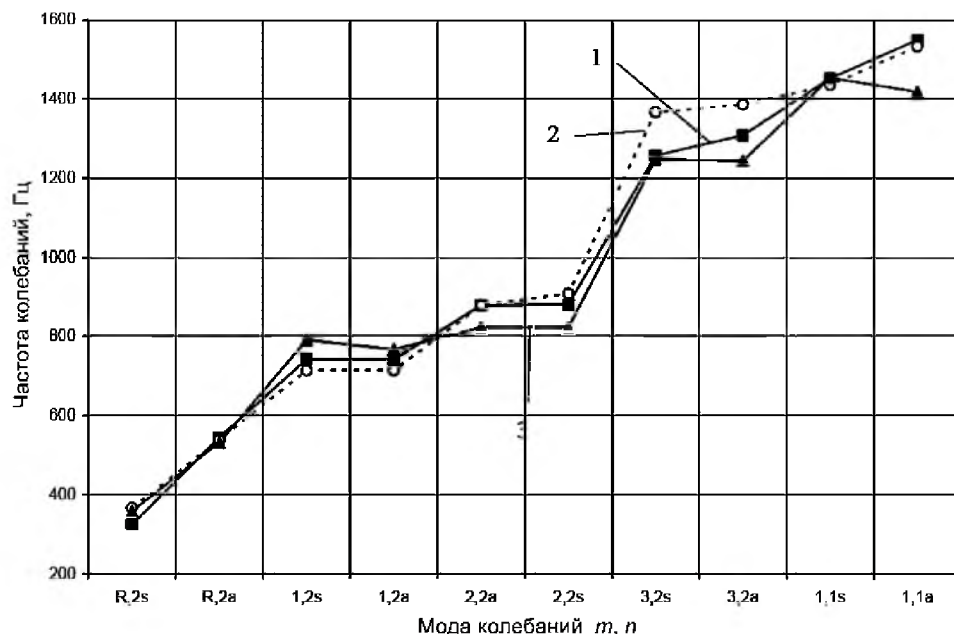


Рис. 3. Собственные частоты колебанийгиба с прямыми трубами: 1 – данные эксперимента [7]; 2 – данные по FEA [7]; 3 – результаты, полученные при K^D .

В отличие от прямой трубы, в гйбе моды колебаний взаимосвязаны между собой. Поэтому интерпретация полученных экспериментально или численно частот и мод колебаний неоднозначна. Поскольку предложенный метод анализа не позволяет провести градацию полученных собственных частот в зависимости от мод колебаний, определяемых числами m и n в [7], сопоставление результатов проводили по значениям частот. Определенные с помощью программы “3D PipeMaster” значения частот совпадают с таковыми для следующих мод в [7]: $R,2s$; $R,2a$; $1,2s$; $1,2a$; $3,2s$; $3,2a$; $1,1s$; $1,1a$ (рис. 3). Как было показано выше на примере цилиндрической оболочки, первая частота, которая может быть рассчитана с помощью программы “3D PipeMaster”, соответствует моде 1,1. То, что авторы работы [7] связывают ее с рэлеевской частотой, т.е. $m = 0$, $n = 2$, может быть связано с овализацией гйба.

Частоты, соответствующие согласно [7] модам $2,2a$; $2,2s$, на наш взгляд, отвечают колебаниям тора при отсутствии изгибающего момента, т.е. коэффициент k_σ в (25) равен нулю. Эти частоты не могут быть определены с помощью разработанного комплекса, предназначенного для расчета балочных форм колебаний. Между тем такие частоты колебаний легко определяются путем решения системы (29), в которой необходимо принять, что все производные по осевой координате и коэффициент f_2 равны нулю.

Кроме того, полагаем, что частота, соответствующая по [7] моде $1,1s$, отвечает колебаниям тора при условии $d\theta/dx = 0$. Такая частота определяется при решении системы (29) с учетом того, что все производные по осевой координате равны нулю, а коэффициент $f_2 = -108AV_2$, что следует из уравнения для прироста угла поворота [1].

В табл. 1 также приведено отношение безразмерной частоты B к ее допустимому значению $[B]$, рассчитанному по (32). Для всех рассматриваемых случаев выполняется условие $B < [B]$.

