

УДК 532.5

# ПРИБЛИЖЕННЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИИ ВИНТОВЫХ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ АТМОСФЕРЕ

Н. В. САЛТАНОВ, Ю. В. РЕВЕНКО, Н. С. ЕФРЕМОВА

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев**Получено 20.09.2004*

На основе приближенного подхода введен обобщенный потенциал в теорию винтовых течений в изотермической атмосфере. Задача сведена к решению линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Указано, что переменные в уравнении для обобщенного потенциала разделяются в прямоугольной системе координат, трех цилиндрических (круговой, эллиптической и параболической), а также в сферической и конической системах. В случае аксиальной симметрии записано общее решение уравнения для функции тока через полиномы Лежандра и функции Бесселя. Построены поверхности тока для вихрей первой и второй степени.

На основі наближеного підходу введений узагальнений потенціал у теорію гвинтових потоків в ізотермічній атмосфері. Задача зведена до розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку. Вказано, що змінні в рівнянні для узагальненого потенціалу розподіляються в прямокутній системі координат, трьох циліндричних (круговій, еліптичній і параболическій), а також у сферичній та конічній системах. У випадку аксиальної симетрії записано загальний розв'язок рівняння для функції току через поліноми Лежандра і функції Бесселя. Побудовані поверхні току вихорів першої та другої ступенів.

Generalized potential, based on the approximate approach, is introduced in the theory of helical flow in the isothermic atmosphere. The problem is reduced to the solving of linear uniform differential equation in partial derivatives of the second order. It is shown, that variables in the equation for the generalized potential are separated in the rectangular system of coordinates, three cylindrical (circular, elliptical and parabolic) and also in spherical and conical systems. In cases of axial symmetry equations for the current function the general solution is written down through Legendre polynomials and Bessel function. The current surfaces for the vortexes of the first and second degrees are built.

## ВВЕДЕНИЕ

Класс винтовых течений по степени общности и приложениям является одним из наиболее значительных. Понятие винтового течения введено И. С. Громекой и Крегом [7, 10]. Начало теории винтовых потоков положено И. С. Громекой [10]. Винтовые движения вязкой жидкости впервые рассмотрел В. А. Стеклов [7, 46]. Н. Е. Жуковский [7, 14] понятие винтового движения использовал при создании вихревой теории винта. Математическому обоснованию подхода Жуковского посвящена работа М. В. Келдыша и Ф. И. Франкля [17].

Как известно, Н. Е. Жуковский схематизирует задачу о винте следующим образом: вращающийся винт заменяется круглым диском, по которому равномерно распределены радиальные вихри. Интенсивность задается некоторой функцией расстояния от центра диска. Эта система вихрей обтекается потоком, имеющим на бесконечности скорость, перпендикулярную к нему и по величине совпадающую со скоростью полета. Так как вихри не могут оканчиваться внутри жидкости, присоединенные вихри диска продолжают в потоке в виде свободных вихрей, образуя винтовую струю. Из теории Гельмгольца следует, что свободные вихри

свободного абсолютного потока имеют направление, совпадающее с линиями тока относительного потока (по отношению к вращающемуся винту). Из этого условия и должны быть определены вихри струи. Н. Е. Жуковский дает приближенное решение поставленной задачи, предполагая, что свободные вихри располагаются на цилиндрических поверхностях за диском. В работе [17] ставится задача получения точного решения проблемы винта по схеме Н. Е. Жуковского, не предполагая заранее заданной формы вихревых поверхностей. В этой работе задача о винте приводит к системе интегро-дифференциальных уравнений, которое решается методом последовательных приближений. При этом доказывается их сходимость к точному решению задачи, что показывает действительное существование положения равновесия вихрей, удовлетворяющее схеме Н. Е. Жуковского. Приближенное решение задачи, данное Н. Е. Жуковским, совпадает с одним из первых членов, применяемых в работе [17] цепочки последовательных приближений. О.Ф. Васильевым [7] дано систематическое изложение механики винтовых и циркуляционных потоков. В настоящее время аппарат теории винтовых и циркуляционных потоков широко используется в прикладных задачах гидроаэродинамики, гидравлики, гидравличе-

ских машин и технологических аппаратов, динамики атмосферы и океана и в других областях.

Ряд работ Н. А. Слезкина посвящен применению аппарата винтовых течений к задачам динамики атмосферы [39–44]. Проблема винтового магнитогидродинамического динамо рассматривается в работах В. И. Арнольда и Е. И. Коркиной [2] и А. А. Рузмайкина, Д. Д. Соколова и А. М. Шакурова [27]. Некоторые точные решения, описывающие осесимметричное винтовое движение несжимаемой жидкости, получены А.Б. Айрапетовым и Е. М. Жмулиным [1]. Такого рода решения могут представлять интерес для описания вихрей за гребными винтами, вихревых жгутов, сходящихся с концов крыла, вторичных течений в искривленных каналах, течений в воронках, торнадо и закрученных струях. Геометрические аспекты теории винтовых течений рассмотрены в работе В. В. Дудкина [12]. Численное моделирование винтовых потоков применительно к гидроциклонам, используемым в качестве осветлителей, сгустителей и классификаторов в технологических процессах различных отраслей промышленности, выполнено в работах В. В. Найдено [24], В. В. Дьякова, В. К. Рожневой и А. М. Платонова [13]. Применительно к соплам теория винтовых течений газа развита в работах Г. Г. Черного [51] и А. Н. Афанасенкова, Ю. А. Гостинцева и О. А. Успенского [3]. Обобщение винтовых течений на жидкие и газообразные среды с источниками массы, импульса и энергии получено в работах Н. В. Салтанова [28–30, 32]. Аппарат винтовых течений был применен П. А. Киткиным [18] и Р.В. Озмидовым [26] к описанию ячеистых циркуляционных движений жидкости под поверхностью моря (так называемых циркуляций Ленгмюра). Анализ структуры линий тока, образуемых стационарными трехмерными винтовыми течениями, проводится в работах И. Н. Наумовой и Ю. Д. Шмыглевского [25] и Г.М. Заславского, Р. З. Сагдеева, А. А. Черникова [15]. Отметим, что внимание к структурам в гидродинамических течениях возросло в связи с установлением их роли в процессе возникновения и развития турбулентности. По классификации, принятой в работе [32], выделяют свободные, вынужденные и автоструктуры. Примером свободных гидродинамических структур являются, например, кольцевые вихри в идеальных течениях. В магнитной гидродинамике винтовые течения исследовались В. С. Ткаличем и Е. Ф. Ткалич [49, 50], И. Е. Тараповым [47], С. С. Моисеевым, Р. З. Сагдеевым и В. В. Яновским [22] и другими.

