

УДК 533.6.011

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКО-НЕВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ТИПА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

И. С. БЕЛОЦЕРКОВЕЦ, В. И. ТИМОШЕНКО

Институт технической механики НАН Украины и
Национального космического агентства Украины, Днепропетровск

Получено 05.10.2004

Обсуждаются вопросы использования уравнений пограничного слоя для приближенного решения задач, в которых строго не выполняются асимптотические оценки параметров, используемые при обосновании классических уравнений пограничного слоя, полученных Прандтлем. Формулируется понятие задач типа пограничного слоя и обсуждаются алгоритмы их численного решения. В качестве конкретных примеров рассмотрены задачи о истечении дозвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток (в том числе и задачи о течениях при нерегулярном взаимодействии ударных волн), течение вязкого газа в узких каналах и определения параметров в вязком ударном слое при гиперзвуковом обтекании тупых тел.

Обговорюються питання використання рівнянь пограничного шару для наближеного розв'язання задач, в яких строго не виконуються асимптотичні оцінки параметрів, що використовуються при обґрунтуванні класичних рівнянь пограничного шару, отриманих Прандтлем. Формулюється поняття задач типу пограничного шару і обговорюються алгоритми їхнього чисельного рішення. Як конкретні приклади, розглянуто задачі: витікання дозвукових струменів у супутній надзвуковий потік (у тому числі задачі про нерегулярні взаємодії ударних хвиль), течії в'язкого газу у вузьких каналах і визначення параметрів у в'язкому ударному шарі при гіперзвуковому обтіканні тупих тіл.

Problems on use of the boundary layer equations for an approximate solution of problems, in which an asymptotic evaluation of parameters for validation of the Prandtl classic boundary layer equations is not fully accomplished, are examined. The concept of boundary layer-type problems is formulated, and algorithms of their numerical solution are discussed. As specific examples, we consider problems on subsonic jets in a cocurrent supersonic flow (including problems on flows under irregular shock-wave interactions), the viscous-gas flow through narrow channels, and calculations of parameters in a viscous shock layer under the hypersonic flow around blunt bodies.

ВВЕДЕНИЕ

Сформулированная Прандтлем концепция пограничного слоя послужила эффективным средством упрощений уравнений Навье-Стокса и определила последующее развитие теоретической гидродинамики и газовой динамики. Наиболее существенным является отсутствие в упрощенных уравнениях вторых производных по направлениям, касательным к поверхности тела, и тривиальный вид уравнения количества движения в проекции на нормаль к обтекаемой поверхности. Уравнения пограничного слоя строго вытекают из уравнений Навье-Стокса при использовании методов составных асимптотических разложений. Причем эти методы позволяют с единых методологических позиций получить уравнения пограничного слоя и сформулировать высшие приближения, в которых учитывается вязко-невязкое взаимодействие пограничного слоя с невязкой частью потока [1]. На основе последовательного применения метода составных асимптотических разложений в работах Нейланда В.Я. получен ряд принципиальных результатов, касающихся, в частности, тече-

ний в окрестности точек излома обтекаемой поверхности, распространения возмущений вверх по потоку в гиперзвуковом пограничном слое, течения в пограничном слое в области отрыва присоединения и др. [2].

Строгое теоретическое обоснование, основанное на асимптотических оценках, имеют и упрощения уравнений Навье-Стокса для задач внешнего гиперзвукового обтекания тупых тел в приближениях тонкого вязкого ударного слоя [3]. В этих задачах на основе предельного перехода $Re \rightarrow \infty$, $Me \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow \infty$ или $k = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \rightarrow \infty$, при условии, что $k \cdot Re \approx 1$, уравнения Навье-Стокса сводятся к уравнениям, аналогичным уравнениям пограничного слоя за исключением того, что в силу большой плотности за ударной волной необходимо учитывать наличие градиента давления поперек ударного слоя, вызванного центробежными силами. При этом кривизна и угол наклона ударной волны с точностью до величин порядка k совпадают с соответствующими параметрами тела (здесь и далее индекс e относится к параметрам невозмущенного потока, Re – число Рейнольдса; γ – отношение удельных теплоемкостей при постоян-

ном давлени и постоянном объеме; M – число Маха) [6, 7].

В силу простоты уравнений пограничного слоя и наличия эффективных численных методов их решения эти уравнения получили без строгого теоретического обоснования широкое распространение для описания многих других течений. Предпосылкой для этого послужила только обобщенная гипотеза Прандтля о преобладании градиентов параметров по направлениям, перпендикулярным к направлению основного течения. При этом для многих практически интересных течений, для приближенного описания которых используются уравнения пограничного слоя, считается, что производная давления по направлению потока является неизвестной функцией, то есть $\frac{dp}{dx}$ подлежит определению. К таким течениям относятся, например, течения в струях, истекающих в спутный поток, течения в трубах и каналах, течения в тонком вязком ударном слое и ряд других течений.

При вытекании дозвуковых струй в спутный поток можно положить, что давление в поперечных сечениях струи не изменяется, а для определения изменения давления вдоль струи необходимо рассматривать задачу взаимодействия струи с внешним потоком.

При течении в трубах и каналах также можно считать, что давление не изменяется в поперечном сечении и течение в канале может быть описано уравнениями пограничного слоя. Продольный градиент давления в общем случае для пространственной задачи подлежит определению, исходя из краевого характера граничных условий для поперечной составляющей вектора скорости, определяемой из дифференциального уравнения первого порядка – уравнения неразрывности. Для двумерной задачи при течении газа в плоском канале или осесимметричной трубе для определения продольного градиента давления могут быть использованы условия сохранения расхода.

Решение задачи обтекания тупых тел в приближении тонкого вязкого ударного слоя асимптотически строго сводится к решению уравнений пограничного слоя. Однако учет вне порядковых отличий угла наклона ударной волны от угла наклона поверхности тела, который приводит к необходимости определения изменения угла наклона ударной волны и, как следствие, определения продольного градиента давления dp/dx за ударной волной, позволяет расширить диапазон применения [8]. При этом используются соотношения Рэнкина-Гюгонно, записанные в общем случае с учетом скольжения.

Перечисленные задачи объединены общностью математической постановки. Системы уравнений для их решения содержат уравнения второго порядка параболического типа – уравнения для продольной составляющей вектора скорости, температуры или энтальпии, концентрации компонент для смеси газов и уравнение первого порядка – уравнение неразрывности. Кроме того, в эти задачи входят неизвестные параметры или функции: толщина пограничного слоя или ширина струи, толщина вытеснения и распределение давления в задачах вязкого взаимодействия или продольный градиент давления в течениях в трубах и каналах. Общей особенностью всех этих задач является то, что для нормальной к направлению основного течения компоненты вектора скорости V_n , определяемой из уравнения первого порядка – уравнения неразрывности, формулируется краевая задача – задаются условия для V_n на двух границах расчетной области. Наиболее просто эти условия записываются на границах, являющихся обтекаемыми поверхностями тел, $V_n = 0$ или $V_n = V_{nw}$ – заданная функция. В других случаях условие для компоненты скорости V_n формулируется, исходя из дополнительных соотношений. Например, для задач вязкого взаимодействия эти соотношения вытекают из условий сопряжения с внешним невязким потоком, а для задач, решаемых в приближениях тонкого вязкого ударного слоя – из обобщенных соотношений Рэнкина-Гюгонно. Во всех случаях возможность решения краевой задачи для поперечной составляющей вектора скорости V_n обусловлено наличием дополнительных свободных параметров или функций, а ее реализация органично связана с решением уравнений первого порядка и, в частности, уравнения неразрывности. В свою очередь, определение этих свободных функций или параметров требует организации дополнительного итерационного процесса, на каждом шаге которого необходимо решать уравнения второго порядка параболического типа.

Поскольку такая формулировка задач является обобщением приближения пограничного слоя, то класс задач, объединенных описанной общностью, будем называть задачами типа пограничного слоя. Основанием для такого понятия служит то, что особенности конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений задач типа пограничного слоя, решение соответствующих алгебраических уравнений для сеточных функций, а также организация итерационного процесса для определения свободных параметров или функций практически не зависят от конкретной гидрогазодинамической задачи, в которой они используются.

тся. Это позволяет при разработке методов и алгоритмов решения задач исходить только из математических свойств этих задач и отвлекаться от их физических особенностей. Созданные на этой основе алгоритмы, основные элементы которых изложены в [9, 10], и реализующие их программы могут быть использованы для решения широкого класса разных по физическому смыслу задач. Часть этих задач рассматривается ниже.

1. ДО- (СВЕРХ-)ЗВУКОВЫЕ СТРУИ В СПУТНОМ СВЕРХ- (ДО-)ЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

При вдуве струи в безграничный сверхзвуковой поток либо если большая часть канала или трубы занята спутным сверхзвуковым потоком, давление во внешнем потоке определяется условиями взаимодействия этого потока с дозвуковой струей. В свою очередь, течение в дозвуковой струе определяется давлением в спутном потоке. В связи с этим решение задачи требует детального расчета взаимодействия через давление вдуваемой струи с внешним сверхзвуковым потоком. В этих условиях эффективной оказывается модель, использующая уравнения пограничного слоя для описания течения во вдуваемой дозвуковой струе, и уравнения невязкого течения (уравнения Эйлера) для внешнего сверхзвукового потока, дополненные соотношениями, описывающими вязко-невязкое взаимодействие и вытекающими из срачивания решений дифференциальных уравнений. Эта же модель оказывается достаточно эффективной и при описании вдува сверхзвуковых струй в спутный дозвуковой поток в трубе или канале. Методология решения таких задач развита в работах [8, 11–14]. Этим задачам свойственна особенность, связанная с переходом от до- к сверхзвуковому течению во вдуваемой струе или спутном потоке. Это накладывает определенные особенности на формулировку и реализацию алгоритмов численного решения таких задач.

