

УДК 532.526

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

В. Т. МОВЧАН, Е. А. ШКВАР

Национальный авиационный университет, Киев

Получено 25.02.2005

Представлен обзор формирования и развития теории пограничного слоя, а также соответствующих ей физических и математических моделей. Излагается один из плодотворных полуэмпирических подходов, развиваемый авторами по разработке непрерывной алгебраической модели турбулентной вязкости. Представлены различные приложения построенной теории к расчету ряда течений в рамках приближения пограничного слоя. Приведены примеры тестовых расчетов турбулентных течений.

Представлено огляд формування і розвитку теорії примежового шару, а також відповідних до неї фізичних і математичних моделей. Висвітлюється один з плідних напівемпіричних підходів, що розвивається авторами по розробці неперервної алгебраїчної моделі турбулентної в'язкості. Наведені різноманітні застосування побудованої теорії до розрахунків ряду течій в рамках наближення примежового шару. Наведені приклади тестових розрахунків турбулентних течій.

A review of forming and developing of the boundary layer theory together with corresponding physical and mathematical models is presented. One of fruitful semiempirical approaches elaborating by authors in the direction of development of the algebraic model of turbulent viscosity is described. Several applications of created theory for flow calculations in frame of boundary layer approximation are demonstrated. The examples of predictions of flow characteristics are presented.

ВВЕДЕНИЕ

Хотя прошло 100 лет со времени создания Л. Прандтлем физической и математической моделей пограничного слоя, интерес к исследованию течений в пограничных слоях не угасает и поныне. На время опубликования Л. Прандтлем модели пограничного слоя были известны и уравнения идеального движения Эйлера, и уравнения Навье-Стокса для описания динамики вязких течений, однако уравнения пограничного слоя Прандтля оказались вехой в механике жидкости и газа. На то время гидромеханика разделялась на две самостоятельные ветви науки – теоретическую, основанную на модели невязкого течения Эйлера, и экспериментальную гидродинамику или гидравлику. Математическая теория невязкого течения хотя и давала достоверную картину для отдельных типов течений, но не могла ответить на важные для практики вопросы – о сопротивлении тела при движении в жидкости, о теплопередаче между телом и движущейся жидкостью, о потерях давления при движении жидкости или газа в трубах или каналах. Гидравлика, методы которой нашли широкое применение в инженерной практике, представляла не столько рациональную систему знаний, сколько набор эмпирических фактов. Модель Прандтля объединила эти два самостоятельно развивавшихся раздела науки в единую науку – гидромеханику. Она позволила объяснить влияние трения на

развитие течения и понять суть явления отрыва, которое отрицательно влияет на подъемную силу – она резко уменьшается.

Прандтль, которого считают одним из основоположников экспериментальной аэродинамики, рассмотрел ряд задач теории крыла, в том числе крыла конечного размаха, крыла с наиболее выгодным распределением циркуляции. Он внес неоценимый вклад в науку о турбулентности, исследовал проблему теплопередачи в течении, открыл один из основных критериев подобия тепловых процессов в жидкостях и газах – число Прандтля.

Теория пограничного слоя широко используется при решении важных проблем в различных областях техники, где присутствуют процессы обтекания поверхностей. Самолето-, корабле-, ракето-, тепловозо-, автомобиле-, энергомашиностроение – эти и многие другие направления инженерной деятельности в значительной мере обязаны своим прогрессом использованию модели пограничного слоя.

Значимость теоретических и экспериментальных исследований в практической деятельности определяется количеством публикаций. Интересная статистика роста приведена в [28]. Так, с 1934 по 1964 г. число публикаций по пограничному слою утроилось, а в последующие два десятилетия они каждый раз удваивались и в 1982 г. было опубликовано фантастическое число работ по пограничному слою – более 1200.

Необходимо отметить, что модель погранично-

го слоя стимулировала дальнейшие значительные исследования пристенных течений теоретического и экспериментального характера.

Наиболее распространены в природе и в технике турбулентные течения. Так, турбулентными в своем большинстве являются течения в пограничных слоях на поверхностях летательных аппаратов, автомобилей, поездов, в следах за подвижными телами, в соплах реактивных двигателей и в струях за ними, а также в трубах и каналах различной геометрии и предназначения. Турбулентными являются течения в океанах, морях, реках, течения воздушных масс атмосферы (ветры, бури, смерчи). Поэтому не уменьшается значительный интерес к начатым еще в позапрошлом столетии исследованиям турбулентных течений.

Для успешного изучения явлений природы, а было это понято еще в эпоху Большого Возрождения, необходимы и наблюдения, и эксперименты, и математические описания явления. Математическая формализация задачи, решение ее и анализ результатов дают возможность получить наиболее общее и глубокое представление об исследуемом явлении. С математической точки зрения турбулентное течение, как и ряд других явлений природы, представляет настолько сложную проблему, что ее решение не может не использовать результаты эксперимента. Несмотря на то, что турбулентность является предметом большого внимания специалистов прикладной физики и математики, механики жидкости и газов, техники, усилий многих ученых, проблема турбулентности и сегодня оказывается не менее острой, чем она была более ста лет тому назад, когда ее высказал О. Рейнольдс [1, 2]. Среди множества подходов к описанию турбулентных течений на сегодня основанием для проведения конкретных расчетов, несмотря на интенсивное развитие методов крупных вихрей или прямого численного моделирования, остаются полуматематические подходы. Математические полуматематические модели турбулентности своими истоками обязаны работам Буссинеска, Рейнольдса, Тейлора, Кармана и Прандтля [1, 2]. Так как математическое моделирование полуматематического направления опирается на знание его структуры, то изменение ее стало одной из центральных проблем механики турбулентных течений. Прандтль [1] первым начал изучать структуру турбулентного пограничного слоя, предложив двухслойную схему – ламинарный слой и турбулентное ядро. Карман ввел между этими зонами переходную или буферную зону. Экспериментальные исследования многих ученых указали на наличие двух существенно различных обла-

стей в пограничном слое, отличающихся как характером течения, так и характерными масштабами. Окончательно схема двух областей утвердилась после классических экспериментальных результатов Клаузера [11] относительно вихревой структуры пограничного слоя. Согласно результатам этих исследований, в пристенной области турбулентность является мелкомасштабной с “короткой памятью”, а во внешней – крупномасштабной с “долгой памятью”. Затухание возмущений во внешней области, согласно исследованиям Клаузера, осуществляется на расстояниях, значительно больших, нежели во внутренней, и равной нескольким толщинам пограничного слоя. Это означает, что течение во внешней области в значительной мере зависит от предыстории течения. Обе области существенно отличаются масштабом вихревых структур. Дальнейшие экспериментальные исследования [3, 12–14] обнаружили существование крупномасштабных квазипериодических детерминированных или когерентных структур, которые оказывают существенное, а то и определяющее влияние на развитие течения. Согласно экспериментальным исследованиям, существуют четыре основных элемента организованных структур. Цепочка продольных вихрей, которые вращаются в противоположных направлениях, колеблются и покрывают всю гладкую стенку. Над ними размещается зона низкоскоростных движений с чередованием больших и меньших скоростей. Область перемежаемости называют жгутами. Взаимодействие жгутов с течением происходит в такой последовательности: образование, подъем, внезапные колебания и разрушение. Последовательность от подъема до разрушения называют вспышками. Во внешней области также осуществляются интенсивные мелкомасштабные движения. Основные элементы внешней области – это крупномасштабные поперечные вихри, характеризующиеся размерами порядка толщины пограничного слоя и типичные вихри с большой энергией в зоне перемежаемости. Известные результаты исследований организованных структур свидетельствуют об отсутствии полного понимания процессов переноса в этих структурах. Считается достоверным факт образования преобладающей части турбулентности вблизи стенки на вспышках, но сам механизм, приводящий к условиям их реализации, остается неясным. Приведенная схема структуры представляет собой очень сложную и не до конца изученную картину взаимодействия структурных элементов. Карман и Тейлор определяли турбулентность как неупорядоченное движение во времени, а Хинце отметил, что это движение