Одна из глав монографии [38] посвящена развитию теории винтовых течений. Получено уравне-

ние для обобщенного векторного потенциала скорости. В том же специальном классе ортогональных координатных систем, что и в случае стоксовых течений, приведено уравнение для обобщенного скалярного потенциала скорости. Рассмотрены установившиеся гироскопические и магнитогидродинамические волны конечной амплитуды. Изучены дисперсионные свойства указанных волн в круговом цилиндрическом слое и круговом цилиндре в неосесимметричном случае. Рассмотрены слабо неоднородные винтовые течения. Получено и исследовано дисперсионное соотношение гироскопических волн конечной амплитуды с учетом влияния на сдвиг частоты параметров, характеризующих переменность коэффициента спиральности. Установлена связь указанных параметров с амплитудами второй, третьей и т. д. гармоник волн.

При наличии сдвиговой симметрии получено нелинейное уравнение для функции тока, описывающее гироскопические волны конечной амплитуды в плоском слое жидкости. В случае постоянного коэффициента спиральности рассмотрены волны конечной амплитуды с учетом сдвига “фоновой” составляющей скорости в выделенном направлении. Показано, что “запирание” рассматриваемых волн наступает при значении градиента “фоновой” составляющей скорости, равной удвоенной гирочастоте. Установлено, что в случае волн, длина которых значительно больше глубины слоя, основное уравнение допускает решения как в виде периодических (кноидальных) волн, так и в виде уединенных волн (солитонов). Отмечено, что кноидальные волны устойчивы относительно продольных возмущений.

Из решений уравнения Громеки–Жуковского выделены широкие классы решений с гамильтоновским описанием линий тока, содержащие известные решения такого рода (Арнольда–Бельтрами–Чилдресса и Заславского–Сагдеева–Черникова) в качестве частных специализаций. Получены решения задач о винтовых структурах в полупространстве, плоском слое, шаровой полости и сферическом слое в случае жидкости постоянной плотности, а также задачи о винтовых структурах в плоском слое жидкости переменной плотности применительно к земной атмосфере.

На основе уравнения для функции тока получено и исследовано дисперсионное уравнение, описывающее установившиеся гравитационные волны конечной амплитуды в плоском слое. При этом учтено влияние на сдвиг частоты параметров, характеризующих как плотностную, так и энергетическую стратификацию жидкости в слое. Проанализирована связь указанных параметров с

амплитудами второй, третьей и т. д. гармоник. Рассмотрен нелинейно-волновой перенос массы. Отмечена аналогия с дисперсионными и амплитудными зависимостями для гироскопических волн.

Цель данной работы – развитие приближенного подхода в теории винтовых и потенциальных течений в изотермической атмосфере.

### 1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений идеального изотермического газа применительно к атмосфере Земли в пренебрежении центробежной силой имеет следующий вид:

$$\nabla w = \vec{V} \times (\text{rot} \vec{V} + 2\omega_* \vec{e}_*), \quad (1)$$

$$\text{div} \rho \vec{V} = 0, \quad (2)$$

$$w = \frac{V^2}{2} + RgT \ln \frac{\rho}{\rho_0} + G, \quad G = G(x_1),$$

$$p = RgT\rho, \quad T = \text{const}, \quad Rg = 287(\text{Дж/кг} \cdot \text{K}), \quad (3)$$

где  $\vec{V}$  – скорость;  $V$  – ее модуль;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\rho_0 = \text{const}$  – плотность атмосферы у Земли;  $T$  – температура;  $Rg$  – газовая постоянная воздуха [20];  $G$  – гравитационный потенциал;  $\omega_*$  – частота вращения Земли;  $\vec{e}_*$  – единичный вектор вдоль оси вращения. Рассмотрение проводится в ортогональной системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Пусть течения однородные винтовые:

$$\text{rot} \vec{V} + 2\omega_* \vec{e}_* = \frac{\beta_0 \rho}{\rho_0} \vec{V}, \quad \beta_0 = \text{const} \neq 0. \quad (4)$$

Здесь  $\beta_0$  – параметр спиральности. Отметим, что уравнение неразрывности (2) является следствием уравнения (4). Действительно, применяя к левой и правой частям соотношения (4) операцию дивергенции, приходим к уравнению (2). С учетом уравнения (4) из уравнения движения (1) следует

$$RgT \ln \frac{\rho}{\rho_0} + G + \frac{V^2}{2} = w_0, \quad w_0 = \text{const}. \quad (5)$$

Решая уравнение (5) относительно плотности, запишем

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{V^2}{2RgT}\right) \exp\left(\frac{w_0 - G}{RgT}\right). \quad (6)$$

Как известно [9], для стандартной атмосферы в ее 70-километровом (по толщине) слое абсолютная температура отличается от ее среднего значения не более, чем на 15 %. Далее примем для температуры  $T$ , входящей в вышеприведенные соотношения, среднее значение температуры стандартной

атмосферы по указанному слою,  $T = T_c = 250^\circ \text{K}$ . Наибольшие скорости, отмеченные в сильных циклонах, не превышают 80-100 (м/с) [4]. Поэтому выполнено неравенство

$$\frac{v^2}{2RgT_c} = \left(\frac{V(\text{m/sec})}{379}\right)^2 \ll 1. \quad (7)$$

Следовательно, в выражении (6) множитель, включающий скорость, весьма мало отличается от единицы. В результате с погрешностью, не превышающей 7 % даже при  $v = 100$  (м/с), запишем

$$\rho = \rho(x_1) = \rho_0 \exp\left[\frac{w_0 - G(x_1)}{RgT_c}\right]. \quad (8)$$

Полагая  $\rho(x_{10}) = \rho_0$ , найдем  $w_0 = G(x_{10})$ . В результате будем иметь

$$\rho = \rho_0 \exp\left[\frac{G_0 - G(x_1)}{RgT_c}\right], \quad G_0 = G(x_{10}), \quad \bar{\rho} \equiv \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (9)$$