Возможные схемы течений, которые имеют место при взаимодействии до- (сверх-)звуковых струй со спутным сверх- (до-)звуковым потоком, приведены на рис. 1. На схеме (а) изображены картины симметричного и несимметричного течений за плоским торцом в сверхзвуковом спутном потоке при наличии дозвукового вдува через проникаемую стенку донного среза. Схемы (б) и (в) иллюстрируют течения в ограниченном пространстве – канале или трубе: (б) – схема истечения дозвуковой вдуваемой струи в спутный сверхзвуковой

поток; (в) – схема течения для задачи о взаимодействии сверхзвуковой вдуваемой струи с дозвуковым спутным потоком. Отличительной особенностью этих задач является наличие вязкой симметричной или несимметричной области течения, взаимодействующей со сверхзвуковыми потоками, которые описываются в приближении невязкого газа. Параметры вязкого течения существенно зависят от волновой структуры невязких сверхзвуковых потоков, изменение которой в свою очередь определяется механизмом взаимодействия волн с дозвуковой частью течения. При всех численных расчетах, результаты которых обсуждаются ниже, параметры невязких потоков и интенсивность вдува выбирались так, чтобы исключить образование рециркуляционных зон и областей дозвукового невязкого течения.

Во всех этих задачах одним из определяющих параметров является относительный удельный расход во вдуваемой дозвуковой струе, который находится как отношение $q_v = (\rho u)_v / (\rho u)_e$, где индексы v и e относятся к параметрам струи и невозмущенного сверхзвукового потока в плоскости сечения вдува. В связи с наличием передачи возмущений вверх по потоку, свойственным дозвуковым течениям, в практических задачах относительный расход зависит не только от условий в ресивере, откуда газ истекает, но и от условий взаимодействия дозвуковой струи со спутным потоком. Поэтому эта величина подлежит определению при заданных параметрах торможения вдуваемого газа и параметрах спутного сверхзвукового потока. Однако, имея целью проиллюстрировать возможности сформулированной методологии решения задач, вопросы нахождения q_v , которые могут составить предмет решения отдельной задачи, рассматривать не будем. К рассматриваемому классу течений относятся течение в дозвуковой струе, образованной в сверхзвуковом потоке в результате нерегулярного взаимодействия ударных волн (схема (г)), и течение, возникающее при падении интенсивной ударной волны на сверхзвуковую струю, распространяющуюся в сверхзвуковом потоке (схема (д)). При нерегулярном взаимодействии ударных волн возникает слабо искривленный, близкий к прямому, скачок уплотнения на поверхности контактного разрыва. При переходе через скачок течение становится дозвуковым и, следовательно, в спутном сверхзвуковом потоке образуется дозвуковая струя. При падении скачка уплотнения на сверхзвуковую струю, как показано на схеме (д), в этой струе может возникнуть прямой скачок уплотнения, за которым течение становится дозвуковым, т. е. как и в течении по

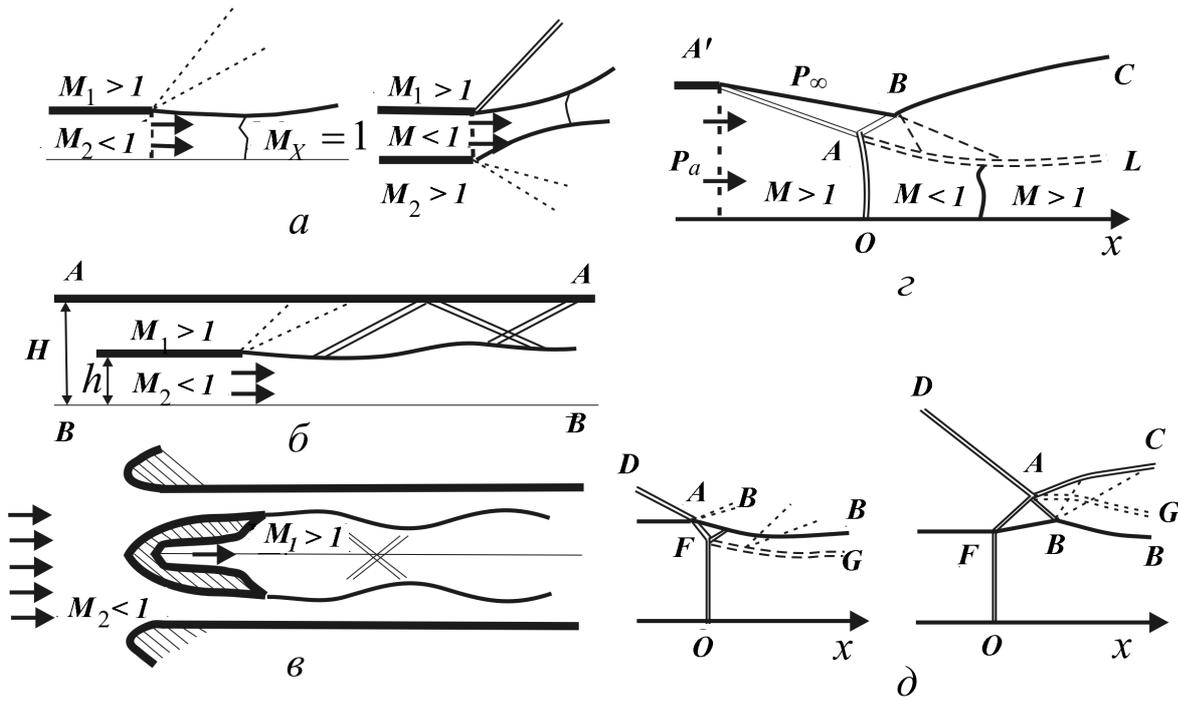


Рис. 1. Схемы течений при взаимодействии до-(сверх-)звуковой струи со спутным сверх-(до-)звуковым потоком

схеме (г): в области, лежащей вниз по потоку от возникшего прямого скачка, получаем дозвуковую струю, распространяющуюся в спутном сверхзвуковом потоке. В этой группе течений положение прямого скачка подлежит определению при решении задачи.

Все перечисленные задачи, представляя самостоятельный интерес, позволяют проиллюстрировать основные особенности распространения дозвуковых струй в спутном сверхзвуковом потоке.

1.1. Основные уравнения. Условия вязко-невязкого взаимодействия

Особенностью рассматриваемых задач является необходимость сопряженного решения уравнений пограничного слоя и уравнений Эйлера, так как в этих течениях вязко-невязкое взаимодействие играет определяющую роль. Поэтому при постановке задачи наряду с записью дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий необходимо сформулировать и условия вязко-невязкого взаимодействия. Общие принципы формулировки таких условий изложены в [8, 11]. В качестве иллюстрации основных особенностей задачи остановимся на выводе уравнений сопряжения для двумерных несимметричных тече-

ний. Течение в вязкой зоне смешения и в дозвуковых струях будем описывать уравнениями типа пограничного слоя. Решение этих уравнений должно удовлетворять условиям сопряжения значений параметров струи и спутных сверхзвуковых потоков:

$$u = U_{\delta k}(x), \quad i_0 = u^2/2 + i = i_{0\delta k}(x)$$

при $y = y_k$, $k = 1, 2$, где $y = y_k(x)$ – условные границы вязкой области снизу ($k = 1$) и сверху ($k = 2$); индекс δ относится к параметрам невязкого спутного потока. Для симметричной вязкой области граничное условие на нижней границе записывается в виде:

$$v = \partial u / \partial y = \partial i_0 / \partial y$$

при $y = y_1 = 0$.

В случае несимметричной “вязкой” области граничное условие для поперечной составляющей скорости будет оговорено ниже.

Распределение давления $p(x)$ находится из условия сопряжения с внешними “невязкими” потоками. В задачах пограничного слоя, решаемых с учетом высших приближений, для определения продольного градиента давления формулируются условия вязко-невязкого взаимодействия, которые основываются на концепции толщины вытеснения

либо вытекают из условий асимптотического сращивания решений уравнений пограничного слоя и уравнений невязкого обтекания. Используя уравнение неразрывности, можно показать, что между обоими этими подходами к формулировке условий вязко-невязкого взаимодействия имеется взаимосвязь (например, [8]).

При построении унифицированных алгоритмов для нахождения продольного градиента давления в задачах типа пограничного слоя эффективным оказывается непосредственно использовать соотношения, вытекающие из краевого характера граничных условий для поперечной составляющей вектора скорости v , определяемой из уравнения неразрывности, которое имеет первый порядок относительно v .