Пример 2. Собственные колебания ггиба трубы. В [19] представлены данные экспериментов и численного определения собственных частот колебаний для ггиба трубы с одним свободным концом и жесткой заделкой на другом. Приведены значения первых пяти частот при колебаниях в плоскости ггиба. Исходные параметры следующие: радиус ггиба $B_0 = 0,2$ м; угол ггиба $\theta = 90^\circ$; средний радиус сечения трубы $R = 0,05$ м; толщина стенки трубы $h = 0,002$ м; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$; плотность $\rho = 7850$ кг/м³. В этом примере $\lambda = 6,25$.

Результаты расчета собственных частот с применением разработанной программы “3D PipeMaster” и путем решения системы (29) представлены в табл. 2 и на рис. 4. Там же приведены данные экспериментов и численные результаты [19]. Аналогично первому примеру был выполнен расчет для трех значений K . В результате расчетов при $K = 1$ и $K = K^{\text{п}} = 10,3$ полученные значения собственных частот сильно завышены. Собственные частоты, определенные при $K = K^{\text{д}}$, хорошо согласуются с экспериментальными результатами [19] вплоть до значений $B < [B]$. При $B > [B]$ значения $K^{\text{д}}$ по предложенному методу занижены и, следовательно, завышены значения собственной частоты (мода колебаний 5 в табл. 2). Как и в первом примере, одна из частот соответствует колебанию тора при отсутствии изгибающего момента (мода колебаний 2 в табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Собственные частоты ω (Гц) колебаний ггиба

| Мода колебаний [19] | Данные [19] | Полученные результаты при | | | $\frac{B}{[B]}$ |
|---------------------|---------------------|---------------------------|-----------------------|----------------|-----------------|
| | | $K = 1$ | $K^{\text{п}} = 3,13$ | $K^{\text{д}}$ | |
| 1 | $\frac{334}{546}$ | 942 | 318 | 305 (11,2) | 0,02 |
| 2 | $\frac{637}{854}$ | – | – | 882 | – |
| 3 | $\frac{1066}{1605}$ | 2730 | 1329 | 939 (22,2) | 0,26 |
| 4 | $\frac{1700}{1807}$ | 5251 | 3269 | 1885 (37,1) | 1,26 |
| 5 | $\frac{1778}{2156}$ | 7707 | 5113 | 3105 (41,5) | 3,62 |

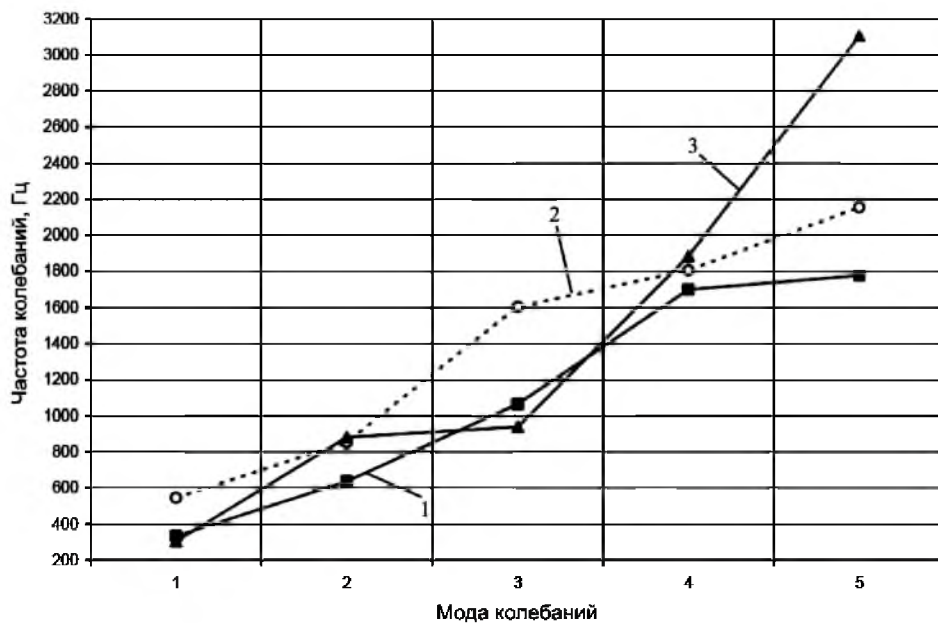
Примечание. Над чертой приведены данные экспериментов, под чертой – полученные расчетами по МКЭ.