С учетом выражения (9) уравнениям (2) и (4) придадим следующий вид:

$$\text{div} \bar{\rho} \vec{V} = 0, \quad \bar{\rho}(x_1) = \exp\left[\frac{G_0 - G(x_1)}{RgT_c}\right], \quad (10)$$

$$\text{rot} \vec{V} + 2\omega_* \vec{e}_* = \beta(x_1) \vec{V}, \quad \beta(x_1) = \beta_0 \bar{\rho}(x_1). \quad (11)$$

Положим

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{V}^H, \quad (12)$$

где  $\vec{V}^H$  – частное решение неоднородного уравнения (11). Подставляя (12) в уравнение (11), приходим к однородному уравнению для определения величины  $\vec{v}$ :

$$\text{rot} \vec{v} = \beta \vec{v}, \quad \beta = \beta(x_1). \quad (13)$$

Дальнейшее рассмотрение проведем в ортогональной системе координат  $x_1, x_2, x_3$ , коэффициенты Ламе которой удовлетворяют условиям [11, 31, 32–38]:

$$h_1 = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2}{h_3} = 0. \quad (14)$$

В работах [31, 35, 38] при изучении однородных винтовых течений жидкости постоянной плотности ( $\beta = \beta_0 = \text{const}$ ) был введен следующий обобщенный потенциал  $S$ :

$$\text{rot} \vec{v} = \beta_0 \vec{v},$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\beta_0^2} \nabla \frac{\partial(qS)}{\partial x_1} + \frac{1}{\beta_0} \text{rot}(qS \vec{e}_1) + qS \vec{e}_1,$$

$$(\Delta^* + \beta_0^2)(qS) = 0, \quad c = \beta^2. \quad (25)$$

$$\Delta^* = \Delta - \kappa_h \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \kappa_h = \frac{\partial(h_2 h_3)}{h_2 h_3 \partial x_1}, \quad q = q(x_1). \quad (15)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\vec{e}_1$  – орт, касательный координатной линии  $x_1$ ;  $q(x_1)$  – заданная функция своего аргумента, выбираемая из соображения удобства. При этом рассмотрение также проводилось в ортогональной системе координат, коэффициенты Ламе которой удовлетворяют условиям (14).

Обобщая представление (15), будем разыскивать решение уравнения (13) в виде

$$\vec{v} = \nabla \left( a\Pi + a_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right) + \text{rot}(b\Pi \vec{e}_1) + c\Pi \vec{e}_1,$$

$$a = a(x_1), \quad a_1 = a_1(x_1), \quad b = b(x_1), \quad c = c(x_1), \quad (16)$$

где  $\Pi$  – обобщенный потенциал; величины  $a$ ,  $a_1$ ,  $b$  и  $c$  – пока произвольные функции своего аргумента. Подставим выражение (16) для величины  $\vec{v}$  в уравнение (13). В результате запишем:

$$\begin{aligned} & \nabla \left[ (b' - \beta a)\Pi + (b - \beta a_1) \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right] + \\ & + \text{rot}[(c - \beta b)\Pi \vec{e}_1] - \\ & - \left[ \Delta^*(b\Pi) - \beta' a_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + (\beta c - \beta' a)\Pi \right] \vec{e}_1 = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь штрих означает дифференцирование соответствующей величины по своему аргументу. Приравнявая в соотношении (17) нулю коэффициенты при  $\Pi$  и  $(\partial \Pi / \partial x_1)$  под знаком градиента, коэффициент при  $\Pi$  под знаком ротора и множитель при  $\vec{e}_1$  в последнем слагаемом, соответственно запишем:

$$b' = \beta a, \quad (18)$$

$$b = \beta a_1, \quad (19)$$

$$c = \beta b, \quad (20)$$

$$\Delta^*(b\Pi) + \beta c\Pi - \beta' \left( a\Pi + a_1 \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \right) = 0. \quad (21)$$

Далее для простоты положим

$$a_1 = 1. \quad (22)$$

Тогда из соотношений (18) – (20) следует

$$b = \beta, \quad (23)$$

$$a = \frac{\beta'}{\beta}, \quad (24)$$

Учтем выражения (22) – (25) в уравнении (21) и введем новый обобщенный потенциал  $S$  следующим образом:

$$q(x_1)S = \beta\Pi. \quad (26)$$

Здесь величина  $q$  играет ту же роль, что и в соотношениях (15). В результате придем к следующему уравнению:

$$\left( \Delta^* + \beta^2 - \frac{\beta'}{\beta} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) (qS) = 0. \quad (27)$$

Учитывая соотношения (22) – (26) в выражении для скорости (16), запишем

$$\vec{v} = \nabla \frac{\partial(qS)}{\beta \partial x_1} + \text{rot}(qS \vec{e}_1) + \beta qS \vec{e}_1. \quad (28)$$

Таким образом, задача решения уравнения (13) в ортогональных координатах (14) сведена к линейному однородному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (27), служащему для определения обобщенного потенциала  $S$ . Если этот обобщенный потенциал найден, то поле скорости определим с помощью выражения (28).

Отметим, что среди приведенных в курсе [23] ортогональных координатных систем, в которых переменные в уравнении (27) разделяются, условиям (14) удовлетворяют прямоугольная система ( $x_1 = z$ ,  $x$  или  $y$ ), три цилиндрических (круговая, эллиптическая и параболическая;  $x_1 = z$ ), а также сферическая и коническая системы ( $x_1 = R$ , где  $R$  – радиус).

В указанных прямоугольных и трех цилиндрических системах координат удобно положить  $q = 1$ . В результате уравнение (27) принимает вид:

$$\left( \Delta + \beta^2 - \frac{\beta'(z)}{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \right) S = 0. \quad (29)$$

Здесь  $\Delta$  – оператор Лапласа. В случае сферической и конической систем координат удобно положить  $q = R$ . В результате уравнение (27) принимает вид:

$$\left[ \Delta + \beta^2 - \frac{\beta'(R)}{\beta} \left( \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R} \right) \right] S = 0. \quad (30)$$

В пренебрежении силой Кориолиса ( $\omega_* = 0$ ) рассмотрим потенциальные течения

$$\vec{v} = \nabla \Phi, \quad w = w_0 = \text{const}. \quad (31)$$

Учитывая выражение (31) в уравнении неразрывности (10), получим следующее уравнение для потенциала  $\Phi$ :

$$\left[ \Delta + \frac{\bar{\rho}'(x_1)}{h_1^2 \bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \Phi = 0. \quad (32)$$

Отметим, что в случае потенциальных течений выполнение условий (14) не обязательно.