Назовем эти соотношения уравнениями вязко-невязкого взаимодействия. Для их вывода преобразуем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial y^\omega \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho y^\omega u}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

исключая из него с помощью уравнения количества движения и уравнения энергии производные по продольной координате x от продольной составляющей вектора скорости u , плотности ρ и удельной энтальпии i . После простых преобразований уравнение неразрывности (1) можно записать в виде [15]:

$$\left(1 - \frac{1}{M^2}\right) y^\omega \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y v}{u} = \frac{1}{\rho i} \frac{y^\omega}{u^2} \left(i \frac{\partial \tau}{\partial y} - u \frac{\partial Q}{\partial y} \right), \quad (2)$$

где

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{Pr} \mu \frac{\partial i}{\partial y} \right), \quad \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Проинтегрировав уравнение (2) по y в пределах от y_1 до y_2 , где $y = y_k(x)$ – уравнения границ вязкой области, получим

$$\gamma P \left(y_2^\omega \frac{V_{n2}}{U_2} - y_1^\omega \frac{V_{n1}}{U_1} \right) + B \frac{dp}{dx} + A = 0, \quad (3)$$

где A , B имеют вид

$$A = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{u^2} \left\{ i \frac{\partial r^\omega \tau}{\partial y} - u \frac{\partial r^\omega Q}{\partial y} \right\} dy,$$

$$B = \int_{y_1}^{y_2} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) r^\omega dy;$$

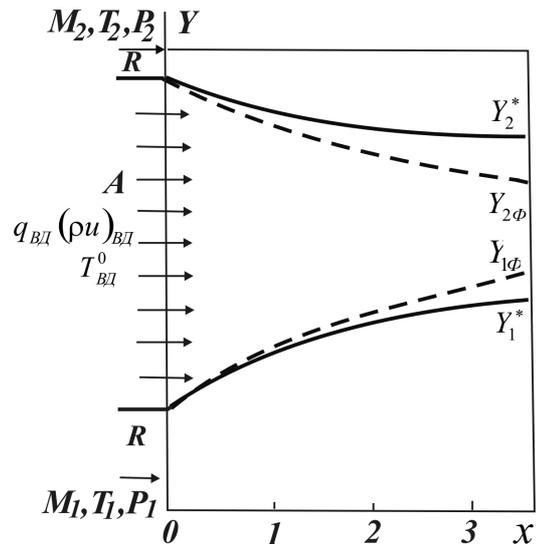


Рис. 2. Расчетная схема взаимодействия дозвуковой струи со спутным сверхзвуковым потоком

V_{nk} – значение поперечной составляющей вектора скорости на асимптотических границах струи.

Невязкие потоки сверху и снизу вязкой области обтекают некоторое эффективное тело, ограниченное поверхностями вытеснения $y = y_k^*(x)$ (рис. 2). В тонком слое невязкого газа, ограниченном поверхностями $y = y_k(x)$ и $y = y_k^*(x)$, пренебрежем поперечным градиентом давления, т. е. будем считать, что течение невязкого газа в этом слое описывается уравнениями невязкого пограничного слоя.

Для исключения из уравнения (3) комплекса $y_k \frac{V_{nk}}{U_k}$ произведем сращивание решений уравнений пограничного слоя и внешних невязких потоков, в результате чего получим уравнение, которое после интегрирования по y можно записать в виде

$$\frac{dp}{dx} = \left(\gamma P \left(y_2^{*\omega} \frac{dy_2^*}{dx} - y_1^{*\omega} \frac{dy_1^*}{dx} \right) + A \right) / \Delta, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \int_{y_1}^{y_2} \frac{d}{dy} \left(1 - \frac{1}{M^2} \right) y^{\omega+1} dy - \left(1 - \frac{1}{M_{\delta 2}^2} \right) y_2^{*\omega+1} + \left(1 - \frac{1}{M_{\delta 1}^2} \right) y_1^{*\omega+1}.$$

Уравнение (4) связывает распределение давления в вязкой зоне смешения с функциями, задающими форму нижней и верхней “эффективных” поверхностей вытеснения, обтекаемых невязкими

потоками. Назовем его обобщенным уравнением вязко-невязкого взаимодействия.

Остановимся более подробно на задании граничных условий для поперечной составляющей скорости при $y = y_1 \neq 0$. При заданных y_1, y_1^* и dp/dx эта составляющая скорости определяется из уравнения (4) при $k = 1$. Изменение v поперек вязкой области находится в результате интегрирования уравнения первого порядка – уравнения неразрывности. Условие для v , вытекающее из уравнения (4) при $k = 2$, будет выполняться автоматически при dp/dx , найденном из этого же уравнения, которое можно рассматривать как дифференциальное, связывающее $dp/dx, dy_k^*/dx$. Недостающие уравнения получаются в результате определения течения в невязком сверхзвуковом потоке, обтекающем “эффективные” поверхности вытеснения. В общем случае для нахождения параметров на “эффективных” поверхностях можно получить, используя уравнения Эйлера и условия равенства нулю нормальной к эффективным поверхностям вытеснения составляющей скорости, следующие уравнения:

$$\frac{dy_k^*}{dx} \frac{dp}{dx} - \rho_k^\delta u_{\delta k} \frac{d^2 y_k^*}{dx^2} = \frac{1}{y_k^\delta} \frac{\partial p}{\partial y} \left(1 + \left(\frac{dy_k^*}{dx} \right)^2 \right). \quad (5)$$

В случае, когда внешнее течение описывается решением Прандтля Майера, что дает достаточно точные для многих приложений результаты, можно воспользоваться следующими уравнениями:

$$\left(1 - \left(\frac{dy_k^*}{dx} \right)^2 \right)^{-1} \frac{d^2 y_k^*}{dx^2} = (-1)^k \frac{\sqrt{M_{bk}^2 - 1}}{M_{bk}} \frac{1}{\gamma P} \frac{dp}{dx}. \quad (6)$$

Итак, имеем систему дифференциальных уравнений (4) и (5) или (6) для определения неизвестных функций, которую будем называть системой обобщенных уравнений вязко-невязкого взаимодействия. При этом коэффициенты уравнения (4) существенным образом зависят от изменения параметров в зоне вязкого течения. В свою очередь, эти параметры должны определяться из системы уравнений пограничного слоя. Принципиальным для уравнений (4), (5) или (6), которые следует решать совместно с уравнениями пограничного слоя и уравнениями Эйлера, является возможность обращения величины Δ в ноль при некотором значении x . Это связано с переходом дозвукового осредненного по сечению течения в сверхзвуковое. Характерным для истечения дозвуковых струй в спутный сверхзвуковой поток оказывается то, что возможность обращения знаменателя Δ в ноль реализуется. При этом, для того,

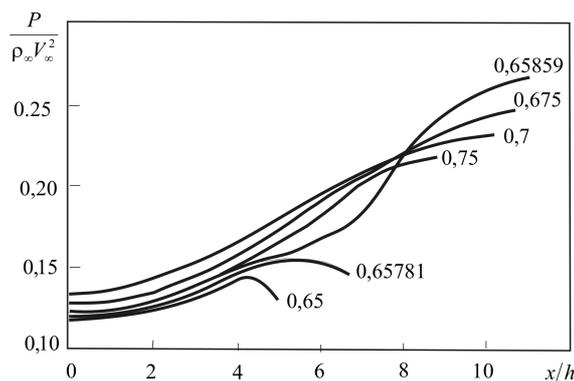


Рис. 3. Интегральные кривые уравнений вязко-невязкого взаимодействия

чтобы были ограниченными производные dp/dx , необходимо одновременное обращение в ноль числителя этих уравнений (4). Это условие служит для определения недостающих данных в начальном сечении дозвуковой струи: давления, расхода, геометрических характеристик и др. (некоторые конкретные ситуации рассмотрены ниже, типичная картина поведения интегральных кривых уравнения (4), рассматриваемого как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $p(x)$, представлена на рис. 3). Причем сущность этого условия не зависит от способа представления решения уравнений пограничного слоя и уравнений невязкого течения. Это позволяет отделить вопросы построения алгоритмов и выбора расчетных соотношений для прохождения особой точки и выбора величины донного давления от вопросов решения уравнений, описывающих течение в вязкой и невязкой областях.

1.2. Результаты численных расчетов до(сверх-)звуковых струй в спутном сверх(до-)звуковом потоке

Для иллюстрации основных закономерностей течений рассмотрим результаты численных расчетов при различных значениях определяющих параметров. При расчетах использовалась алгебраическая и дифференциальная модели турбулентности. В серийных расчетах можно использовать алгебраическую модель турбулентности, как более простую. В соответствии со сказанным выше, P_D – давление в начальном сечении дозвуковой струи – подбиралось таким образом, чтобы числитель и знаменатель в уравнении (4) обращались в ноль в одном и том же сечении $x = const$. Это сечение назовем сечением “запирания”. Возмущения, вно-

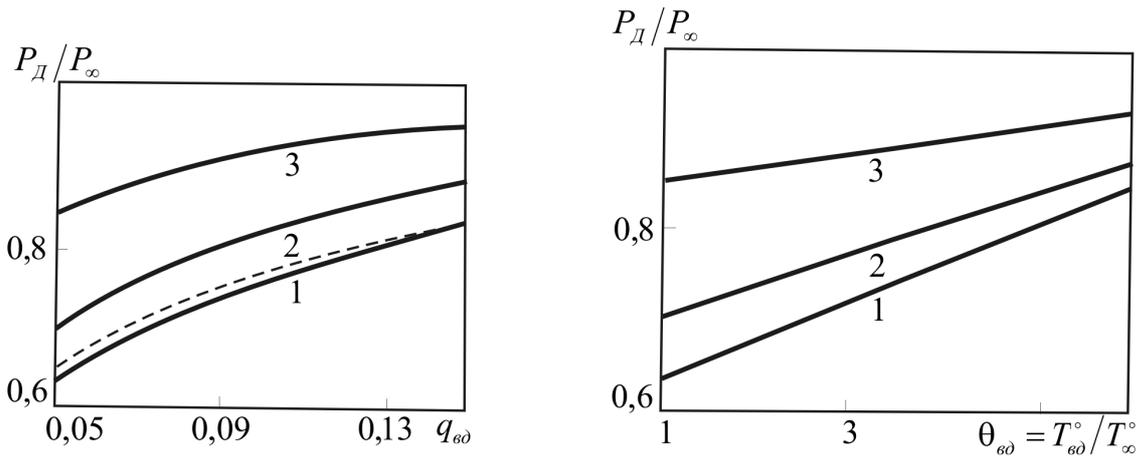


Рис. 4. Зависимости давления от интенсивности вдува и относительной температуры вдуваемой струи

симые в поток ниже по течению от этого сечения, не влияют на величину давления на срезе сопла и на распределение давления в струе до сечения “запирания”. Результаты, иллюстрирующие поведение интегральных кривых уравнений (4), (6), представлены на рис. 3.