Пример 3. Собственные колебания ггиба трубы с двумя разными прямыми трубами на концах. В работе [20] приведены данные экспериментов и результаты расчета (табл. 3) первых трех собственных частот трубной конструкции при колебаниях ее в плоскости (обозначим s) и из плоскости (обозначим a).

Т а б л и ц а 3

Собственные частоты ω (Гц) трубной конструкции

| Мода колебаний [20] | Эксперимент [20] | Балочная модель | | Оболочечная модель | | | $\frac{B}{[B]}$ |
|---------------------|------------------|-----------------|-----------------|--------------------|-------------|--------------|---------------------|
| | | по данным [20] | наши результаты | по данным [20] | $K^1 = 5,3$ | K^1 | |
| 1 $_{\text{с}}$ | 81,8 | 104,4 | 105,3 | 84,2 | 82,7 | 82,6 (5,31) | $2,5 \cdot 10^{-5}$ |
| 2 $_{\text{а}}$ | 263,3 | 269,9 | 270,6 | 263,8 | 270,1 | 270,1 (5,31) | $2,6 \cdot 10^{-4}$ |
| 3 $_{\text{с}}$ | 270,8 | 302,8 | 305,8 | 275,6 | 278,7 | 278,5 (5,31) | $2,8 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 $_{\text{а}}$ | 611,4 | 640,7 | 634,5 | 611,3 | 627,5 | 627,4 (5,33) | $1,4 \cdot 10^{-3}$ |
| 5 $_{\text{с}}$ | 635,8 | 655,9 | 663,0 | 633,3 | 644,5 | 644,4 (5,33) | $1,5 \cdot 10^{-3}$ |
| 6 $_{\text{а}}$ | 798,0 | 883,5 | 856,5 | 805,2 | 846,1 | 846,1 (5,35) | $2,6 \cdot 10^{-3}$ |

Рис. 4. Собственные частоты колебанийгиба: 1 – данные эксперимента [19]; 2 – данные по FEA [19]; 3 – результаты, полученные при K^1 .

Конструкция состоит изгиба трубы и присоединенных к нему прямых труб разной длины. Геометрические размеры конструкции таковы: длины прямых труб составляют 0,5 и 0,3 м; радиусгиба $B_0 = 0,025$ м; уголгиба $\theta = 90^\circ$; внешний диаметр трубы $D = 0,0191$ м; толщина стенки трубы $h = 0,001$ м. Материал – медь с параметрами: модуль Юнга $E = 1,37 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu = 0,32$; плотность $\rho = 8930$ кг/м³. Граничные условия – свободные края. В этом примере $\lambda = 3,3$.

В [20] выполнен расчет собственных частот по балочной ($K = 1$) и оболочечной моделям. Как и в предыдущих примерах, расчеты проводили с помощью программы “3D PipeMaster” для трех значений K : $K = 1$;

$K = K^I = 5,3$; $K = K^D$. Полученные по балочной модели значения собственных частот, как и в предыдущих примерах, были больше экспериментальных данных и совпадали с аналогичными данными работы [20]. Результаты расчета при K^I и K^D близки между собой и хорошо согласуются с данными эксперимента. Это связано с тем, что величина B в данном случае очень мала и не оказывает существенного влияния на значение K^D .

Заключение. Построена аналитическая математическая модель динамического поведения цилиндрических и торообразных оболочек с использованием упрощающих гипотез Власова для оболочечных перемещений и проведен ее анализ. Для цилиндрических оболочек средней и большой длины получено выражение собственных частот колебаний, подтвержденное экспериментальными данными. Преимущество полученного выражения перед приведенными в литературных источниках заключается в том, что оно соответствует предельным случаям колебания цилиндра как кольца и балки Эйлера.

Для торообразных оболочек впервые введено понятие динамического коэффициента увеличения податливости. Для него получено аналитическое выражение в зависимости от геометрических параметровгиба и частоты колебаний. На основе этого разработана методика учета повышенной податливостигиба трубы при динамическом нагружении, позволяющая корректно применять стержневую модель и метод динамических жесткостей для динамического анализа криволинейных труб.