Рассмотрение проводилось в предположении, что температура  $T$  атмосферы не зависит от высоты ( $T = \text{const}$ ). Это предположение является приближенным [4, 9, 16, 21]. Отметим, что модели неизотермической атмосферы рассматривались в сравнительно недавней работе [19].

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВИНТОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ДЕКАРТОВЫХ, КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

### 2.1. Декартовы и круговые цилиндрические координаты

Пусть система координат декартова ( $z, x, y$ ) или круговая цилиндрическая ( $z, r, \varphi$ ), причем ось  $x_1 \equiv z$  направлена против вектора силы тяжести. Тогда выражения (9) для плотности и (11) для величины  $\beta$  принимают вид

$$\begin{aligned} \beta(z) &= \beta_0 \bar{\rho}(z), \quad \bar{\rho} = e^{-\alpha_0 z}, \\ \bar{\rho} &\equiv \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \alpha_0 \equiv \frac{g}{RgT_c}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь  $g$  – ускорение силы тяжести. Подставляя выражение (33) для  $\beta$  в уравнение (29), соответственно в декартовой и круговой цилиндрической системах координат запишем:

$$\begin{aligned} \left( \Delta_{\perp} + \alpha_0^2 \bar{\rho}^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\rho}^2} + \beta_0^2 \bar{\rho}^2 \right) S &= 0, \\ \Delta_{\perp} &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \Delta_{\perp} &\equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя выражение (33) для  $\beta$  в соотношение (28) для скорости  $\vec{v}$ , при  $q = 1$ , соответственно в декартовой и круговой цилиндрической системах координат получаем:

$$\vec{v} = \bar{\rho} \left( \beta_0 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\rho}^2} \right) S \vec{e}_z -$$

$$\begin{aligned} - \left( \vec{e}_z \times \nabla_{\perp} + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \nabla_{\perp} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \right) S, \\ \nabla_{\perp} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}, \\ \nabla_{\perp} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_{\varphi} \frac{\partial}{r \partial \varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Приведем частные решения  $V^H$  неоднородного уравнения (11) в случаях декартовой и круговой цилиндрической систем координат. Для единичного вектора  $\vec{e}_*$  примем выражение

$$\vec{e}_* = \cos \Theta_0 \vec{e}_z + \sin \Theta_0 \vec{e}_y, \quad (36)$$

где  $\Theta_0$  – меридиональный угол начала системы отсчета. В результате в декартовых координатах  $z, x, y$  это решение запишется в виде

$$\begin{aligned} V_z^H &= \frac{2\omega_* \cos \Theta_0}{\beta_0 \bar{\rho}}, \\ V_x^H &= \frac{2\omega_* \sin \Theta_0}{\beta_0} \int_1^{\bar{\rho}} \sin \frac{\beta_0}{\alpha_0} (\xi - \bar{\rho}) \frac{d\xi}{\xi^2}, \\ V_y^H &= \frac{2\omega_* \sin \Theta_0}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\bar{\rho}} + \int_1^{\bar{\rho}} \cos \frac{\beta_0}{\alpha_0} (\xi - \bar{\rho}) \frac{d\xi}{\xi^2} \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

В частном решении неоднородного уравнения (11) в круговых цилиндрических координатах ( $z, r, \varphi$ ) выражение для компоненты скорости  $V_z^H$  имеет вид (37). Выражения для компонент скорости  $V_r^H$  и  $V_{\varphi}^H$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} V_r^H &= V_x^H \cos \varphi + V_y^H \sin \varphi, \\ V_{\varphi}^H &= V_x^H \sin \varphi + V_y^H \cos \varphi. \end{aligned} \quad (38)$$

Здесь компоненты скорости  $V_x^H$  и  $V_y^H$  определяются выражениями (37).

Элементарное решение уравнения (34) в декартовых координатах, получаемое методом разделения переменных, имеет вид

$$\begin{aligned} S &= (D_1 \sin \bar{k}_x \bar{x} \sin \bar{k}_y \bar{y} + D_2 \sin \bar{k}_x \bar{x} \cos \bar{k}_y \bar{y} + \\ &+ D_3 \cos \bar{k}_x \bar{x} \sin \bar{k}_y \bar{y} + D_4 \cos \bar{k}_x \bar{x} \cos \bar{k}_y \bar{y}) \times \\ &\times \left[ C_1 \bar{\rho}^{\frac{1}{2}} J_{\sqrt{\frac{1}{4} + \bar{k}^2}}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) + C_2 \bar{\rho}^{\frac{1}{2}} J_{-\sqrt{\frac{1}{4} + \bar{k}^2}}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) \right]; \\ x &= \alpha_0 x; \quad \bar{y} = \alpha_0 y; \quad \bar{k}_x = \frac{k_x}{\alpha_0}, \quad \bar{k}_y = \frac{k_y}{\alpha_0}, \\ \bar{\beta}_0 &= \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \quad \bar{k}_{\perp} = \frac{k_{\perp}}{\alpha_0}, \quad \bar{k}_{\perp}^2 = \bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2. \end{aligned}$$

Здесь и далее  $k_{\perp}^2$  – постоянная разделения;  $D_1, D_2, D_3, D_4, C_1$  и  $C_2$  – постоянные;  $J$  – функция Бесселя. Элементарное решение в круговых цилиндрических координатах таково

$$S = [A_n J_n(k_{\perp} r) + B_n N_n(k_{\perp} \bar{r})] (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \times \\ \times [C_1 \bar{\rho}^{\frac{1}{2}} J_{\sqrt{\frac{1}{4} + k_{\perp}^2}}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) + C_2 \bar{\rho}^{\frac{1}{2}} J_{-\sqrt{\frac{1}{4} + k_{\perp}^2}}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho})]; \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь и далее  $A_n, B_n, a_n, b_n$  – постоянные;  $J$  и  $N$  – функции Бесселя и Неймана.

Аналогичным образом в декартовых и круговых цилиндрических координатах можно получить элементарное решение уравнения (32) для потенциала  $\Phi$ . В частности, в круговых цилиндрических координатах оно имеет вид

$$\Phi = [A_n J_n(k_{\perp} r) + B_n N_n(k_{\perp} \bar{r})] (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \times \\ \times (C_+ \bar{\rho}^{m_+} + C_- \bar{\rho}^{m_-}), \quad m_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + k_{\perp}^2}.$$

Здесь  $C_+$  и  $C_-$  – постоянные.