Для оценки влияния разных способов расчета невязких потоков на параметры вязкого течения в режиме вязко-невязкого взаимодействия расчеты проводились как с использованием соотношения (5), в котором производная $\frac{\partial p}{\partial y}$ определялась на основе численного интегрирования уравнений газовой динамики по схеме Мак-Кормака, так и из соотношения (6), полученного с использованием решения Прандтля-Майера для простой волны. Результаты расчетов хорошо согласуются между собой (штриховая и сплошная линии 1 на рис. 4), что позволяет использовать при решении задачи истечения дозвуковой струи в безграничный спутный сверхзвуковой поток соотношение (6) и не решать уравнения для невязкого газа. Влияние интенсивности вдува и температуры вдуваемой струи на величину давления в сечении вдува при числах Рейнольдса 500, 1000, 3000 (кривые 1–3 соответственно) проиллюстрировано на рис. 4. Результаты получены при следующих опорных значениях параметров: $M_1 = M_2 = 2$, $q_{bd} = 0.05$.

1.3. Распространение до- (сверх-)звуковой струи со спутным сверх- (до-)звуковым потоком в канале и трубе

Отличительной особенностью задачи о распространении дозвуковой струи в спутном сверхзву-

ковом потоке в трубе или канале (схема (б) на рис. 1) является постановка граничных условий непротекания на ограничивающей поверхности АА. Это соответствует задаче об истечении блока плоских одинаковых струй в спутный равномерный сверхзвуковой поток, когда поверхности АА и ВВ, являясь плоскостями симметрии, вычлениют повторяющийся фрагмент поля течения, изображенный на рис 1, б. Результаты, полученные в этом случае, могут быть интерпретированы и как результаты расчета истечения дозвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток в канале или трубе, когда трение на стенках не учитывается. Это допущение слабо влияет на распределение статического давления по оси канала на относительно небольших расстояниях. Параметры истечения дозвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток в трубе или в канале существенным образом определяются отражением волн сжатия и разрежения от поверхности трубы или канала и их взаимодействием с дозвуковой струей. Поэтому для расчета таких течений необходимо для определения параметров невязкого потока в сверхзвуковой части течения использовать численные методы с использованием конечно-разностного аналога соотношения (5). В качестве иллюстрации основных особенностей течения на рис. 5 приведены распределения давления на оси и стенках канала при различных значениях относительной ширины вдуваемой струи h ($1 - h = 0.1$, $2 - h = 0.334$, $3 - h = 0.5$; $M_\Theta = 2$, $q_v = 0.05$, h отнесено к ширине струи в начальном сечении).

Сравнение результатов расчетов между собой показывает, насколько существенно влияние стенки на волновую структуру. Чем больше h , тем

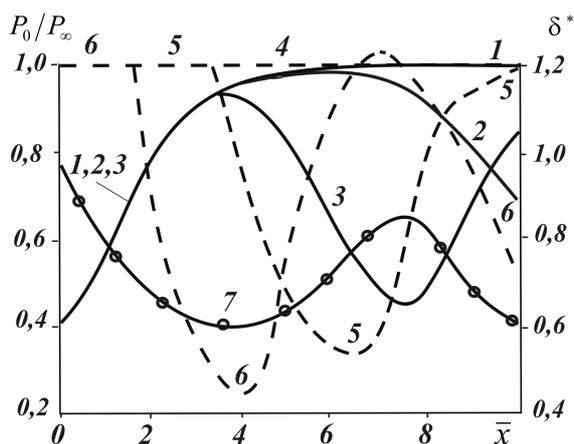


Рис. 5. Распределение статического давления и толщины вытеснения в канале при различных значениях относительной ширины дозвуковой струи

быстрее волновая структура вязкого потока сказывается на параметрах течения в вязкой области. Более подробно эволюцию волновой структуры распределения давления при движении вниз по потоку от кромки сопла проследим на примере, когда задана относительная ширина струи в начальном сечении $h = 0.5$ (кривые 3 на рис. 5). Поскольку отношение давления в струе в сечении к давлению в невозмущенном сверхзвуковом потоке $P_q/P_e < 1$, то при стекании сверхзвукового потока с кромки сопла образуется волна разрежения, которая, попадая на стенку AA, вызывает понижение давления (на участке $x = 1.8 \div 4$). Отражаясь от стенки AA, волна разрежения после взаимодействия с волнами сжатия, инициированными обтеканием сверхзвуковым потоком вогнутой поверхности эффективного тела вытеснения, попадает на струю и приводит к понижению давления на оси канала (на участке $x = 4 \div 7.5$, сплошная кривая). Эта волна, отражаясь от поверхности эффективного тела, приводит, с одной стороны, к росту $y^*(x)$, т. е. к утолщению эффективного тела вытеснения, и, с другой стороны, к дальнейшему инициированию волн сжатия, которые, попадая на стенку AA, вызывают на ней повышение давления. Отражаясь от стенки, волны сжатия приводят к увеличению давления в струе и уменьшению толщины “тела вытеснения”, задаваемой функцией $y = y^*(x)$.

Рассмотрим задачу о взаимодействии сверхзвуковой струи со спутным дозвуковым потоком в канале (рис. 1, схема (a)). Как и в предыдущей задаче, параметры в дозвуковом потоке, ограниченном поверхностью канала и границей сверхзвуковой струи, определяются, исходя из чи-

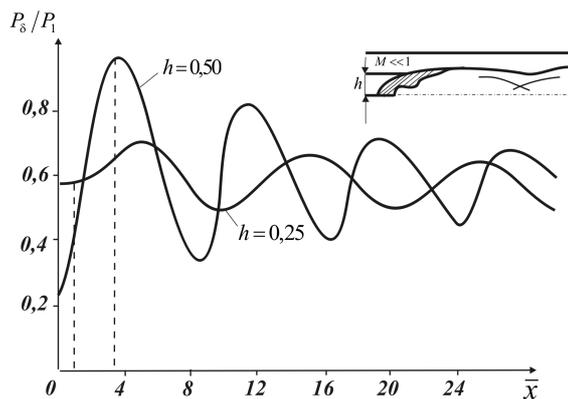


Рис. 6. Изменение давления на стенке канала при вдуве дозвуковой струи в сверхзвуковой поток в канале

сленного решения уравнений пограничного слоя, а дуваяемая сверхзвуковая струя рассчитывается конечно-разностным методом Мак-Кормака, исходя из уравнений вязкого течения. Распределение давления в дозвуковом потоке находится из условий вязко-невязкого взаимодействия (4), (5). Неизвестное значение статического давления P_q в дозвуковом потоке находится в процессе решения задачи из условий прохождения через особую точку системы уравнений вязко-невязкого взаимодействия. На рис. 6 приведено распределение статического давления вдоль стенки канала. Характер распределения давления аналогичен приведенному на рис. 5 для задачи взаимодействия дозвуковой струи со спутным сверхзвуковым потоком. Наблюдается такое же волнообразное изменение давления с затухающей вниз по потоку амплитудой. С увеличением относительной высоты сопла амплитуда колебаний статического давления возрастает, а период колебаний уменьшается, что согласуется с волновой структурой течения в спутной вязкой недорасширенной струе. Там же на рис. 6 значками отмечены положения сечений “запирания”. За этими сечениями вязкое течение в среднем становится сверхзвуковым.