неупорядочено как во времени, так и в пространстве, и что существует возможность изучения турбулентности статистическими методами. Наиболее широкое определение турбулентности дано Бредшоу: “Турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей осуществляется непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых границами течения”. Лапин предложил дополнить это определение: “Это многомасштабное движение в определенных частях носит когерентный (организованный) характер”. Хотя в настоящее время и отсутствует полное описание механизма растяжения вихревых трубок, однако накопленная к настоящему времени информация дает возможность понять, за счет чего поддерживается турбулентное движение. Крупномасштабные структуры (вихри) поглощают энергию основного течения, деформируются, делятся и путем нелинейных взаимодействий осуществляют передачу энергии от основного течения до мелкомасштабных структур в пристенной области, где осуществляется вязкая диссипация. Следовательно, турбулентное движение может существовать за счет энергии основного течения благодаря крупномасштабным структурам. Механизм растяжения вихревых трубок связан с каскадным процессом передачи энергии от основного движения к крупномасштабным вихрям, а от них к мелкомасштабным. Крупномасштабные структуры сильно анизотропны и существенно зависят от границ и характера внешних влияний, а поэтому они разные для различных течений. Характеристики мелкомасштабных структур меньше зависят от индивидуальных особенностей. Турбулентность, в отличие от ламинарного режима течения – это свойство движения, а не физическая характеристика газа или жидкости.

Что касается структуры течения в отношении распределения ее по толщине пограничного слоя, она представляется двумя областями – пристенной с вязкой, переходной и логарифмической зонами и внешней (следной) областью.

Первой моделью для замыкания уравнений турбулентного пограничного слоя является модель Буссинеска, основанная на подобии вязких и турбулентных напряжений. В середине 20-х годов XX ст. Прандтль создал полуэмпирическую теорию турбулентности, которая получила наименование теории турбулентного перемешивания или старой гипотезы Прандтля. Карманом из соображений размерности и локальности была получена иная полуэмпирическая формула для турбу-

лентных напряжений. Обе полуэмпирические модели турбулентности легли в основу многочисленных методов расчета. Как утверждает Л.Г. Лойцянский [2], Л. Прандтль первоначально обосновал свою старую гипотезу с помощью теории подобия и размерности. Клаузер для внешней области предложил свою гипотезу для коэффициента турбулентной вязкости. Известный способ масштабирования профиля скорости вблизи обтекаемой поверхности, получивший по этой причине название “закона стенки”, также впервые был обоснован Прандтлем. Затем Колмогоров (1941) и Прандтль (1945) предложили в качестве масштаба скорости в модели Буссинеска использовать квадратный корень из кинетической энергии турбулентности. Первым моделью Колмогорова-Прандтля в численных расчетах использовал Глушко (1965). Вольфштейну путем введения демпфирующих множителей типа предложенного ранее Ван-Дристом удалось улучшить прогнозирование низкорейнольдсовых течений. Невзглядов (1945) предложил формулу, в которой турбулентное напряжение трения линейно зависит от кинетической энергии турбулентности. Такая зависимость подтверждена Таунсендом. Несколько позже эта формула была улучшена. Надежность выбираемых для конкретных расчетов гипотез оценивается по конечным результатам, а именно, по профилям скорости и интегральным характеристикам пограничного слоя в сравнении с физическими экспериментами. Чтобы исключить в расчетах влияние упрощений и дополнительных допущений, которые обычно принимаются в приближенных аналитических методах, стало общепринятой практикой решать систему дифференциальных уравнений турбулентного пограничного слоя с помощью численных методов.

Теоретические основы турбулентности как фундаментальной науки далеки до завершения, а поэтому широкое распространение нашли полуэмпирические феноменологические модели. Большинство моделей, которые используются в инженерных расчетах, относятся к моделям турбулентной вязкости. Эксперименты подтверждают, что гипотеза турбулентной вязкости пригодна для расчета многих течений.

1. МОДЕЛИ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

При построении математических моделей коэффициента турбулентной вязкости принципиальной является необходимость учета структуры по-

граничного слоя, взаимодействия существенно разных процессов каждой из областей и учета молярного и молекулярного взаимодействия в окрестности стенки. Как отмечалось, области пограничного слоя существенно отличаются как характером развития, так и характерными масштабами. Поэтому при использовании формулы пути перемешивания Прандтля линейный масштаб в пристенной области считается пропорциональным расстоянию от поверхности, а в следной области – постоянным. В другом подходе, который считается более удачным, в следной области используется формула Клаузера. В обоих подходах с целью учета молекулярного и молярного взаимодействия используется демпфирующий множитель Ван-Дрифта. Очевидный недостаток модели пути перемешивания заключается в том, что турбулентная вязкость равна нулю при $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Это означает, что турбулентная вязкость равна нулю в центре трубы, в области смешения пристенной струи и внешнего потока. Кроме того, при использовании двухзонной схемы для коэффициента турбулентной вязкости не учитывается взаимодействие областей, а этим пренебрегается существование зоны перекрытия и нарушается гладкость решения. Поэтому более надежный путь решения проблемы лежит в построении единой зависимости для коэффициента турбулентной вязкости, которая одновременно описывала бы обе области. Перспективной в этом смысле оказалась базовая алгебраическая модель коэффициента турбулентной вязкости, предложенная в 1973 г. В. Мовчаном [15–18], которая позволяет описать его единой формулой; отразить характерные особенности областей и зон течения в пограничном слое; получить приближенные аналитические зависимости для профиля скорости в каждой из характерных зон. Эта модель коэффициента турбулентной вязкости имеет вид:

$$\tau_t = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1)$$

$$\nu_t = \nu_{tc} \text{th} \frac{\nu_t \text{ пр}}{\nu_{tc}}, \quad (2)$$

$$\nu_{tc} = \chi \Delta v_* \gamma, \quad \nu_t \text{ пр} = ky \sqrt{\tau_+} D_m, \quad (3)$$

$$D_m = \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_1 y^+) \text{th} [\text{sh}^2(k_2 y^+)]}{ky^+ \sqrt{\tau_+}}, \quad (4)$$

где τ_t – турбулентное напряжение трения; ν_t – коэффициент турбулентной вязкости всего пограничного слоя; ν_{tc} – коэффициент турбулентной вязкости следной области; $\nu_t \text{ пр}$ – коэффициент турбулентной вязкости пристенной области;

χ, k, k_1, k_2 – модельные коэффициенты; τ_+ – напряжение трения в окрестности стенки: $\tau_+ = 1 + \Phi \bar{y}$ при положительном градиенте давления, $\tau_+ = 1/1 - \Phi \bar{y}$ – при отрицательном; v_* – динамическая скорость; ν – коэффициент молекулярной вязкости; Δ – параметр длины Клаузера-Ротта; D_m – демпфирующий множитель; $y^+ = \frac{y v_*}{\nu}$, $\bar{y} = \frac{y}{\delta}$, $\Phi = \frac{\delta}{\tau_w} \frac{dp}{dx}$ – параметр Федяевского; δ – толщина пограничного слоя; τ_w – напряжения на стенке; $\gamma = \sqrt{1 - \bar{y}_t}$ – функция перемежаемости.