## 2.2. Сферические координаты

В сферических координатах  $(R, \Theta, \varphi)$  для плотности  $\rho$  справедливо выражение

$$\bar{\rho} = e^{\alpha_0 \left( \frac{R_3^2}{R} - R_3 \right)}. \quad (39)$$

Здесь  $R_3$  – радиус Земли, величина  $\alpha_0$  определяется согласно выражения (33). Принимая естественное допущение  $\epsilon_R \equiv ((R - R_3)/R_3) \ll 1$ , из (11) и (39) приближенно получаем

$$\beta(R) = \beta_0 \bar{\rho}(R), \quad \bar{\rho} = e^{-\alpha_0(R - R_3)}. \quad (40)$$

Учитывая, что толщина атмосферного слоя во много раз меньше радиуса Земли, будем считать выполненным неравенство

$$\mu_R \equiv \left| \frac{f}{R_3 \frac{\partial f}{\partial R}} \right| \ll 1, \quad f = \{V_R, V_{\Theta}, V_{\varphi}, S\}.$$

Используя малость параметра  $\mu_R$ , можем пренебречь соответствующими слагаемыми в уравнении (30). Переходя затем в получившемся уравнении от независимых переменных  $(R, \Theta, \varphi)$  к независимым переменным  $(\bar{\rho}, \Theta, \varphi)$  и используя также малость параметра  $\epsilon_R$ , приходим к следующему уравнению:

$$\left( \alpha_0^2 \bar{\rho}^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{\rho}^2} + \beta_0^2 \bar{\rho}^2 + \frac{1}{R_3^2} \Delta_{\Theta\varphi} \right) S = 0,$$

$$\Delta_{\Theta\varphi} \equiv \frac{\partial}{\partial \Theta^2} + \text{ctg} \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} + \frac{1}{\sin^2 \Theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (41)$$

Подставляя выражение (40) для величины  $\beta$  в соотношение (28), при  $q = R$  с учетом малости параметров  $\epsilon_R$  и  $\mu_R$  получаем

$$\vec{v} = R_3 \bar{\rho} \left( \beta_0 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\rho}^2} \right) S \vec{e}_R - \\ - \left( \vec{e}_R \times \nabla_{\Theta\varphi} + \frac{\alpha_0}{\beta_0} \nabla_{\Theta\varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}} \right) S, \\ \nabla_{\Theta\varphi} = \vec{e}_{\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} + \vec{e}_{\varphi} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (42)$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения (11) в сферических координатах. В предположении азимутальной симметрии ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ) с учетом малости параметров  $\epsilon_R$  и  $\mu_R$  из него следует

$$V_R = \frac{2\omega_* \cos \Theta}{\beta},$$

$$\frac{\partial V_{\varphi}}{\partial R} + \beta V_{\Theta} = -2\omega_* \sin \Theta,$$

$$\frac{\partial V_{\Theta}}{\partial R} - \beta V_{\varphi} = 0. \quad (43)$$

Исключая из третьего уравнения (43) меридиальную компоненту скорости  $V_{\Theta}$  с помощью второго уравнения, получаем следующее уравнение для определения азимутальной компоненты:

$$\frac{\partial^2 V_{\varphi}}{\partial R^2} - \frac{d\beta}{\beta dR} \frac{\partial V_{\varphi}}{\partial R} + \beta^2 V_{\varphi} = \frac{2\omega_* d\beta}{\beta dR} \sin \Theta. \quad (44)$$

Учитывая в уравнении (44) выражение (40) для  $\beta$ , находим

$$\frac{\partial^2 V_{\varphi}}{\partial \bar{\rho}^2} + \bar{\beta}_0^2 V_{\varphi} = -\frac{2\omega_*}{\alpha_0 \bar{\rho}^2} \sin \Theta, \quad \bar{\beta}_0 \equiv \frac{\beta_0}{\alpha_0}. \quad (45)$$

Частное решение неоднородного уравнения (45) разыскиваем в виде

$$V_{\varphi}^H = Q_{\varphi}(\bar{\rho}) \sin \Theta. \quad (46)$$

В результате для функции  $Q_{\varphi}(\bar{\rho})$  запишем уравнение

$$\frac{d^2 Q_{\varphi}(\bar{\rho})}{d\bar{\rho}^2} + \bar{\beta}_0^2 Q_{\varphi} = -\frac{2\omega_*}{\alpha_0 \bar{\rho}^2}. \quad (47)$$

Частное решение неоднородного уравнения (47) имеет вид

$$Q_{\varphi} = \frac{2\omega_*}{\beta_0} \int_1^{\bar{\rho}} \sin \bar{\beta}_0 (\xi - \bar{\rho}) \frac{d\xi}{\xi^2}. \quad (48)$$

В результате на основе соотношений (43), (46) и (48) получаем следующие выражения для компонент скорости в частном решении неоднородного уравнения (11):

$$V_R^H = \frac{2\omega_*}{\beta_0 \bar{\rho}} \cos \Theta,$$

$$V_\Theta^H = -\frac{2\omega_*}{\beta_0} \left[ \frac{1}{\bar{\rho}} + \int_1^{\bar{\rho}} \cos \bar{\beta}_0 (\xi - \bar{\rho}) \frac{d\xi}{\xi^2} \right] \sin \Theta,$$

$$V_\varphi^H = \frac{2\omega_*}{\beta_0} \int_1^{\bar{\rho}} \sin \bar{\beta}_0 (\xi - \bar{\rho}) \frac{d\xi}{\xi^2} \sin \Theta. \quad (49)$$

### 3. ВИНТОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ ПРИ НАЛИЧИИ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

Обратимся к системе уравнений (10) и (11) в сферических координатах  $R, \Theta, \varphi, x_1 = R$ . Полагая ось вращения параллельной оси  $z$ , для вектора  $\vec{e}_*$  запишем

$$\vec{e}_* = \cos \Theta \vec{e}_R - \sin \Theta \vec{e}_\Theta. \quad (50)$$

Полагая наличие осевой симметрии ( $\partial/\partial\varphi = 0$ ), решаем уравнение неразрывности (10):

$$V_R = \frac{1}{R^2 \bar{\rho} \sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta},$$

$$V_\Theta = -\frac{1}{R \bar{\rho} \sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial R}. \quad (51)$$

Здесь  $\psi$  – функция тока. Интегрируя  $R$ - и  $\Theta$ -компоненты уравнения (11), выражаем  $\varphi$ -компоненту скорости через функцию тока:

$$R \sin \Theta V_\varphi = \beta_0 \psi - R^2 \omega_* \sin^2 \Theta. \quad (52)$$