1.4. Дозвуковая струя в спутном сверхзвуковом потоке при нерегулярном взаимодействии ударных волн

Рассмотрим взаимодействие двух симметрично расположенных ударных волн, которые формируются на кромке сопла при истечении перерасширенной сверхзвуковой струи. В зависимости от нерасчетности струи и числа Маха на срезе сопла возможны две схемы взаимодействия. При первой

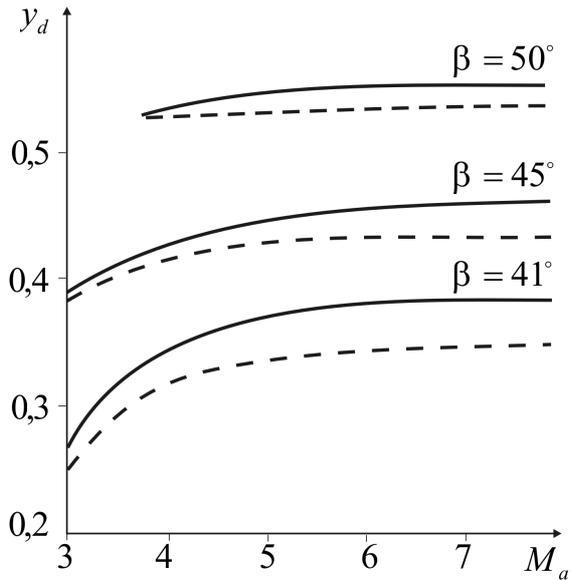


Рис. 7. Влияние числа Маха на срезе сопла на размер скачка Маха

схеме имеет место регулярное взаимодействие, при котором в точке пересечения ударных волн образуются две переломленные ударные волны, вектор скорости за которыми параллелен плоскости симметрии, и течение остается сверхзвуковым. При второй схеме имеет место нерегулярное или маховское взаимодействие. В этом случае в некоторой точке А (рис. 1) образуется отраженная ударная волна АВ, поверхность контактного разрыва АЛ и сильная ударная волна АО (маховский скачок) с дозвуковым течением за ней. Размер маховского скачка определяется взаимодействием дозвуковой струи, формирующейся за этим скачком, со спутным сверхзвуковым потоком. При математической формулировке задачи, учитывающей перечисленные выше особенности, примем во внимание, что, хотя скачок АО искривлен, давление вдоль него меняется незначительно. В связи с этим будем считать, что давление постоянно в поперечных сечениях дозвуковой струи, и для описания течения в ней воспользуемся уравнениями пограничного слоя.

При наличии падающей волны разрежения, образованной при отражении ударной волны АВ от границы струи, изменение давления на линии АЛ определяется не только формой этой линии, но волной разрежения, под действием которой давление в сверхзвуковом потоке на вогнутой поверхности уменьшается. В этом случае замкнутое решение может быть получено и в приближении невязкого газа. Влияние вязкости при этом носит ко-

личественный характер. Сформулированная выше задача об истечении дозвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток дает возможность оценить степень влияния вязкости на параметры течения при нерегулярном взаимодействии ударных волн.

В качестве иллюстрации применения этого подхода рассмотрим нерегулярное взаимодействие скачков уплотнения в плоской перерасширенной струе. Параметры струи будем задавать числом Маха и углом β скачка, возникающего на срезе сопла. По этим параметрам легко определяется нерасчетность струи. Линейные размеры отнесем к половине ширины струи на срезе сопла. Неизвестной является величина y_d , равная высоте “прямого” скачка уплотнения АО (маховского скачка), которая подлежит определению при решении задачи взаимодействия. На рис. 7 представлена зависимость y_d от M для различных углов β . Суцільною і штриховою лініями нанесены результаты, полученные в невязком приближении и при турбулентном теченні в струе. Видно, что турбулентное перемешивание приводит к уменьшению скачка Маха.

1.5. Взаимодействие ударной волны со сверхзвуковой струей

Рассматривается задача о падении ударной волны на сверхзвуковую струю, истекающую в спутный сверхзвуковой поток. Необходимость расчета такого класса течений возникает при решении различных задач внешней и внутренней газовой динамики. Влияние вязкости на характеристики течения до сечения падения ударной волны на струю не учитывается, что вполне оправдано на начальном участке струи, когда ширина области смешения намного меньше начальной ширины струи, и значение турбулентной вязкости до сечения взаимодействия на порядок меньше соответствующего характерного значения в области взаимодействия с ударной волной.

Для чисел Маха в потоке M_e и в струе M_g предполагается выполнение условий $M_e > M_g > 1$. Начальная ширина струи h_0 принимается в качестве характерного линейного размера, т. е. $h_0 = 1$. Падающая на струю ударная волна характеризуется углом наклона β_e относительно направления течения невозмущенного потока. В зависимости от значений определяющих параметров задачи β_e , M_e , и M_g возможны различные виды взаимодействия (рис. 8).

а) *Полностью регулярное взаимодействие.* Картина течения, полученная в результате расчета и

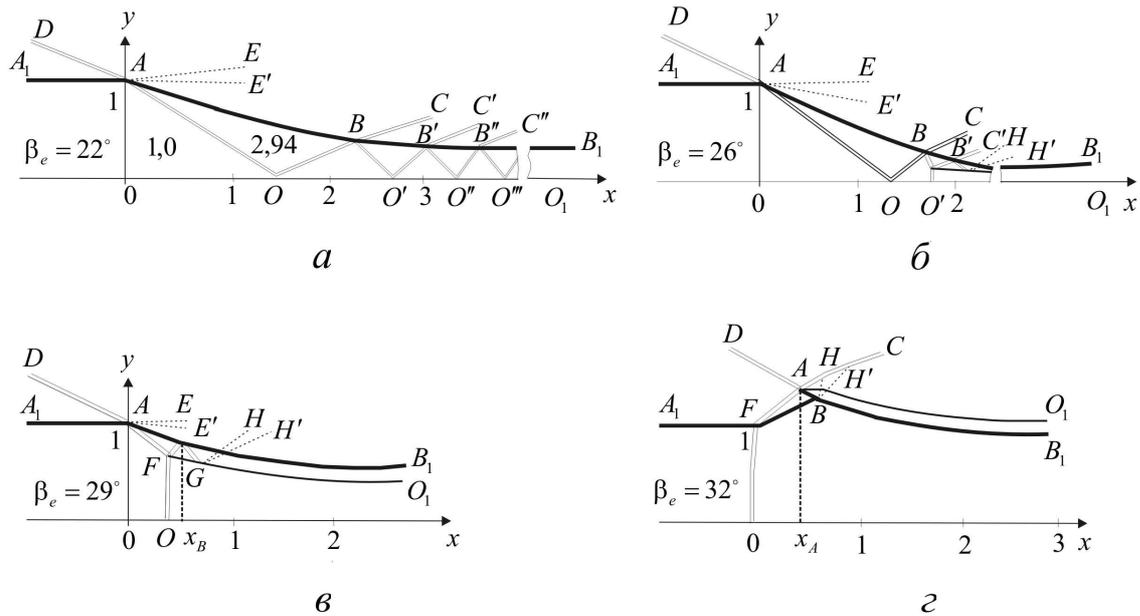


Рис. 8. Схемы взаимодействия ударной волны со сверхзвуковой струей

соответствующая полностью регулярному взаимодействию при $\beta_e = 22^\circ$, представлена на рис. 8, а. Падающая ударная волна DA при взаимодействии с поверхностью контактного разрыва A_1B_1 распадается на преломленную волну AO, распространяющуюся в струе, и веер волн разрежения EAE' в потоке. При регулярном отражении ударной волны AO от плоскости симметрии течения OO образуется отраженная ударная волна OB, которая, взаимодействуя с границей струи A_1B_1 в точке B, распадается на преломленную ударную волну BC, распространяющуюся в потоке, и переотраженную ударную волну BO в струе. Картина переотражения ударной волны BO повторяется вниз по потоку до тех пор, пока течение в струе и потоке не станет опять плоскопараллельным. На достаточно большом расстоянии от области взаимодействия вниз по потоку параметры ударной волны BO принимают значения, соответствующие регулярному отражению ударной волны DA от плоскости A_1A при заданном числе Маха в невозмущенном потоке M_e . Ширина струи находится из условия сохранения массы в струе. Особенностью полностью регулярного взаимодействия является то, что при прохождении через систему скачков в струе и потоке течение газа остается сверхзвуковым.

б) *Нерегулярное отражение в струе.* Если в условиях рассмотренного выше течения интенсивность преломленной ударной волны AO или любой из

переотраженных волн BO', BO'' такова, что невозможно ее регулярное отражение от плоскости симметрии OO_1 , то в струе имеет место нерегулярное взаимодействие (рис. 8, б). В этих условиях возникают сильная ударная волна FO (рис. 8, в, г) с дозвуковым течением за ней и слабая отраженная волна FB. При взаимодействии этих волн с поверхностью контактного разрыва BB' и с границей дозвуковой области струи образуется серия отраженных и переотраженных ударных волн и волн разрежения. Изменение давления вдоль дозвуковой области струи определяется этими волнами.

в, г) *Полностью нерегулярное отражение.* Если интенсивность падающей ударной волны DA настолько велика, что невозможна реализация схемы течения, описанной в п. б, то течение полностью перестраивается (рис. 8, г). В струе образуется обращенная к направлению потока выпуклостью ударная волна FO, близкая к прямой, в отличие от аналогичной вогнутой ударной волны при нерегулярном отражении в струе (рис. 8, в), течение за которой становится дозвуковым. Положение этой волны заранее неизвестно и подлежит определению в процессе решения задачи. В набегающем потоке образуется слабая ударная волна FA, угол наклона которой совместно с углом наклона сильной ударной волны FO в точке F определяется из соотношений Рэнкина-Гюгонио, исходя из условий на контактной поверхности FB (равен-

ство давлений и равенство углов наклона векторов скорости снизу и сверху). Во внешнем потоке ударная волна FA взаимодействует с падающей ударной волной DA, в результате чего образуются две ударные волны AC и AB и поверхность контактного разрыва. Углы наклона ударных волн AC и AB и значения газодинамических параметров за ними в точке A можно рассчитать из соотношений Рэнкина-Гюгонио и условий на контактной поверхности. Ударная волна AB при взаимодействии с границей в точке B отражается от нее веером волн разрежения HBH' с образованием излома в форме границы дозвуковой струи в точке B.