Формула (2) И. Беловым и С. Исаевым [13] ошибочно приписана Джонсону и Кингу, которые в 1985 г. предложили другую зависимость:

$$\nu_t = \nu_{tc} \left(1 - e^{-\frac{\nu_t \text{ пр}}{\nu_{tc}}} \right).$$

Демпфирующий множитель (4) дает возможность получить приближенно-аналитические зависимости для профиля скорости в вязкой и переходной зонах одновременно с учетом градиента давления. Для построения приближенно-аналитического метода предложены следующие двухпараметрические аппроксимации для напряжений трения:

$$\bar{\tau} = \frac{\tau}{\tau_w} = (1 - \bar{y}) \left(A_0 + A_1 \bar{y} + A_2 \bar{y}^n \text{th} \frac{ky \sqrt{\tau_+}}{\chi \Delta} \right) \quad (5)$$

при неотрицательном градиенте давления и

$$\bar{\tau} = (1 - \bar{y}) \left(\frac{B_0}{B_1 + B_2 \bar{y}} + B_3 \bar{y}^n \text{th} \frac{ky \sqrt{\tau_+}}{\chi \Delta} \right). \quad (6)$$

– при отрицательном. Гипотеза Буссинеска дает возможность рассчитать профили скорости

$$u(y) - u(y_0) = \int_{y_0}^y \frac{\tau}{\rho(\nu + \nu_t)} dy. \quad (7)$$

Здесь y_0 – ордината нижней границы моделируемой области сдвигового слоя. В пристенной области предполагалось, что $\gamma \approx 1$,

$$\text{th} \frac{ky \sqrt{\tau_+}}{\chi \Delta} \approx \frac{ky \sqrt{\tau_+}}{\chi \Delta}; \quad \tau = \tau_+,$$

что позволило для вязкой и переходной зон получить

$$u^+ = \frac{u}{v_*} = \frac{1 + p^+ y^+}{k_1} \text{th}(k_1 y^+) - \frac{p^+}{k_1^2} \ln [\text{ch}(k_1 y^+)], \quad p^+ = \frac{\nu}{\rho v_*} \frac{dp}{dx} \quad (8)$$

при градиентном течении, а при безградиентном течении

$$u^+ = \frac{1}{k_1} \text{th}(k_1 y^+). \quad (9)$$

Для логарифмической зоны имеем:

$$u^+ = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{\sqrt{1+p^+y^+} - 1}{\sqrt{1+p^+y^+} + 1} + 2\sqrt{1+p^+y^+} \right] + C \quad (10)$$

при положительном и незначительном отрицательном ($p^+ \geq -1$) градиентах давления,

$$u^+ = \frac{1}{k} \left[\ln \frac{1 - \sqrt{1+p^+y^+}}{1 + \sqrt{1+p^+y^+}} \right] \quad (11)$$

при значительных отрицательных градиентах давления ($p^+ < -1$),

$$u^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + C \quad (12)$$

при нулевом градиенте давления.

В следной области для дефекта скорости в случае положительного и незначительного отрицательного ($\Phi \geq -1$) градиентов давления получены следующие формулы:

$$u^- = \frac{u - u_H}{v_*} = \frac{1}{\chi \Delta_1} \left[\bar{y} - 1 + \frac{2\Phi + 1}{4} (\bar{y}^2 - 1) + \frac{\Phi + 1}{5} (\bar{y}^3 - 1) - (2 + \Phi) \left(\frac{\bar{y}^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{\bar{y}^{n+2} - 1}{2(n+2)} \right) \right], \quad (13)$$

где u_H – скорость на внешней границе пограничного слоя; n – показатель степени, определяемый условием соответствия рассчитываемого профиля скорости соответствующей ему толщине вытеснения δ^* .

При сильном отрицательном градиенте давления ($\Phi < -1$):

$$u^- = \frac{1}{\chi \Delta_1} \left[\frac{0.5 - \Phi}{(\Phi + 1)^2} \ln \left| \frac{1 - (\Phi + 1)\bar{y}}{-\Phi} \right| + \frac{\bar{y} - 1}{2(\Phi + 1)} + \frac{1}{\Phi} \left(\frac{\bar{y}^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{\bar{y}^{n+2} - 1}{2(n+2)} \right) \right], \quad (14)$$

где $\Delta_1 = \Delta/\delta$. Для случая нулевого градиента давления получена формула:

$$u^- = \frac{1}{\chi \Delta_1} \left[\bar{y} - 1 + \frac{\bar{y}^2 - 1}{4} - \frac{\bar{y}^3 - 1}{6} - \right]$$

$$-2 \left(\frac{\bar{y}^{n+1} - 1}{n+1} - \frac{\bar{y}^{n+2} - 1}{2(n+2)} \right)]. \quad (15)$$

Известно, что алгебраические модели требуют ввода специальных поправок для учета специфики течения, что приводит к модификации модельных коэффициентов. Приближения для профилей скорости (9)–(15) позволили провести численный эксперимент, который совместно с использованием исследований других авторов и физическим экспериментом дал основание предложить применение в расчетах следующего набора зависимостей для модельных коэффициентов [18]:

$$k_1 = k_{10} k_{1R} (1 + 15.089 r_1 r_2),$$

$$k_2 = k_{20} (1 + 30.178 p^+),$$

$$\chi = \chi_R \left[0.0095 + \frac{1}{74.6 + (2.4 + p^+)^2} \right],$$

$$k = 0,4 + 0.1823(1 + p^+)(1 - e^{-0.3207\beta})$$

при неотрицательном и

$$k = 0,4 + 58.5103 \frac{p^+}{\beta} (1 - e^{-0.3207\beta})$$

при отрицательных градиентах давления,

$$r_1 = 1 - 0.5e^{-0.1436\beta} + 0.5e^{-0.3231\beta},$$

$$r_2 = 1 - e^{-76.1528 \frac{p^+}{\beta}} + e^{-361.4064 \frac{p^+}{\beta}},$$

$$k_{10} = 0.072, \quad k_{20} = 0.223,$$

$$k_{1R} = 1 + 0.01 \left(1 - e^{-\frac{14}{1+z^2}} \right),$$

$$\chi_R = \frac{1.55}{[1 + 0.55(1 - e^{-0.243\sqrt{z_1} - 0.298z_1})]},$$

$$z = R^{**} \cdot 10^{-3}, \quad R^{**} = \frac{\delta^{**} u_H}{\nu},$$

$$\beta = \frac{\delta^* dp}{\tau_w dx}, \quad z_1 = \frac{R^{**}}{412} - 1.$$

Выполненные сравнения напряжений трения по двухпараметрическим приближениям с экспериментальными результатами Г. Шубауэра и П. Клебанова, П. Брэдшоу, а также с расчетами К. Федяевского и В. Новожилова [21] дают основание утверждать, что двухпараметрические приближения предпочтительнее. Необходимые для расчетов