Учитывая в  $\varphi$ -компоненте уравнения (11) выражения (51) и (52), получаем следующее уравнение для функции тока  $\psi$ :

$$\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \bar{\rho}} \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} + \beta_0^2 \bar{\rho} \psi = R^2 \beta_0 \omega_* \bar{\rho} \sin^2 \Theta. \quad (53)$$

Положим во втором слагаемом левой части и в правой части уравнения (53) приближенно  $R = R_3$ . Переходя, далее, от дифференцирования по  $R$  к дифференцированию по  $\bar{\rho}$ , приходим к следующему уравнению:

$$\bar{\rho}^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{\rho}^2} + \frac{1}{\alpha_0^2} \sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial \psi}{\partial \Theta} +$$

$$+ \bar{\beta}_0^2 \bar{\rho}^2 \psi = \frac{R_3^2 \beta_0 \omega_*}{\alpha_0^2} \bar{\rho}^2 \sin^2 \Theta,$$

$$\bar{\alpha}_0 = \alpha_0 R_3. \quad (54)$$

Частное решение неоднородного уравнения (54) разыскиваем в виде

$$\psi^H = A(\bar{\rho}) \sin^2 \Theta. \quad (55)$$

Учитывая выражение (55) в уравнении (54), запишем

$$\bar{\rho}^2 \frac{d^2 A}{d\bar{\rho}^2} - \frac{2}{\alpha_0^2} A + \bar{\beta}_0^2 \bar{\rho}^2 A = \frac{R_3^2 \beta_0 \omega_* \bar{\rho}^2}{\alpha_0^2}. \quad (56)$$

Анализ показал, что вторым слагаемым в левой части уравнения (56) можно пренебречь. В результате для величины  $\psi^H$  получаем следующее выражение:

$$\psi^H = \frac{R_3^2 \omega_*}{\beta_0} \sin^2 \Theta. \quad (57)$$

Соответствующие (57) величины компонент скорости таковы:

$$V_R^H = \frac{2\omega_*}{\beta_0 \bar{\rho}} \cos \Theta, \quad V_\Theta^H = 0, \quad V_\varphi^H = 0. \quad (58)$$

Получим общее решение однородного ( $\omega_* = 0$ ) уравнения (54). Для этого удобно выразить функцию тока  $\psi$  через азимутальную компоненту скорости из (52):

$$\psi = \frac{1}{\beta_0} R_3 \sin \Theta V_\varphi. \quad (59)$$

При этом было приближенно положено  $R = R_3$ . Подставляя выражение (59) в уравнение (54), при  $\omega_* = 0$  будем иметь

$$\bar{\rho}^2 \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \bar{\rho}^2} + \bar{\beta}_0^2 \bar{\rho}^2 V_\varphi + \frac{1}{\alpha_0^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} + \text{ctg} \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} - \frac{1}{\sin^2 \Theta} \right) V_\varphi = 0. \quad (60)$$

Записываем элементарное решение уравнения (60) с помощью метода разделения переменных

$$V_\varphi = Q(\bar{\rho}) Y(\Theta). \quad (61)$$

Подставляя выражение (61) в уравнение (60), для величин  $Q$  и  $Y$  соответственно получаем уравнения

$$\left( \bar{\rho}^2 \frac{d^2}{d\bar{\rho}^2} + \bar{\beta}_0^2 \bar{\rho}^2 - \frac{\gamma}{\alpha_0^2} \right) Q = 0, \quad (62)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\Theta^2} + \text{ctg} \Theta \frac{dY}{d\Theta} - \frac{1}{\sin^2 \Theta} + \gamma \right) Y = 0. \quad (63)$$

Здесь  $\gamma$  – постоянная разделения. Ограниченные и обладающие непрерывными до второго порядка производными решения уравнения (63) существуют лишь при [45, 48]

$$\gamma = n(n + 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (64)$$

Они представляют собой полиномы Лежандра  $n$ -й степени первого порядка:

$$Y = P_n^{(1)}(\cos\Theta) \quad (65)$$

Решения уравнения (62) при выполнении условий (64) выражаются через функции Бесселя:

$$Q_n = \sqrt{\bar{\rho}} \left[ C_n J_{\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) + D_n J_{-\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) \right],$$

$$\nu_n = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4n(n+1)}{\bar{R}_3^2}}, \quad \bar{R}_3 = \alpha_0 R_3 = 872. \quad (66)$$

Таким образом, ограниченное и обладающее непрерывными до второго порядка производными на сфере решение уравнения (60), получаемое методом разделения переменных, запишем в виде

$$V_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\bar{\rho}} [C_n J_{\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) + D_n J_{-\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho})] P_n^{(1)}(\cos\Theta). \quad (67)$$

С учетом соотношений (57), (59) и (67) для функции тока имеем

$$\psi = \frac{R_3 \sin\Theta}{\beta_0} \left\{ \omega_* R_3 \sin\Theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\bar{\rho}} \left[ C_n J_{\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) + D_n J_{-\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) \right] P_n^{(1)}(\cos\Theta) \right\}. \quad (68)$$

В заключение данного параграфа отметим, что ограниченное и обладающее непрерывными до второго порядка производными на сфере решение уравнения (41), получаемое методом разделения переменных, имеет следующий вид:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\bar{\rho}} [c_n J_{\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho}) + d_n J_{-\nu_n}(\bar{\beta}_0 \bar{\rho})] Y_n(\Theta, \varphi),$$

$$Y_n = \sum_{m=0}^n P_n^{(m)}(\cos\Theta) (A_n^m \cos m\varphi + B_n^m \sin m\varphi).$$

Здесь  $Y_n$  – сферические функции; величины  $\nu_n$  определяются согласно соотношений (66).