Для этой задачи характерно, что взаимодействие ударной волны со струей происходит без дополнительных внешних возмущений. Назовем нерегулярное взаимодействие ударных волн, структура которого формируется без влияния внешних, изолированным. Легко убедиться, что задача определения параметров изолированного взаимодействия в постановке невязкого газа не имеет решения. Действительно, изменение давления вдоль струи определяется условиями взаимодействия со сверхзвуковым потоком в области ABO. Поскольку при нерегулярном взаимодействии угол наклона контактной поверхности в точке A отрицательный и при удалении вниз по потоку от этой точки из-за влияния плоскости симметрии стремится к нулю, то контактная поверхность ABO должна иметь по крайней мере участки вогнутости. На этих участках площадь поперечного сечения струи, ограниченной поверхностью ABO, должна уменьшаться. В то же время, при сверхзвуковом обтекании вогнутой контактной поверхности происходит увеличение давления, что вызывает торможение дозвуковой струи. В связи с необходимостью сохранения массы в струе, ограниченной поверхностью тока ABO, площадь поперечного сечения струи при торможении дозвукового потока должна увеличиваться. Таким образом, приходим к противоречию. Следовательно, в постановке невязкого газа задача о нерегулярном взаимодействии не имеет решения. Для разрешимости задачи о нерегулярном взаимодействии ударных волн в приближении невязкого газа необходимо, чтобы на контактную поверхность в области ее вогнутости падала извне волна разрежения, которая приводила бы к понижению давления. Именно это имело место в рассмотренной выше задаче о нерегулярном взаимодействии ударных волн в “пере” расширенной струи. В данном течении такая волна разрежения отсутствует и для формулировки замкнутой постановки задачи необходимо учесть эжектирующее влия-

ние сверхзвукового течения, примыкающего к дозвуковой струе. Другими словами, в этом случае расчет взаимодействия сверхзвукового потока со спутной дозвуковой струей необходимо проводить с учетом вязкости или, более конкретно, с учетом турбулентного перемешивания в зоне смешения. Уравнения пограничного слоя, описывающие течение в дозвуковой струе, и уравнения, описывающие течение в невязком сверхзвуковом потоке, решаются маршевыми по продольной координате конечно-разностными методами. Характеристики невязкого течения в начальном сечении, в котором расположен скачок Маха FO, полагаются равными параметрам за скачком FA. Наклон этого скачка в свою очередь определяется, исходя из условий равенства давлений за скачками OF и FA. Начальные данные в дозвуковой струе определяются из условия за прямым скачком OF. Сопряжение решений уравнений невязкого течения и пограничного слоя осуществляется с помощью уравнений вязко-невязкого взаимодействия (4), (5).

Для этих уравнений формулируется задача Коши. Для этого в сечении скачка уплотнения FO $x = 0$ необходимо задать начальные значения $p, \frac{dy^*}{dx}, y^*$. Величины $p, \frac{dy^*}{dx} = \operatorname{tg}\Theta_F$ определяются из соотношений Рэнкина-Гюгонио для условий в тройной точке F. Что касается $y^*(0)$, то при течении по схеме (r) имеем $y^*(0) = 1$, а при течении по схеме (в) эта величина может быть определена, если найдена координата x точки B или B'. Положение прямого скачка FO в случае полностью нерегулярного отражения может быть определено, если задано положение точки A. Таким образом, во всех этих течениях необходимо определить координату x точки A (или B и B'), которая находится из условия прохождения особенности типа “седло” в обобщенных уравнениях вязко-невязкого взаимодействия (4), (5) и является собственным числом задачи. Зная расстояние x_A или x_B и $x_{B'}$ точек A или B и B', можно однозначно определить положение скачка FO в плоскости течения при заданных β_e, M_e, M_g .

Результаты расчетов нерегулярного отражения в струе и полностью нерегулярного отражения представлены на рис. 8. Расчеты соответствуют течению при постоянных и равных значениях отношения удельных теплоемкостей $\gamma = 1.4$ и при значениях чисел Маха в потоке и струе соответственно $M_e = 5, M_g = 3$. Картины течения, представленные на рис. 8, $a - z$, отвечают различным значениям угла наклона β_e падающей ударной волны DA. При $\beta_e = 26^\circ$ реализуется схема течения с нерегулярным отражением в струе (рис.

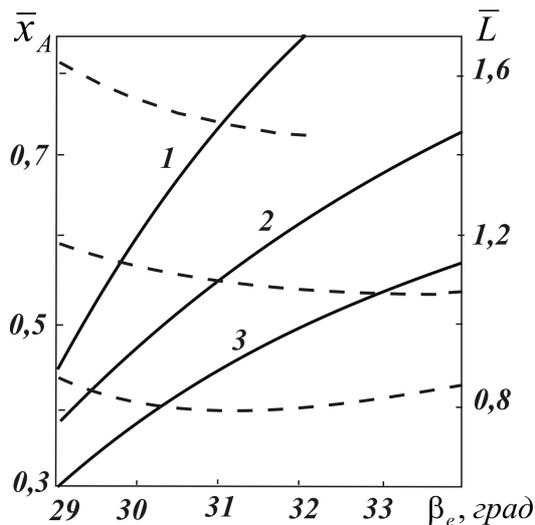


Рис. 9. Влияние интенсивности падающей ударной волны на расстояние $\bar{X}_A = x_A/h_0$ и длину дозвуковой области $\bar{L} = L/h_0$ (---)

8, б). При увеличении угла наклона ударной волны DA до $\beta_e = 29^\circ$ (рис. 8, в) нерегулярное отражение в струе происходит уже для преломленной волны AF. Дальнейшее увеличение интенсивности падающей ударной волны DA приводит к перестройке течения и реализации схемы рис. 8, г при $\beta_e = 32^\circ$. Рис. 9 иллюстрирует влияние интенсивности падающей ударной волны на геометрические характеристики дозвукового участка струи: на расстояние $\bar{X}_A = x_A/h_0$ (сплошные кривые) и длину дозвуковой области $\bar{L} = L/h_0$ (штриховые), измеряемую от сечения сильной ударной волны FO до сечения, в котором среднее число Маха равно единице. Расчеты проводились для схемы полностью нерегулярного отражения при $M_g = 3$. Кривые 1 – 3 соответствуют $M_e = 5, 6, 7$.

2. ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ

При истечении струи в спутный поток в длинных трубах и каналах зона турбулентного перемешивания распространяется на некотором расстоянии от входа на все поперечное сечение канала, вязкая часть потока вырождается и уравнения пограничного слоя могут быть применены для расчета параметров течения во всем канале. При этом, как уже упоминалось, можно считать, что давление не изменяется в поперечном сечении. Продольный градиент давления подбирается так, чтобы удовлетворялись оба граничных условия для поперечной составляющей вектора скоро-

сти. Этот подход может быть использован как для двумерных течений, так и для пространственных, в которых давление является функцией двух переменных. Соответствующие алгоритмы описаны в [9, 10]. Как показано в [8] при этом автоматически удовлетворяется условие сохранения расхода при течении газа по каналу. Однако для сопел со слабо меняющимся наклоном стенки к оси симметрии (приближение узкого канала) для определения распределения давления вдоль сопла более удобно воспользоваться уравнениями типа (4), наличие особой точки типа “седло” в которых позволяет построить алгоритм определения расхода вязкого газа, который может пропустить сопло при заданных давлении и температуре торможения во входном сечении сопла и параметрах газа в ресивере. Применительно к задаче о течении вязкого газа в канале уравнение (4) может быть записано в виде:

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{M^2}\right) d\eta \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dx} - \int_0^1 \frac{F}{u^2} d\eta, \quad (7)$$

где $y = r(x)$ – уравнение поверхности сопла;

$$F = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left\{ u \frac{\partial y^\omega \tau}{\partial y} - u \frac{\partial y^\omega Q}{\partial y} \right\}, \quad \eta = \frac{y}{r}.$$

Заметим, что для невязкого течения в гидравлическом приближении из этого уравнения вытекает обычное соотношение между изменением площади поперечного сечения сопла и градиентом давления, применяемое в одномерной теории сопла Лавалля. Интеграл, входящий в правую часть уравнения (7), расходится, если скорость газа на стенке стремится к нулю. Поэтому для вывода уравнения, связывающего изменение давления и площади поперечного сечения канала, удобнее воспользоваться предложенным в [16] подходом, основанным на осреднении параметров в плоскости поперечного сечения. Введем осредненные по поперечному сечению сопла параметры:

$$r^2 \rho_m U = 2 \int_0^r \rho u y dy = 2A,$$

$$r^2 \rho_m U = 2 \int_0^r \rho u^2 y dy = 2J,$$

$$U = J/A, \quad \rho_m = 2A/r^2 U.$$

Запишем уравнения пограничного слоя в дивергентном виде и проинтегрируем их по y в пределах от 0 до $r(x)$. Полагая, что осредненные параметры

– давление, плотность и энтальпия – связаны уравнением состояния, после очевидных преобразований запишем осредненные уравнения пограничного слоя в виде

$$r^2 \rho_m U = 2A = \text{const},$$

$$\frac{1}{U} (M^2 - 1) \frac{dU}{dx} = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dx} + \frac{M^2}{AU} \frac{1}{Re} \left(\mu \frac{du}{dy} \right)_{y=r}. \quad (8)$$

В этих уравнениях скорость отнесена к $(2CpT_0^*)^{1/2}$, давление – к P_0^* , плотность – к ρ_0^* , линейные размеры – к радиусу критического сечения сопла r^* ; $Re = (2CpT_0^*)^{1/2} \rho_0^* R^* / \mu_0^*$; T_0^* , ρ_0^* – параметры в ресивере.