интегральные параметры брались из экспериментов. С целью комплексной проверки возможностей предложенной базовой алгебраической модели, она была использована в численном расчетном методе [20]. Результаты численных расчетов и численных экспериментов по материалам Стенфордской конференции [22] подтвердили применимость разработанной алгебраической модели и для неравновесных течений, а также справедливость приведенных формул для коэффициентов, хотя при значениях параметра $f = -\frac{\nu}{u_H^2} \frac{du_H}{dx} > 10^{-7}$ следует использовать зависимость [25]

$$\chi = \chi_R \left\{ 0.0168 + 1 / [212.85 + (2.4 + \beta)^2] \right\}.$$

Что касается равновесных пограничных слоев, то предложенные здесь поправки для коэффициентов не во всех случаях приводили к улучшению сходимости расчетных и экспериментальных результатов. Аналогичные затруднения испытывали и исследователи, использующие двухпараметрические модели. Так, для улучшения соответствия расчетов и экспериментов в работе [23] корректировалось уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии. Хотя это вполне ожидаемое несоответствие, если вспомнить о выполненных ранее Клаузером [4] сравнениях профилей скорости равновесных (Клаузер) и неравновесных (Денхофф и Тетервин) пограничных слоев. Оказалось, что равновесные профили не совпадали с неравновесными при одних и тех же значениях параметра формы профиля H . При этом неравновесные профили оказались значительно более плавными, чем равновесные. Кроме того, для равновесных профилей скорости параметр H остается почти постоянным при изменении продольной координаты, в то время как для неравновесных он постепенно увеличивался. Это означает, что при наличии равновесия толщина вытеснения δ^* возрастает медленнее, а значит перемешивание происходит более интенсивно. Вычислительные эксперименты показали, что модель (1)–(3) способна прогнозировать и эти течения при условии модификации коэффициентов χ и k в зависимости от H , $\frac{du_H}{dx}$, R^{**} [20].

Анализ тестовых численных расчетов при сравнении с каноническими экспериментами Стенфордской конференции [18, 20] дает основание говорить о несомненных достоинствах предложенной алгебраической модели, особенно при значительных положительных градиентах давления с возможным отрывом пограничного слоя.

2. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

В отличие от алгебраической модели, определенной через локальные характеристики осредненного движения, однопараметрическая модель строится с использованием локальных характеристик пульсационного движения.

В пристенной области коэффициент турбулентной вязкости взят из алгебраической модели, а в следной области предложена модель на основе подхода Колмогорова-Прандтля, теории подобия и размерности [19, 24–27]. В качестве масштаба скорости взят \sqrt{e} , а масштаба длины – Δ , где e – кинетическая энергия пульсационного движения, отнесенная к плотности. Модель для внешней области имеет вид:

$$\nu_{tc} = \chi \Delta \sqrt{e}. \quad (16)$$

Для нахождения e использовано известное уравнение переноса. В большинстве известных экспериментов отсутствует информация относительно кинетической энергии турбулентности и ее диссипации, а поэтому большую ценность представляют приближенные решения, которые используются для задания начальных условий. Эти решения в пристенной области имеют вид:

$$e = \frac{v_*^2}{c_0} r_1 r_2, \quad \varepsilon = \frac{v_*^4}{\nu} \frac{r_1 r_2}{\text{ch}^2(k_1 y^+)} + 2 \frac{\nu e}{y^2} D_\varepsilon$$

для вязкой и переходной зон,

$$e = \frac{v_*^2}{c_0} r_1, \quad \varepsilon = \frac{v_* r_1^{3/2}}{k y}$$

в логарифмической зоне, где ε – диссипация кинетической энергии турбулентности,

$$r_1 = \begin{cases} 1 + p^+ y^+ & \text{при } p^+ > 0, \\ 1 & \text{при } p^+ = 0, \\ 1/(1 - p^+ y^+) & \text{при } p^+ < 0, \end{cases}$$

$$r_2 = \text{th}(k_1 y^+) \text{th}^{0.5} [\text{sh}^2(k_2 y^+)], \quad p^+ = \frac{\nu}{\rho v_*^3} \frac{dp}{dx},$$

$$c_0 = 0.2575 \left\{ 1 + 0.2456 [1 - \text{th}(0.4 y^+)] - 0.0592 \text{th}(40 \bar{y}) \right\},$$

$$D_\varepsilon = 1 - \text{th}[0.025 y^+ (1 - 7.15)].$$

В струйной области кинетическая энергия турбулентности определялась с помощью формулы Невзглядова $\tau_t = ae$ и двухпараметрических приближений для профилей напряжения трения, а диссипация e определялась известной формулой $\varepsilon = c_D e^{3/2}/k$. Для количественной оценки предложенных приближений для коэффициента турбулентной вязкости, кинетической энергии турбулентности и ее диссипации производилось сравнение расчета по предложенным формулам с экспериментами Лауфера и Клебанова [5], которое показало хорошее соответствие. Кроме того, был выполнен численный расчет, который также продемонстрировал удовлетворительное соответствие полученных результатов экспериментальным данным.

3. МОДЕЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Для трехмерных пограничных слоев “старая” формула Прандтля обычно записывается в виде [23]

$$\nu_t = l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

В такой форме турбулентная вязкость ν_t – это скаляр. Учет неизотропности трехмерного пограничного слоя выполнен в соответствии с подходом Ю. Ротта [30]:

$$\begin{aligned} \nu_{t\ xx} &= \nu_t \frac{u_x^2 + Nu_z^2}{u_H^2}, \\ \nu_{t\ xz} &= \nu_{t\ zx} = \nu_t (1 - N) \frac{u_x u_z}{u_H^2}, \\ \nu_{t\ zz} &= \nu_t \frac{u_z^2 + Nu_x^2}{u_H^2}. \end{aligned}$$

Здесь x, y и z – обозначения продольной, нормальной и поперечной осей декартовой системы координат, связанной с обтекаемой поверхностью, а в качестве индексов – проекции расчетных величин на соответствующие оси; N – параметр анизотропии турбулентной вязкости, определяемый отношением ее величин в направлениях вторичного и основного течений. Для определения ν_t в формулах (1)–(3) следует [27, 31, 32] вычислять τ_+ по следующей формуле: $\tau_+ = \sqrt{v_{*x}^2 \tau_x^+ + v_{*z}^2 \tau_z^+}$, а

также заменить произведение $\Delta \cdot v_*$ произведением суммарной внешней скорости u_H на интегральный параметр пространственного профиля скорости D , представленный, например, формулой Т. Меллора и К. Херринга:

$$D = \int_0^\delta \frac{y}{u_H} \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \quad (17)$$

Для расчета сдвиговых напряжений применялись формулы

$$\begin{aligned} -\overline{u_x u_y} &= (\nu_t)_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + (\nu_t)_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \\ -\overline{u_z u_y} &= (\nu_t)_{zx} \frac{\partial u_x}{\partial y} + (\nu_t)_{zz} \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned}$$

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИСТЕННЫХ СТРУЙ

При моделировании данного вида течения используется традиционное представление пристенной струи, характеризуемой немонокотным в нормальном к стенке направлении распределением продольной составляющей скорости в виде трех характерных областей (пристенная, струйная, следная), в каждой из которых продольная составляющая монотонна. В пристенной части используются формулы (1)–(3) с $\gamma = 1$. В струйной части $\delta_m \leq y < \delta_{ст}$ и в следной $\delta_{ст} \leq y < \delta_{сл}$ применяются зависимости [27, 31, 32, 33] вида:

$$\begin{aligned} \nu_t &= \chi_{ст} \delta_{ст}^* \gamma (u_m - u_{min}) \quad \text{при } \delta_m \leq y < \delta_{ст}, \\ \nu_t &= \chi_{сл} \delta_{сл}^* \gamma (u_H - u_{min}) \quad \text{при } \delta_{ст} \leq y < \delta_{сл}, \end{aligned}$$