#### 4. ПОВЕРХНОСТИ ТОКА ВИХРЕЙ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В пренебрежении эффектом вращения ( $\omega_* = 0$ ) рассмотрим первое ( $n = 1$ ) слагаемое в соотношении (68). Согласно (66), имеем  $\nu_1 = 0,5000026$ . Таким образом, с большой точностью можно положить  $\nu_1 = (1/2)$ . В результате, переобозначая постоянные  $C_1$  и  $D_1$ , запишем

$$\psi = (C_1 \sin \bar{\beta}_0 \bar{\rho} + D_1 \cos \bar{\beta}_0 \bar{\rho}) \sin^2 \Theta. \quad (69)$$

Соответственно для компонент скорости имеем

$$V_R = \frac{2}{R_3^2 \bar{\rho}} (C_1 \sin \bar{\beta}_0 \bar{\rho} + D_1 \cos \bar{\beta}_0 \bar{\rho}) \cos \Theta,$$

$$V_\Theta = \frac{\beta_0}{R_3} (C_1 \cos \bar{\beta}_0 \bar{\rho} + D_1 \sin \bar{\beta}_0 \bar{\rho}) \sin \Theta,$$

$$V_\varphi = \frac{\beta_0}{R_3} (C_1 \sin \bar{\beta}_0 \bar{\rho} + D_1 \cos \bar{\beta}_0 \bar{\rho}) \sin \Theta. \quad (70)$$

Пусть имеют место условия

$$\bar{\rho} = 1, \quad \bar{\rho}_1 (\bar{\rho}_1 < 1), \quad V_R = 0. \quad (71)$$

Здесь при  $\bar{\rho} = \bar{\rho}_1$  принято условие “твердой крышки”, как это иногда делается в динамике атмосферы. Подставляя выражение (70) для  $V_R$  в условия (71), имеем

$$C_1 \sin \bar{\beta}_0 + D_1 \cos \bar{\beta}_0 = 0,$$

$$C_1 \sin \bar{\beta}_0 \bar{\rho}_1 + D_1 \cos \bar{\beta}_0 \bar{\rho}_1 = 0. \quad (72)$$

Условие нетривиальной разрешимости системы уравнений (72) имеет вид

$$\sin \bar{\beta}_0 (1 - \bar{\rho}_1) = 0. \quad (73)$$

Его решение таково:

$$\bar{\beta}_0 = \frac{k\pi}{1 - \bar{\rho}_1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (74)$$

Решая первое уравнение (72) относительно  $D_1$ , исключаем затем коэффициент  $D_1$  из выражения (69). В результате получаем

$$\bar{\psi} = \sin \left( k\pi \frac{1 - \bar{\rho}}{1 - \bar{\rho}_1} \right) \sin^2 \Theta, \quad \bar{\psi} \equiv -\frac{\cos \bar{\beta}_0}{C_1} \psi. \quad (75)$$

При  $\bar{\psi} = \text{const}$  соотношение (75) определяет поверхности тока  $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\Theta)$  в вихре первой степени. Для  $k = 1$  и высоты “твердой крышки”  $H_{кр} = 70$  км ( $\bar{\rho}_1 = 0.000069$ ) эти поверхности представлены на рис. 1.

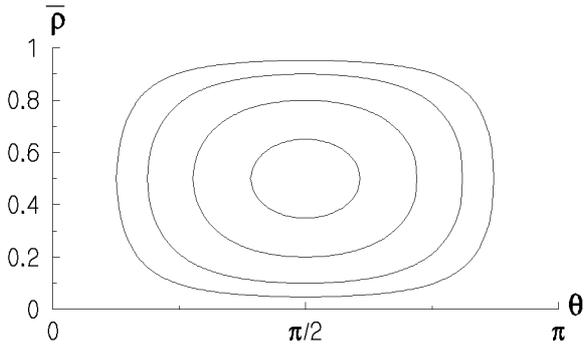


Рис. 1. Поверхности тока в вихре первой степени

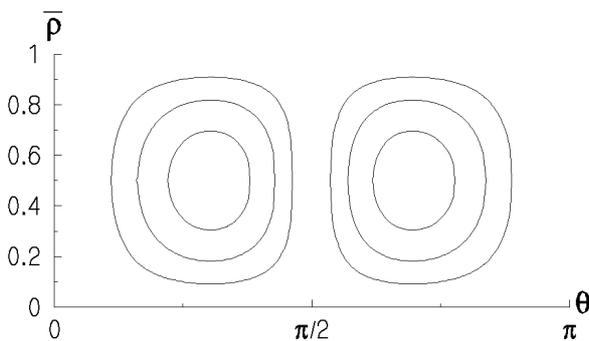


Рис. 2. Поверхности тока в вихре второй степени

Рассматривая при  $\omega_* = 0$  второе ( $n = 2$ ) слагаемое в соотношении (68), для функции тока вихря второй степени аналогично случаю вихря первой степени получаем

$$\bar{\psi} = \sin\left(k\pi \frac{1-\bar{\rho}}{1-\bar{\rho}_1}\right) \sin\Theta \sin 2\Theta, \quad k = 1, 2, \dots \quad (76)$$

Соответствующие поверхности тока при  $k = 1$  и  $H_{кр} = 70$  км представлены на рис. 2. Как видно из рис. 1 и 2, вихрь первой степени содержит одну циркуляционную зону, вихрь второй степени – две. Можно показать, что вихрь третьей ( $n = 3$ ) степени содержит три циркуляционные зоны и т. д.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

С использованием приближенного подхода введен обобщенный потенциал в теорию винтовых течений в изотермической атмосфере. При этом отмечена аналогия с обобщенным потенциалом,

введенным ранее одним из авторов в теории винтовых течений однородной жидкости. Задача сведена к решению линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Указано, что переменные в уравнении для обобщенного потенциала разделяются в прямоугольной системе координат, трех цилиндрических (круговой, эллиптической и параболической), а также в сферической и конической системах. Это весьма существенно с точки зрения получения решений уравнения для обобщенного потенциала. В сферических координатах в случае аксиальной симметрии на основе метода разделения переменных записано общее решение уравнения для функции тока через полиномы Лежандра и функции Бесселя. Построены поверхности тока для вихрей первой и второй степени. При этом вихрь первой степени содержит одну циркуляционную зону, вихрь второй степени – две зоны. Аналогично вихрь  $n$ -й степени содержит  $n$  циркуляционных зон.