Второе уравнение (8) отличается от уравнений одномерного течения через сопло наличием слагаемого, учитывающего трение о стенки канала. Для определения этого слагаемого необходимо знать профиль скорости в поперечном сечении. Уравнения (7), (8) имеют особенность, связанную с обращением в ноль коэффициента при dp/dx или dU/dx , вызванным достижением скорости осредненного потока местной скорости звука. Как и в рассмотренных выше задачах, прохождение особой точки этих уравнений обеспечивается специальным подбором расхода газа через сопло при заданных параметрах в ресивере. Например, из второго уравнения (8) видно, что для ограничения dU/dx и, следовательно, dp/dx , необходимо, чтобы в одном и том же сечении x было:

$$M^2 - 1 = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dx} + \frac{M^2}{AU} \frac{1}{Re} \left(\mu \frac{du}{dy} \right)_{y=r} = 0. \quad (9)$$

Эти равенства могут выполняться лишь при специально подобранном значении величины A , зная которую легко вычислить коэффициент расхода C_d – отношение реального расхода к расходу, рассчитанному для невязкого газа.

Использование уравнения (8) оказывается удобным для определения dp/dx в окрестности критического сечения. Погрешность, вносимая усреднением параметров, здесь незначительна, так как в критическом сечении пограничный слой наиболее тонок. Для нахождения усредненных параметров, входящих в (8), (9), использовались результаты численного конечно-разностного решения уравнений пограничного слоя. В качестве примера, иллюстрирующего получаемые результаты, рассчитано течение газа через коническое сопло с теплоизолированными стенками. Угол полураствора входной части равен -30° , выходной $+20^\circ$. Образующие

конических поверхностей сопрягаются окружностью с радиусом, равным 0.5. Расчеты проведены при $Re = 1250, 590, 260, 175$.

Табл 1. Зависимость коэффициента расхода газа через сопло Лавала от Re

Re	∞	1250	590	260	175
A	0.129	0.114	0.110	0.104	0.101
C_d	1	0.885	0.853	0.8	0.775
C_d эксп.	-	0.9	0.84	0.8	0.77

В табл. 1 приведены значения расхода газа, полученные в расчете и в эксперименте [17].

На рис.10 представлено распределение отнесенной к радиусу текущего сечения сопла величины ядра равномерной скорости и температуры вдоль оси сопла. В ядре значения продольной скорости отличаются от соответствующих значений на оси менее, чем на 5%. Распределение температуры дано в сравнении с экспериментальными данными из работы [17]. Увеличение температуры в расширяющейся части сопла вызвано влиянием работы сил вязкого трения.

3. ЗАДАЧА ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТУПЫХ ТЕЛ В ПРИБЛИЖЕНИИ ТОНКОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ

Расчет параметров внешнего гиперзвукового обтекания тупых тел в приближениях тонкого вязкого ударного слоя асимптотически строго сводится, как уже отмечалось, к уравнениям пограничного слоя, за исключением того, что учитывается градиент давления поперек ударного слоя, вызванный центробежными силами. Используя уравнение неразрывности, легко убедиться, что для параметров за ударной волной должны выполняться следующие порядковые соотношения: $\rho \sim 1/k$, $V_a \sim 1$, $V_n \sim \delta$, $\delta \sim k$, где δ – характерная толщина вязкого ударного слоя. Граничные условия на поверхности тела остаются такими же, как и для уравнений Навье-Стокса. За ударной волной должны выполняться обобщенные уравнения Ренкина-Гюгонио, которые с учетом приведенных оценок записываются в виде [6]:

$$\rho_0 V_{n1s} = V_{nse},$$

$$\rho_0 V_{n1s}^2 + P + \rho_e V_{nse} + P_e,$$

$$V_{nse}(V_{as} - V_{ase}) = (\mu/K \times \partial V_{as} / \partial \eta), \quad (10)$$

$$V_{nse}(H - H_e) = \frac{\mu}{K} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} + (1/Pr - 1) \frac{\partial h}{\partial \eta} \right),$$

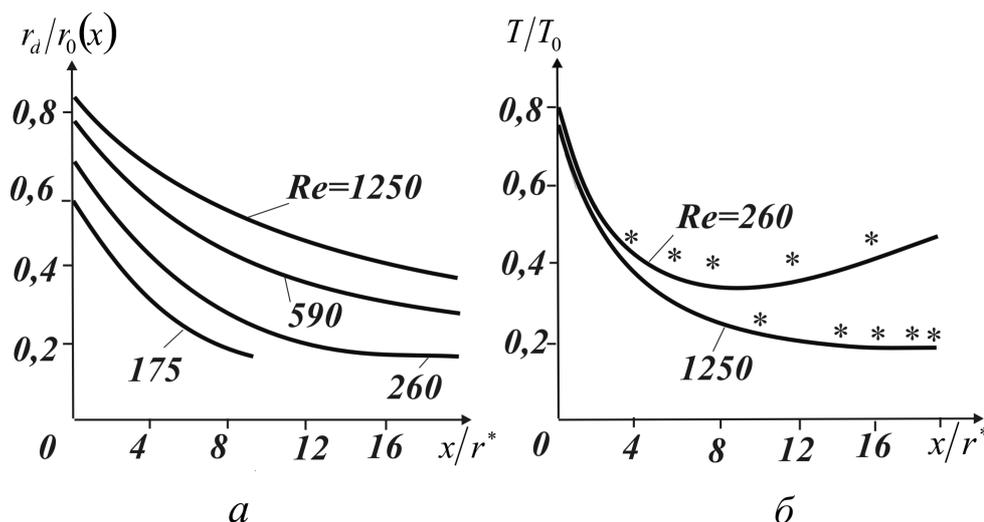


Рис. 10. Изменение ядра равномерной скорости (а) и температуры газа (б) вдоль оси сопла

где $\eta = \frac{n}{S}$, $n = S(x)$ – уравнение ударной волны; V_a – касательные составляющие вектора скорости; $K = k \cdot Re$; индекс s относится к компонентам вектора скорости в системе координат, связанной с ударной волной.

Последние два уравнения (10) служат в качестве одного из граничных условий для дифференциальных уравнений второго порядка относительно продольной составляющей вектора скорости и полной энтальпии. При этом, поскольку уравнения тонкого вязкого ударного слоя имеют параболический тип, их решение может быть получено численными методами пошагового интегрирования. Первое уравнение из системы (10) может быть удовлетворено соответствующим подбором толщины вязкого слоя. Однако при заданных углах наклона ударной волны (или, что то же V_{ase} и V_{nse}) это не вносит препятствий в пошаговое интегрирование уравнений вязкого ударного слоя.

Представляет интерес приближение, которое не следует из результатов асимптотических оценок – используются уравнения движения, в которых опущены слагаемые k , и условия на ударной волне, в которых сохранены члены k . Использование более точных граничных условий на ударной волне позволяет существенно расширить диапазон по γ и Re применимости уравнений вязкого ударного слоя для описания сверхзвукового обтекания тел. Однако решение задачи в этом приближении представляет определенные трудности, связанные с необходимостью построения ударной вол-

ны и обусловленные этим проявления “эллиптичности”, присущей физической задаче. Возможен следующий итерационный путь решения этой задачи: проводится расчет обтекания тела при условии $V_{ase} = V_{ae}$, $V_{nse} = V_{ne}$. Отход ударной волны перед телом, т. е. функцию $S(x)$ можно определить из условия $\rho V_{ns} = V_{nse}$. Затем при V_{ase} , найденных по определенному в предыдущей итерации $S(x)$, опять решается задача обтекания и находятся новые значения $S(x)$. В каждой итерации уравнения вязкого ударного слоя решаются маршевыми по продольной переменной конечно-разностными методами. При этом в условиях на ударной волне (10) величины V_{ase} , V_{nse} считаются заданными, что не нарушает корректность пошагового интегрирования дифференциальных уравнений параболического типа. Вся же задача решается своего рода некоторым методом установления, который получил название метода глобальных итераций или каскадной схемы [6, 18]. Это позволяет получить решение задачи при той ее “эллиптичности”, которая вносится неопределенной заранее формой ударной волны. Учет передачи возмущений вверх по потоку осуществляется в процессе численного дифференцирования таблично заданной функции $S(x)$. При этом следует отметить, что для решения задачи реализуется итерационный процесс, на каждом цикле которого осуществляется два шага: на первом шаге при маршевом решении уравнений вязкого ударного слоя находится отход ударной волны; на втором шаге с использование численного дифференцирования найден-