где $\chi_{ст}, \chi_{сл}$ – модельные коэффициенты; $\delta_m, \delta_{ст}, \delta_{сл}$ – толщины пристенной, струйной и следной областей;

$$\delta_{ст} = \int_{\delta_m}^{\delta_{ст}} \frac{u_m - u}{u_m - u_{min}} dy; \quad \delta_{сл} = \int_{\delta_{ст}}^{\delta_{сл}} \frac{u_H - u}{u_H - u_{min}} dy.$$

5. МОДЕЛЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При построении алгебраической модели коэффициента турбулентной теплопроводности a_q применен такой же подход, как и для получения модели коэффициента турбулентной вязкости. Модель

коэффициента турбулентной теплопроводности имеет вид [31, 32, 34]

$$a_q = a_{q \text{ сл}} \text{th} \frac{a_{q \text{ пр}}}{a_{q \text{ сл}}},$$

где $a_{q \text{ пр}}$, $a_{q \text{ сл}}$ – коэффициенты турбулентной теплопроводности соответственно для внешней и внутренней областей. При этом

$$a_{q \text{ пр}} = k_q y D_q \sqrt{\tau^+},$$

$$D_q = \text{th} \frac{\text{sh}^2(k_{1q} y^+) \text{th} [\text{sh}^2(k_{2q} y^+)]}{k_q y^+ \sqrt{\tau^+}},$$

$$a_{q \text{ сл}} = \chi_q \Delta v_* \gamma.$$

Эмпирические коэффициенты модели определяются с учетом числа Прандтля в соответствии с [31, 32, 41] зависимостями вида: $k_{1q} = f_1(Pr)k_1$, $k_{2q} = f_2(Pr)k_2$, $k_q = f_k(Pr)k$, $\chi_q = f(Pr)\chi$.

Приведенная модель коэффициента турбулентной теплопроводности легко обобщается на пространственный случай [31, 32].

6. МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ СЛОЖНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Существенные затруднения при решении задач сдвиговых течений могут возникать из-за неопределенности линейных масштабов, которые (как например, толщина пограничного слоя или толщина вытеснения) входят в формулы для коэффициента турбулентной вязкости внешней области. Это приводит к необходимости определять их в процессе решения задачи итерационным путем, что снижает скорость сходимости, а значит и эффективности расчетного метода, одновременно усложняя его. Свободным от этого недостатка является подход Болдуина-Ломакса, получивший по этой причине широкое распространение в расчетах сложных течений. Однако и он не лишен недостатка, поскольку использует различные зависимости при задании коэффициента турбулентной вязкости в пристенной и внешней областях.

Представленная ниже модель сочетает достоинства единого описания турбулентной вязкости, предложенного здесь, и подхода Болдуина-Ломакса для внешней области. Данная модель имеет следующий вид:

$$\nu_{t \text{ сл}} = \chi C_{cp} F_{wake},$$

где

$$F_{wake} = \min \left[y(F_{max}) \cdot F_{max}, C_{wk} \cdot y(F_{max}) \frac{u_{max}^2}{F_{max}} \right],$$

$$F(y) = y \left| \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right| D_m,$$

$$F_{max} = \max F(y), \quad \gamma = \left[1 + 5.5 \left(\frac{C_{Kleb} y}{y_{max}} \right)^2 \right]^{-1},$$

$$C_{cp} = 1.6, \quad C_{wk} = 0.25, \quad C_{Kleb} = 0.4.$$

Выполненные расчеты по предложенному варианту модели коэффициента турбулентной вязкости и стандартной формулировке модели Болдуина-Ломакса при сравнении с каноническими экспериментами Стенфордской конференции продемонстрировали предпочтение проведенной модификации.

7. МОДЕЛЬ ДЛЯ УЧЕТА ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ

Исследованию влияния шероховатости поверхности на течение в пограничном слое уделялось много внимания [1, 3, 4, 6]. Однако наиболее удобным и универсальным оказался подход, предложенный И. Ротта [3], в котором выполняется сдвиг ординаты y на функцию сдвига Δy . Этот подход, в отличие от других, при использовании математической модели (1)–(3) позволяет получать аналитические зависимости для профиля осредненной скорости. Многочисленные экспериментальные данные о влиянии шероховатости поверхности на течения указывают на отсутствие ее влияния на следную область. В пристенной области y^+ заменяется на $y^+ + \Delta y^+$.

Детальные исследования проблемы, проведенные Е. Шкваром [35, 36], позволили предложить следующую модель учета шероховатости поверхности в модели (1)–(3):

$$\Delta y^+ = \begin{cases} \frac{1}{k_1} \text{arcth}(k_1 \Delta u^+) & \text{при } h^+ \leq h^*, \\ h^+ \exp(-k B(h^+)) & \text{при } h^+ > h^*, \end{cases}$$

где h – средняя высота элементов шероховатости, $h^+ = \frac{h v_*}{\nu}$, $h^* = y_* \exp[k(C + 2.89)]$, $C = 5.2$, $y_* = 25.36$, $\Delta u^+ = \frac{1}{k} \ln h^+ - B(h^+) + C$. Для вычисления функции $B(h^+)$ Е. Шкваром предложена удачная единая для всех трех режимов шероховатости аппроксимация экспериментальных результатов, не требующая интервальных оценок:

$$B = C + \text{sth} \frac{\ln h^+}{k s},$$

$$s = \frac{2.98}{1 - 87 \left(\frac{\ln h^+}{8} \right)^{2.03} \left(1 - \frac{\ln h^+}{8} \right)^{8.39}}$$

Важно, что данная модель продемонстрировала свою работоспособность во всех рассмотренных здесь модельных случаях конфигураций течений.

8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Многие важные для практики задачи приводят к необходимости моделирования обтекания тел двухфазным потоком вода (жидкость)–воздух (газ). В авиации, например, такие задачи возникают при движении летательного аппарата в сложных метеорологических условиях. На обтекаемых поверхностях может образовываться жидкая пленка, которая обтекается воздушным пограничным слоем. Изменившиеся граничные условия для воздушного пограничного слоя приводят к изменению аэродинамических характеристик летательного аппарата. Как показали экспериментальные исследования [37], волнистую границу раздела фаз следует рассматривать как шероховатую и подвижную. Течение в самой водной пленке в широком диапазоне режимных параметров течения сохраняет ламинарный режим. Модель шероховатости в этом случае видоизменяется и принимает вид

$$\Delta y^+ = \begin{cases} \frac{1}{k_1} \operatorname{arctg}(k_1 \Delta u^+ + u_o^+) & \text{при } h^+ \leq h^*, \\ h^+ \exp(-k(B - u_o^+)) & \text{при } h^+ > h^*, \end{cases}$$

где $h^* = h_1^+ \exp[k(B - u_o^+)]$; h_1 – средняя высота волнистой шероховатости, определяемая согласно [37]; $h_1^+ = \frac{h_1 v_*}{\nu}$; $B = 75.4 Re_{X \text{ вод}}^{-0.204}$ – постоянная логарифмического закона для обтекания поверхности с волнистой шероховатостью, предложенная в [37] в виде функции числа Рейнольдса водной пленки: $Re_{X \text{ вод}} = u_{\text{ср вод}} \delta_{\text{вод}} / \nu_{\text{вод}}$.

9. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ СЛАБЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРНЫХ ИЛИ ИНЫХ ДОБАВОК

Еще одним актуальным направлением исследований, где разработанная модель (1)–(3) показала свою работоспособность и адаптируемость к новым расчетным условиям, является моделирование течений жидкости с присутствующими в ней

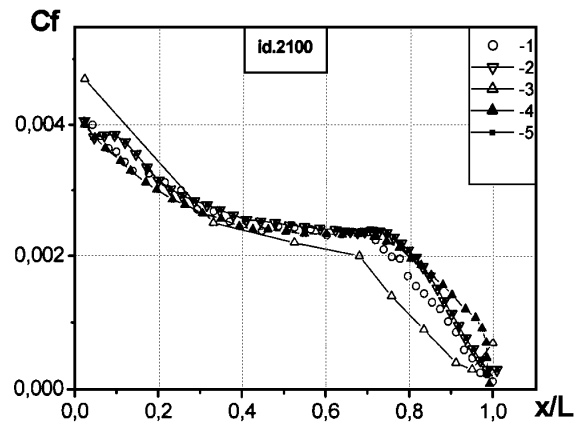


Рис. 1. Сравнение расчета распределения $C_f(x)$ с экспериментальными данными Г.Шубауэра и П.Клебанова (*id.2100*)

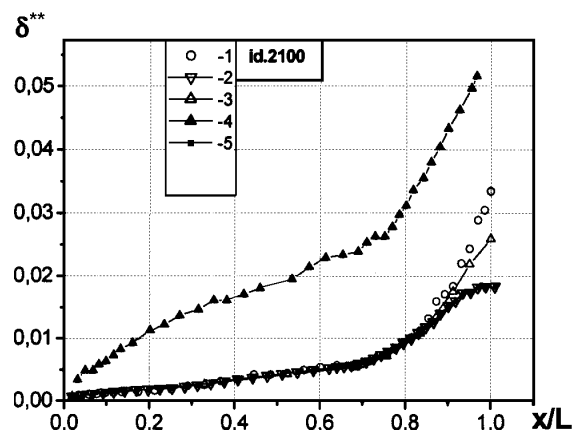


Рис. 2. Сравнение расчета распределения Δ^{**} с экспериментальными данными (*id.2100*)

добавками малых концентраций веществ (полимеров, поверхностно активных веществ, и т. п.), способных активно воздействовать на проявление вязких свойств [40, 41]. Практический эффект подобного воздействия состоит в реализации возможности эффективного снижения сопротивления трения.

Особенностью реализации данной модификации модели является учет неоднородности распределения концентрации вводимого вещества по толщине сдвигового течения. В данном случае, наподобие учета влияния поверхностной шероховатости, в дополнение к сдвигу нормальной координаты на Δy^+ , был применен еще один параметр сдвига нормальной координаты y Δy_{add} , то есть y^+ модифицировалась следующим образом:

$$y^+ = \begin{cases} 0 & \text{при } s^+ \leq 0, \\ s^+ & \text{при } s^+ > 0, \end{cases}$$

где $s^+ = y^+ + \Delta y^+ - \Delta y_{add}^+$. Функция сдвига $\Delta y_{add}^+ > 0$ учитывает смещение логарифмического участка профиля скорости в противоположном воздействию шероховатости направления. Данное смещение является экспериментально зафиксированным результатом, возникающим под влиянием добавок полимеров или поверхностно-активных веществ [40] в пограничный слой жидкости. В рамках данной модели появляется удобная возможность связать Δy_{add}^+ с концентрацией, а также при необходимости и с другими параметрами, характеризующими физико-химические свойства вводимых в пограничный слой растворов активных веществ [41].

Для учета неравномерности концентрации полимера по поперечному сечению рассчитываемого течения была использована следующая гипотеза: функция сдвига Δy_{add}^+ , в отличие от функции влияния шероховатости Δy^+ , не является постоянной величиной в конкретном расчетном сечении $x = \text{const}$, а определяется в каждом расчетном узле вдоль нормальной координаты y значениями локальных концентраций переносимых добавок, которые находятся в результате решения соответствующих уравнений переноса каждой из присутствующих в пограничном слое фаз примесей. Данная модель была обобщена на случай течения многокомпонентной расслоенной смеси растворов добавок с различными концентрациями и физико-химическими свойствами и продемонстрировала способность учитывать сложную структуру такого управляющего воздействия на поток [41].

10. СРАВНЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ С ДАННЫМИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Данный раздел содержит иллюстративный материал, демонстрирующий возможности применения представленной выше модели В.Т.Мовчана и ее модификаций посредством сопоставления выполненных расчетов с экспериментальными данными для плоского и пространственного турбулентных пограничных слоев. При построении метода расчета использовались два подхода, а именно: 1) метод прямых, состоящий в сведении системы уравнений пограничного слоя к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и ее последующем интегрировании по нормальной к поверхности координате y на каждом расчетном шаге $x = \text{const}$ методом Рунге-Кутты (4-го порядка); 2) конечно-разностный метод, в рамках которого авторами применялись различные (как явные, так и

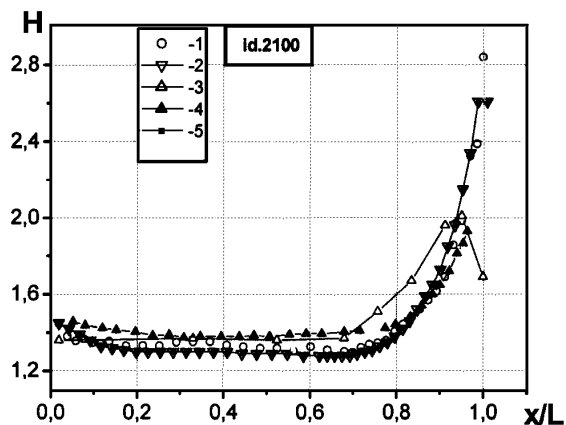


Рис. 3. Сравнение расчета распределения $H(x)$ с экспериментальными данными id.2100)

невяные) разностные схемы решаемых уравнений, имеющие второй порядок точности по координатам расчетной области.

Рис. 1–3 служат иллюстрациями расчета [26] плоского градиентного неравновесного турбулентного пограничного слоя на крыловом профиле, исследованного экспериментально Г. Шубауэром и П. Клебановым и вошедшего под номером *id.2100* в перечень канонических экспериментов Стэнфордской конференции [22]. Данное течение формируется в условиях немонотонного распределения градиента давления, переходящего от отрицательных значений к положительным. Кроме непосредственно экспериментальных данных, представленных символами 1 (см. обозначения на рис. 1–3), и расчетов [26], выполненных по однопараметрической дифференциальной модели (1)–(3), (16), описанной в п. 2. посредством метода прямых (символы 2), на данных иллюстрациях приведены также расчетные результаты В. В. Новожилова [21] (символы 3), К.К. Федяевского, А.С. Гиневского и А.В. Колесникова [6] (символы 4), а также Сингала и Сполдинга (символы 5). Представленные результаты сравнений демонстрируют наиболее качественное воспроизведение тенденций изменения экспериментальных распределений локального коэффициента трения C_f и формпараметра $H = \delta^*/\delta^{**}$ (рис. 1, 3) в расчетах по данной модели при несколько худшем их соответствии данным эксперимента по толщине потери импульса δ^{**} (рис. 2) для предотрывной области течения в пользу расчетных результатов В.В. Новожилова [21].