На ряде примеров показана эффективность использования полученного выражения для динамического коэффициента увеличения податливости. Использование в динамическом анализе коэффициента увеличения податливости, определенного из статического анализа, в общем случае приводит к существенным ошибкам.

Резюме

Сформульовано поняття динамічного коефіцієнта піддатливості згину труби для використання в задачах розрахунку гармонійних коливань трубопроводів. На основі напівбезмоментної теорії Власова застосовано спрощуючі гіпотези, що дозволяє звести постановку задачі до розв'язку диференціального рівняння четвертого ступеня. Із використанням результатів проведеного динамічного аналізу тороподібних оболонок розроблено методику врахування підвищеної піддатливості згину труби при динамічному навантаженні. Отримано вираз для коефіцієнта збільшення піддатливості в залежності як від геометричних параметрів згину, так і частоти коливань. На великій кількості прикладів проілюстровано ефективність отриманого виразу для коефіцієнта збільшення піддатливості.

1. Орыняк И. В., Радченко С. А. Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // Пробл. прочности. – 2004. – № 3. – С. 23 – 51.

2. Орыняк И. В., Радченко С. А. Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 2. Пространственный изгиб с учетом внутреннего давления // Там же. – № 4. – С. 46 – 59.
3. Орыняк И. В., Радченко С. А., Батура А. С. Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщ. 1. Анализ колебаний пространственной стержневой системы // Там же. – 2007. – № 1. – С. 79 – 93.
4. Орыняк И. В., Радченко С. А. Классический подход к анализу влияния краевых условий на напряжения и податливость упругогогиба трубы // Там же. – 2005. – № 4. – С. 64 – 94.
5. Orynyak I. V., Radchenko S. A., and Rozgonyuk V. V. The classical approach to end-effect analysis of elastic pipe bend: Proc. 4th Int. Conf. on Pipeline Technology / Ed. R. Denys (Ostend, Belgium, 9–13 May, 2004). – 2004. – 3. – P. 1405 – 1416.
6. Orynyak I. V. and Radchenko S. A. Analytical and numerical solution for a elastic pipe bend at in-plane bending with consideration for the end effect // Int. J. Solids Struct. – 2007. – 44, Is. 5. – P. 1488 – 1510.
7. Salley L. and Pan J. A study of the modal characteristics of curved pipes // Appl. Acoustics. – 2002. – 63. – P. 189 – 202.
8. Leung A. Y. T. and Kwok N. T. C. Dynamic Stiffness analysis of toroidal shells // Thin-Walled Struct. – 1995. – 21. – P. 43 – 64.
9. Ming R. S., Pan J., and Norton M. P. Free vibrations of elastic circular toroidal shells // Appl. Acoustics. – 2002. – 63. – P. 513 – 528.
10. Jiang W. and Redekop D. Static and vibration analysis of orthotropic toroidal shells of variable thickness by differential quadrature // Thin-Walled Struct. – 2003. – 41. – P. 461 – 478.
11. Redekop D. and Xu B. Vibration analysis of toroidal panels using the differential quadrature method // Ibid. – 1999. – 34. – P. 217 – 231.
12. Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А., Гайдачук В. В. Расчет оболочек сложной формы. – Киев: Будівельник, 1990. – 192 с.
13. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.
14. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 3. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.
15. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. – М.: Машиностроение, 1966. – 507 с.
16. Ониашвили О. Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек. – М.: Изд-во АН СССР, 1957. – 195 с.
17. Soedel W. Vibration of Shells and Plates / Ed. M. Dekker (2nd edition). – New York, 1992.
18. Орыняк И. В., Торон В. М., Ромащенко В. А., Жураховский С. В. Расчет пространственного разветвленного трубопровода в программном комплексе оценки прочности оборудования АЭС // Пробл. прочности. – 1998. – № 2. – С. 87 – 100.

19. *Carneiro J. O., De Melo F. J. Q., Rodrigues J. F. D., et al.* The modal analysis of a pipe elbow with realistic boundary conditions // *J. Press. Vess. Piping.* – 2005. – **82**. – P. 593 – 601.
20. *Duan C., Ying G., and Meng G.* Exact FE model for air conditioner piping system based on the thickness plastic deformation equation for the bend part // *Struct. Eng. Mech.* – 2007. – **5**. – P. 421 – 435.

Поступила 15. 09. 2006