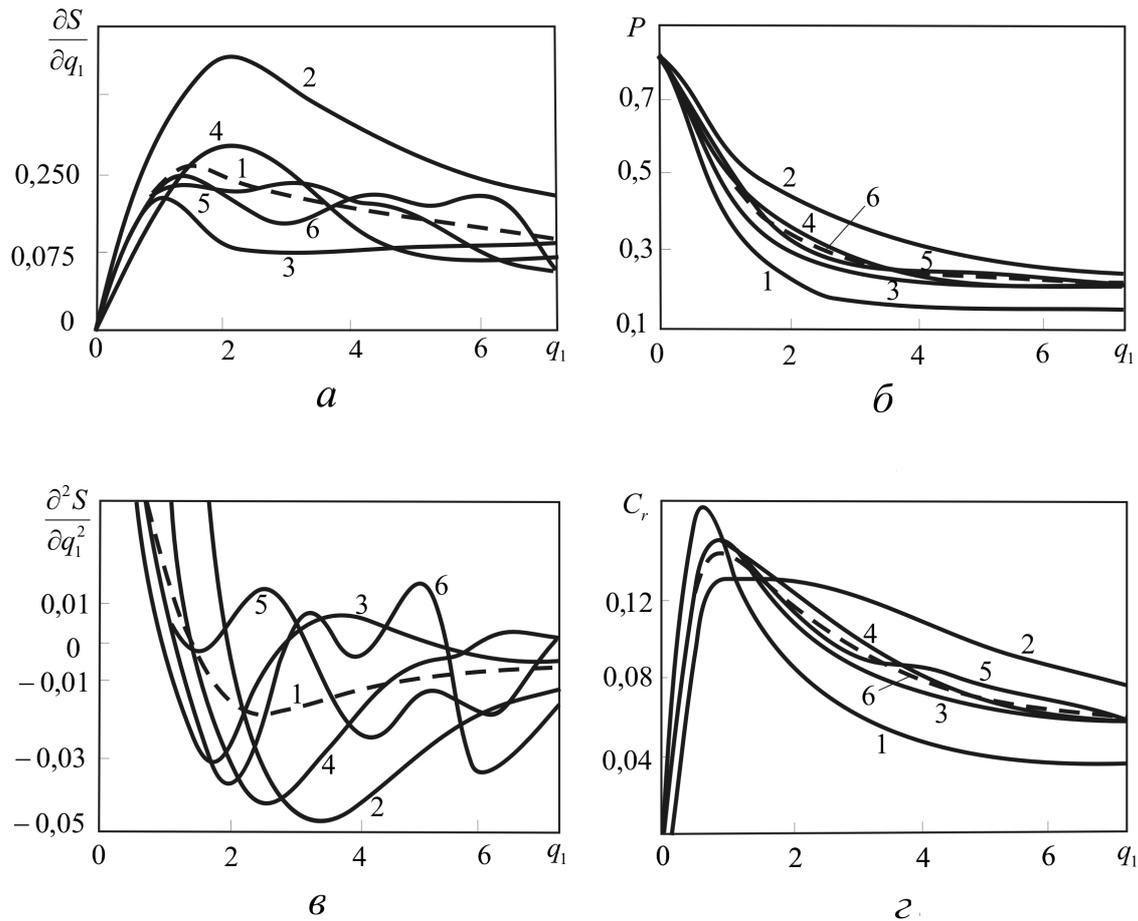


Рис. 11. Распределение вдоль поверхности гиперboloида вращения:
 а – угла наклона поверхности; б – давления; в – кривизны; г – коэффициента трения

ной функции $S(x)$ определяются компоненты нормали к ударной волне или, что то же, величины $V_{a_{se}}, V_{n_{se}}$. Некорректность процедуры численного дифференцирования во многих случаях не позволяет добиться сходимости глобальных итераций без применения дополнительных приемов. В связи с этим представляется целесообразным добиваться выполнения уравнения не выбором $S(x)$, а подбором непосредственно $V_{n_{se}}$ – величины, входящей в граничные условия (10). При этом отход ударной волны можно найти в результате численного интегрирования производной $\partial S/\partial x$, которая в свою очередь определяется, исходя из $V_{n_{se}}$. Это позволяет реализовать маршевое решение задачи с одновременным определением нормали к ударной волне, отказавшись от глобальных итераций [8, 19]. Кроме того, в таком подходе некорректная операция дифференцирования таблично заданной

функции $S(x)$, которая необходима для определения $V_{a_{se}}, V_{n_{se}}$, заменяется сглаживающей процедурой численного интегрирования при определении $S(x)$. Преимущества, достигаемые при этом, иллюстрируются на рис. 11, где представлены результаты расчета осесимметричного обтекания гиперboloида вращения с полным внутренним углом 45° . Приведены первая и вторая производные толщины вязкого слоя $\partial S/\partial x$ и $\partial^2 S/\partial x^2$, также распределения давления и трения. Сплошные линии относятся к результатам, полученным по каскадной схеме, и цифры обозначают номер итерации. Результаты расчетов с определением формы ударной волны по описанной маршевой схеме нанесены штриховой линией. Из приведенных результатов видно, что построенные по маршевой схеме распределения $\partial S/\partial x$ (рис. 11, б) и коэффициента трения (рис. 11, г) являются пределами, к кото-

рым сходятся приближения каскадной схемы для соответствующих функций. Из рис. 11 хорошо видно увеличение счетных осцилляций в значениях $\partial S/\partial x$ с ростом номера приближения. Для значений второй производной $\partial^2 S/\partial x^2$ при $x > 2$ сходимости не наблюдается, лишь условие малости абсолютных значений самой величины не нарушает устойчивости алгоритма. В то же время, описанная маршевая схема оказалась настолько удачной, что в поведении второй производной практически нет осцилляций, хотя она и определяется конечно-разностным дифференцированием величины $\partial S/\partial x$. При этом использовались левосторонние разностные соотношения. Заметим, что результаты, приведенные на рис. 11, получены для $M_e = 20, \gamma = 1.4, Re = 300$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Упрощения, принятые Прандтлем при записи уравнений пограничного слоя, могут быть использованы не только для определения параметров в тонком пристеночном пограничном слое, но и при формулировке широкого круга задач о течениях вязкого газа. Получающиеся в результате этих упрощений системы уравнений содержат уравнения второго порядка параболического типа (уравнения количества движения и энергии) и уравнение первого порядка (уравнение неразрывности). Кроме того, эти задачи содержат неизвестные параметры или функции: продольный градиент давления, границы расчетной области и др. Общность математической постановки дает возможность разрабатывать общие для различных по физической сущности задач методы и алгоритмы их решения. В качестве конкретных приложений сформулированных положений рассмотрены различные по физической сущности задачи: истечение дозвуковой струи в спутный сверхзвуковой поток в канале; расчет течения при нерегулярном взаимодействии ударных волн; падение ударной волны на сверхзвуковую струю; истечение вязкого газа через сопло Лавала; определение параметров в вязком ударном слое при гиперзвуковом обтекании тупых тел.

1. Ван Дайк М. Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком. Исследования гиперзвуковых течений. Под ред. Ф.Р. Ридделла // М.- Мир, 1964.- С. 35–38.
2. Нейланд В. Я., Сычев Асимптотические решения уравнений Навье-Стокса в областях с большими

локальными возмущениями // Изв. АН СССР, МЖГ.- 1966.- N 4.- С. 43–49.

3. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Труды ЦАГИ.- 1974.- Вып. 1529.- С. 124.
4. Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Кролев Г. Л. Асимптотическая теория отрывных течений Под ред. В.В. Сычева. Наука.- М.: Гл. ред. Физ.-мат. Лит, 1987.- 256 с.
5. Нейланд В. Я., Боголепов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И. симптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа.- М.: Физматлит, 2003.- 456 с.
6. Магомедов К. М. Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом // Изв. АН СССР Сер. МЖГ.- 1970.- N 2.- С. 45–56.
7. Davis R. T. Numerical Solution of the Hypersonic Viscous-Layer Equations // AIAA Journal.- 1970.- V. 8, No 5.- P. 843–851.
8. Тимошенко В. И. Сверхзвуковые течения вязкого газа // К.- Наукова думка, 1987.- С. 187.
9. Timoshenko V. I. Computer technology of solving problems in gasdynamics.- New york: Begell house inc. Publishers, 1998.- 247 p.
10. Тимошенко В. И. Газовая динамика высокотемпературных технологических процессов.- Днепропетровск: Институт технической механики НАНУ и НКАУ, 2003.- 460 с.
11. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. К расчету характеристик течения при равномерном вдуве однородного газа в кормовой области тела // Журн. прикл. мех. и техн. физики.- 1984.- N 1.- С. 76–81.
12. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. Влияние распространения волн сжатия и разрежения на взаимодействие до(сверх)-звуковой струи со спутным сверх (до)- звуковым потоком в канале и трубе // Журн. прикл. мех. и техн. физики.- 1990.- N 4.- С. 112–117.
13. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. К расчету нерегулярного взаимодействия ударных волн // Журн. прикл. мех. и техн. физики.- 1992.- N 6.- С. 9–14.
14. Белоцерковец И. С., Тимошенко В. И. Взаимодействие ударной волны со струей, истекающей в спутный сверхзвуковой поток с меньшей сверхзвуковой скоростью // Журн. прикл. мех. и техн. физики.- 1993.- N 5.- С. 10–15.
15. Баум, Денисон Расчет взаимодействующего сверхзвукового ламинарного следа методом конечных разностей // Ракет. Техника и космонавтика.- 1966.- Т. 4, N 2.- С. 12–20.
16. Тимошенко В. И. К расчету истечения вязкого газа через сопло Лавала // Косм. исслед. на Украине.- 1976.- Вып.8.- С. 51–55.
17. Rothe D. E. Electron-Beam Studies of Viscous Flow in Supersonic Nozzles // AIAA Journal.- 1971.- V. 9, N 5.- P. 804–811.
18. Васильевский С. А., Тирский Г. А. О некоторых способах численного решения уравнений вязкого ударного слоя. Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. Под ред. Тирского Г.А.- М.: МГУ, 1979.- 87–98 с.
19. Тимошенко В. И., Лиманский А. В. Внешнее обтекание тел вязким газом // Численные методы динамики вязкой жидкости. Под ред Ю.А. Березина / ИТПМ СО АН СССР, Новосибирск, 1983.- С. 288–291.