Следующая серия иллюстраций (рис. 4–7) демонстрирует расчеты авторов (линии), воспроизводящие результаты экспериментального изучения отрывного обтекания на стреловидном крыле

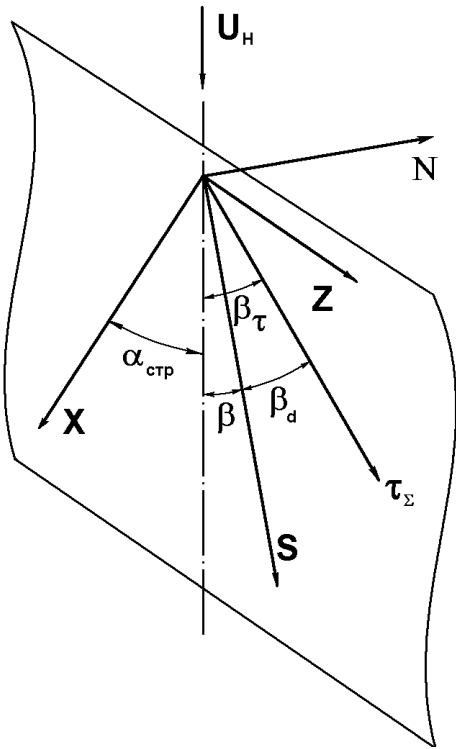


Рис. 4. Схема скользящего турбулентного обтекания стреловидного крыла бесконечного удлинения

бесконечного удлинения (кружки). Схема данного течения (угол стреловидности – 35°), связанная с телом система координат, а также характерные рассчитываемые углы и параметры представлены на рис. 4. Расчеты выполнялись как прямым (сплошные линии), так и обратным (штриховые линии) конечно-разностными методами. Кроме того, в расчетах применялись несколько подходов к вычислению характерного интегрального масштаба длины для пространственного профиля скорости (линии 1 и 2). Как следует из представленных результатов, расчеты в целом адекватно воспроизводят тенденции изменения рассчитываемых локальных и интегральных параметров данного течения. Расхождения в поведении расчетных зависимостей проявляются лишь по мере приближения к отрыву, причем преимущество в предотрывной области демонстрируют обратный и прямой методы, основанные на вычислении интегрального масштаба по формуле Т. Меллора, К. Херринга (17).

На рис. 8 представлены результаты сопоставления расчетов распределения продольной составляющей скорости (линии) с экспериментальными данными, полученными различными авторами (точки различного начертания) для течений

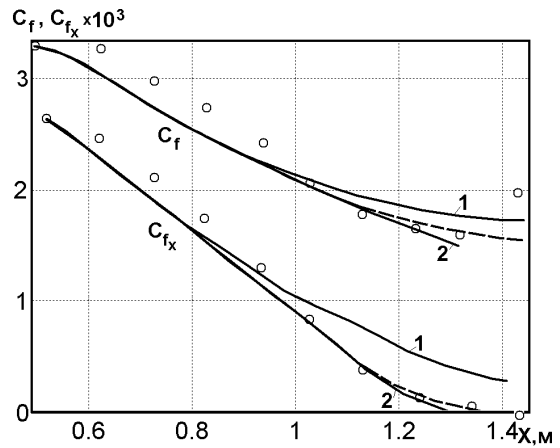


Рис. 5. Сравнение расчетных распределений локального коэффициента трения $C_f(x)$ и его проекции $C_{fx}(x)$ с экспериментальными данными Ван-ден-Берга и Эльсенаара [43]

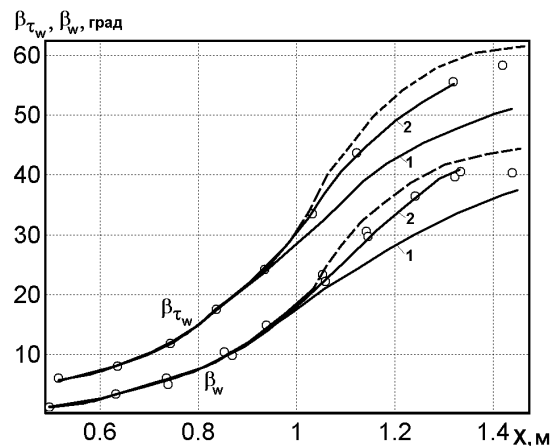


Рис. 6. Сравнение расчетных распределений углов скоса пристенных векторов скорости деформации β_w и напряжения трения β_{τ_w} по отношению к направлению линии тока внешнего течения с экспериментальными данными [43]

однородных растворов разных полимеров различных концентраций в широком диапазоне значений. Все профили скорости представлены в полупологарифмических координатах. При моделировании турбулентной вязкости использовались соответствующие экспериментальным условиям вид полимера и значения его концентрации.

Как следует из приведенных сопоставлений, расчетные распределения скорости с удовлетворительной точностью соответствуют данным экспериментов различных авторов, причем, в расчетах корректно моделируется эффект увеличения толщины вязкого подслоя при увеличении концен-

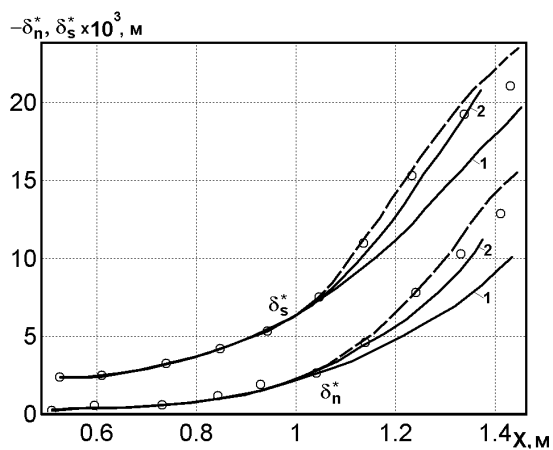


Рис. 7. Сопоставление характерных интегральных толщин, вычисляемых по профилям основного δ_s и вторичного δ_n течений в расчете (линии) и эксперименте [43] - кружки

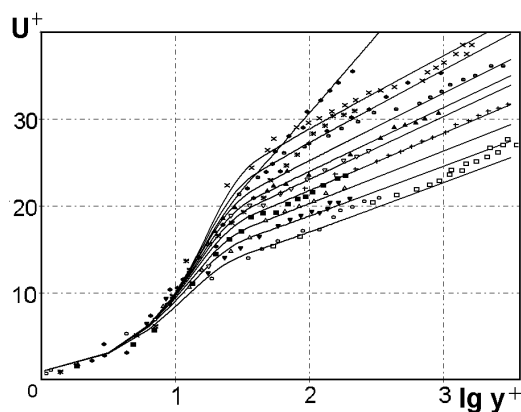


Рис. 8. Сравнение рассчитанных (линии) и экспериментально измеренных (точки) профилей скорости $u^+ = u^+(y^+)$ для течений однородных растворов различных полимеров в широком диапазоне концентраций $c = 0 - 7.4 \cdot 10^{-4}$ г/см³

трации полимера в растворе, а также переход от линейной зависимости в вязком подслое $u^+ = y^+$ к логарифмическому закону $u^+ = k^{-1} \ln y^+ + C$. Кроме того, проведенный численный эксперимент показал, что зависимость коэффициента Кармана от концентрации полимера $k = k(c)$ не является универсальной и, также как и зависимость $\Delta y_{add}^+ = f(c)$, определяется видом конкретной полимерной добавки.

ВЫВОДЫ

1. Представлен анализ развития и сформулиро-

ваны основные вехи исследований в области моделирования турбулентных течений вязкой жидкости.

2. Особо выделена и освещена роль Л. Прандтля как основоположника теории пограничного слоя – мощного инструмента теоретических исследований течений жидкости вблизи обтекаемых поверхностей.

3. Приведена информация о хронологии формирования современного уровня понимания структурных особенностей турбулентного пристенного течения, очерчены основные направления подходов и возможностей полуэмпирического описания турбулентных течений в пограничных слоях.

4. Представлены результаты моделирования турбулентной вязкости на основе модели, предложенной В.Т. Мовчаном, показаны основные направления ее приложений и развития. Продемонстрированы преимущества разработанной модели перед иными подходами к моделированию турбулентной вязкости.

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 712 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1973.– 847 с.
3. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1967.– 232 с.
4. Турбулентные течения и теплопередача. / Под ред. Линь Цзя-Цзяо.– М.: Иностр. лит., 1963.– 563 с.
5. Хинце И. О. Турбулентность.– М.: Физматгиз, 1963.– 680 с.
6. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1973.– 256 с.
7. Турбулентность. / Под ред. П. Брэдшоу.– М.: Машиностроение, 1980.– 343 с.
8. Турбулентность. Принципы и применения. / Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена.– М.: Мир, 1980.– 526 с.
9. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР.– 1941.– Т. 30, N 4.– С. 299–303.
10. Prandtl L., Weghardt K. Uber ein neues Formelsystem fur die ausgebildete Turbulent // Nachr. Akad. Wiss Gottingen. Math.-Phys.– 1945.– N 1.– P. 874–887.
11. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа.– М.: Наука, 1982.– 312 с.
12. Бабенко В. В., Канарский М. В., Коробов В. И. Пограничный слой на эластичных пластинах.– К.: Наукова думка, 1993.– 264 с.
13. Белов И. А., Исаев С. А. Моделирование турбулентных течений.– СПб: Балт. гос. техн. ун-т, 2001.– 108 с.

14. Приходько А. А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене.– К.: Наукова думка, 2003.– 279 с.
15. Мовчан В. Т. Приближенный метод вычисления профилей скорости и напряжения трения в турбулентных потоках с положительным градиентом давления // Тезисы докладов III Всесоюзной технической конференции по прикладной аэродинамике.– В сб.: Гидромеханика. – В. 31.– 1973.– С. 115.
16. Мовчан В. Т. К вычислению коэффициента турбулентной вязкости // В сб.: Гидромеханика.– 1980.– В. 41.– С. 78-81.
17. Мовчан В. Т. Об одной полуэмпирической гипотезе в теории турбулентных пограничных слоев // Прикладная механика.– 1981.– Т. 17 - N 2.– С. 138-141.
18. Мовчан В. Т. Приближенно-аналитическое исследование турбулентного пограничного слоя // Журн. ПМТФ.– 1982.– N 3.– С. 102-111.
19. Мовчан В. Т. К построению непрерывной алгебраической модели коэффициента турбулентной вязкости // Бионика.– 1986.– Вып. 20.– С. 58-60.
20. Мовчан В. Т. Результаты численного расчета и эксперимента плоского несжимаемого градиентного пограничного слоя // Инж.-физ. журн.– 1985.– Т. XVIII, - N 5.– С. 865-866.
21. Новожилов В. В. Теория плоского турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.– Л.: Судостроение, 1977.– N 3 с. 165
22. Computation of turbulent boundary layer // Proc. AFOSR-IFR-Stanford Conference. Ed. Coles P.E., Hirst E.A. – Vol. 2, 1969.
23. Ханжалик, Лондер Учет безвихревых напряжений в уравнении диссипации турбулентной энергии // Теоретические основы инженерных расчетов.– 1980.– N 1.– С. 149-159.
24. Мовчан В. Т., Романюк Л. А. До моделювання турбулентних примежових шарів при від'ємних градієнтах тиску // Вісник КМУЦА.– 1998.– N 1.– С. 264-267.
25. Мовчан В. Т., Романюк Л. А. Новый підхід до розрахунку турбулентних пристінних течій // Вісник КМУЦА.– 2000.– N 3-4.– С. 63-64.
26. Мовчан В. Т., Романюк Л. А. Чисельне моделювання турбулентних примежових шарів з використанням однопараметричної моделі турбулентності без додаткового рівняння // Наукові вісті НТУУ “КПІ”.– 2001.– N 1.– С. 130-134.
27. Лунис М., Мамчук Вит. И., Мовчан В. Т., Романюк Л. А., Шквар Е. А. Алгебраические модели турбулентной вязкости и теплопроводности в расчетах пристенных турбулентных течений // В сб.: Прикладная гидромеханика.– 2001.– Т. 3, N 1.– С. 37-45.
28. Козлов Л. Ф. Восьмидесятилетие теории пограничного слоя и проблемы гидромеханики в освоении океана // Тезисы доклада.– 1984.– ч. 1.– С. 2.
29. Андерсен А., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика.– М.: Мир, 1990.– Т. 1 с. 384, – Т. 2 с. 396
30. Ротта Ю. Х. Семейство моделей турбулентности для трехмерных пограничных слоев // В кн.: Турбулентные сдвиговые течения. – М.: Машиностроение.– 1982.– Т. 1.– С. 279-290.
31. Movchan V. T., Mkhitarayan A. M., Shkvar E. A. The Simulation of Turbulent Separated Boundary Layers and Wall Jets // Proc. of the Separated Flows and Jets IUTAM Symposium (Novosibirsk, USSR, 1990).– Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.– 1991.– P. 111-119.
32. Movchan V. T., Shkvar E. A. Modeling of Turbulent Near-Wall Shear Flows Properties // AGARD Report 827.– High Speed Body Motion in Water.– 1997.– P. 10-1-10-7.
33. Мовчан В. Т. Плоская пристенная струя и ее исследования // Гидромеханика.– 1982.– В. 46.– С. 73-80.
34. Лунис М. Мовчан В. Т. Влияние турбулентного числа Прандтля на конвективный теплообмен в средах с различными теплофизическими свойствами // Промышленная теплотехника.– 2002.– Т. 24 - N 2-3.– С. 50-54.
35. Шквар Е. А. К учету влияния шероховатости обтекаемой поверхности // Журн. ПМТФ.– 1986.– N 6.– С. 57-63.
36. Баскакова А. Г., Мовчан В. Т., Шквар Е. А. О законе сопротивления турбулентных течений в трубах с шероховатой поверхностью // К.– В сб.: Некоторые вопросы прикладной аэродинамики.– 1986.– С. 3-7.
37. Дейч М. Е., Филиппов Г. А. Газодинамика двухфазных сред.– М.: Энергия, 1981.– 470 с.
38. Агеев С. Е., Мовчан В. Т., Мхитарян А. М., Шквар Е. А. Моделирование двухфазных течений с поверхностью раздела фаз // Журн. ПМТФ.– 1990.– N 6.– С. 101-108.
39. Мовчан В. Т., Шквар Е. А. Алгебраическая модель турбулентной вязкости для расчетов сложных турбулентных течений // Бионика.– 1998.– В. 27-28.– С. 38-41.
40. Повх И. Л., Ступин А. Б., Асланов П. В. Особенности турбулентной структуры потоков с добавками поверхностно-активных веществ и полимеров // В сб.: Проблемы турбулентных течений.– Наука.– 1987.– С. 152-162.
41. Шквар Е. А. Математическое моделирование переноса примесей турбулентным пограничным слоем // В сб.: Прикладная гидромеханика.– 2000.– Т. 2 (74).– С. 96-105.
42. Movchan V. T., Shkvar E. A. Modelling of Dynamics and Heat Transfer Processes in Turbulent Near-Wall Shear Flows // Proc. of the 2nd European Thermal-Sciences and 14th UIT National Heat Transfer Conference, 29-31 May, 1996, Rome, Italy.– Edizioni ETS, Pisa. – Vol. 1, 1996.– P. 535-540.
43. Ван ден Берг Б. Моделирование турбулентности и обсуждение результатов экспериментальных исследований трехмерных пограничных слоев // В кн.: Трехмерные турбулентные пограничные слои.– М.: Мир, 1985.– С. 10-25.