1. Айрапетов А. Б., Жмулин Е. М. О винтовом осесимметричном движении несжимаемой вязкой жидкости // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, N 1. – С. 64–69.
2. Арнольд В. И., Коркина Е. И. Рост магнитного поля в трехмерном стационарном потоке несжимаемой жидкости // Вест. Моск. ун-та. – 1983. – N 3. – С. 43–46.
3. Афанасенков А. Н., Гостинцев Ю. А., Успенский О. А. Квазиодномерная теория для винтового потока // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1977. – N 5. – С. 186–192.
4. Байбаков С. М., Мартынов А. И. С орбиты спутника – в глаз тайфуна. – М.: Наука, 1986. – 176 с.
5. Больцман Л. Избранные труды. – М.: Наука, 1984. – 644 с.
6. Бруязцкий Е. В. Теория атмосферной диффузии радиоактивных выбросов. – Киев: Институт гидромеханики НАН Украины, 2000. – 444 с.
7. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. – М: Госэнергоиздат, 1958. – 144 с.
8. Вашкевич О. В., Галонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. Рождение уединенных автоструктур при термоконвекции в слое с неоднородным подогревом // Докл. АН СССР. – 1987. – 293, N 3. – С. 563–567.
9. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. – М.: Мир, 1986. – 400 с.
10. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 76–148 с.
11. Дебай П. Избранные труды. – Л.: Наука, 1987. – 560 с.
12. Дудкин В. В. Кинематический анализ однородных винтовых потоков в  $R^3$  // Задачи и методы механики сплошных сред. – 1985. – N 1. – С. 92–102.

13. Дьяков В. В., Рожнева В. К., Платонов А. М. Теоретические и экспериментальные исследования течения газа в циклоне // Изв. вузов. Горн. журнал. – 1981. – N 3. – С. 41–46.
14. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта // Избр. соч.: в 2 т. // М.–Л.–Гостехиздат. – 1948. – Т. 2. – С. 190–355.
15. Заславский П. М., Сагдеев Р. З., Черников А. А. Стохастичность линий тока в стационарных течениях // Журнал эксперим. и теорет. физики. – 1988. – 94, вып. 2. – С. 102–115.
16. Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. – М.: ИЛ, 1955. – 440 с.
17. Келдыш М. В., Франкль Ф. И. Строгое обоснование винта Жуковского // Келдыш М. В. Избранные труды. Механика. – М.: Наука, 1985. – 43–75 с.
18. Киткин П. А. Поперечная циркуляция в ветровом течении и глубина перемешивания в устойчиво стратифицированном море // Тр. океанограф. ин-та. – 1949. – Вып. 11. – С. 37–42.
19. Козлов В. В. Неэкспоненциальная атмосфера и неканонические распределения вероятностей // ДАН (Россия). – 2001. – 380, N 1. – С. 346–346.
20. Кухлинг Х. Справочник по физике. – М.: Мир, 1982. – 520 с.
21. Кшевецкий С. П. Моделирование распространения внутренних гравитационных волн в газе. – ЖВММФ: 2001, 41, N 2. – 295–310 с.
22. Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Яновский В. В. Об интегралах вращенности и лагранжевых инвариантах в гидродинамических моделях // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1988. – 94, вып. 2. – С. 144–153.
23. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – Т. 2. – 896 с.
24. Найденко В. В. Применение математических методов и ЭВМ для оптимизации и управления процессами разделения суспензий в гидроциклонах. – Горький: Волго-Вят. кн. изд-во, 1976. – 288 с.
25. Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. О линиях тока одного винтового течения // Журн. вычисл. математики и мат. физ. – 1985. – 25, N 2. – С. 312–313.
26. Озмидов Р. В. О полосах схождения и поперечных циркуляциях в ветровых течениях в море // Тр. Ин-та океанологии. – 1960. – 39. – С. 135–143.
27. Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М. Течение Куэтта–Пуазейля как винтовое динамо // Магнит. гидродинамика. – 1989. – N 1. – С. 9–14.
28. Салтанов Н. В. Обобщение вариационных моделей газодинамики и динамики стратифицированной жидкости в стационарном случае с использованием функции тока. – Киев: ДЕП в УкрНИИИ-ТИ 15.11.79, N 1767, 1979. – 94 с.
29. Салтанов Н. В. Аналитическая механика сплошной среды с источниками. – М.: ВИНТИ, 1982. – 354 с.
30. Салтанов Н. В. Аналитическая гидромеханика. – Киев: Наук. думка, 1984. – 200 с.
31. Салтанов Н. В. Обобщенный потенциал в теории однородных винтовых потоков несжимаемой жидкости // ДАН СССР. – 1989. – 305, N 6. – С. 1325–1327.
32. Салтанов Н. В. Аналитическая и прикладная гидромеханика при наличии источников // Прикладная гидромеханика. – Киев: Наук. думка. – 1989. – С. 145–168.
33. Салтанов Н. В. Новые представления общего решения системы уравнений Стокса // ДАН СССР. – 1990. – 312, N 1. – С. 76–80.
34. Салтанов Н. В. Обобщенный гидродинамический потенциал и его аналоги в теории упругости // Прикладная гидромеханика. – 1990. – 26, N 4. – С. 97–101.
35. Салтанов Н. В. Аналоги обобщенных гидродинамических потенциалов в теории уравнений Ламе и Максвелла // Укр. математический журнал. – 1990. – 42, N 5. – С. 649–654.
36. Салтанов Н. В. К представлениям общих решений уравнения Ламе и векторного волнового уравнения. – Прикл. механика: 1990, 26, N 7. – 108–111 с.
37. Салтанов Н. В. Обобщенные потенциалы в магнитной гидродинамике и динамике вращающейся жидкости // Прикладная гидромеханика. – 2000. – 2(74). N 4. – С. 82–98.
38. Салтанов Н. В., Горбань В. А. Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения. – Киев: Наук. думка, 1993. – 244 с.
39. Слезкин Н. А. Вихревая теория выветривания влаги из почвы. – VI Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механики. Ташкент, 24–30 сент., 1986: Аннот. докл. – Ташкент, 1986. – 571 с.
40. Слезкин Н. А. О движении вихревого кольцевого цилиндра // Мех. совр. проблемы. – М. – 1987. – С. 34–40.
41. Слезкин Н. А. Гидродинамические модели тайфуна, вихревого отсоса воды и вихревого возмущения дунами // Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана. – 1987. – 23, N 12. – С. 1285–1296.
42. Слезкин Н. А. Обобщение задачи Чаплыгина о цилиндрическом вихре // Докл. АН СССР. – 1988. – 299, N 1. – С. 67–70.
43. Слезкин Н. А. Обтекание сферы, заполненной идеальной жидкостью, совершающей винтовое движение // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1989. – N 1. – С. 79–84.
44. Слезкин Н. А. Гидродинамическая модель тайфуна с учетом вращения Земли // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1990. – 26, N 5. – С. 493–501.
45. Справочник по специальным функциям / Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
46. Стеклов В. А. Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости // Сообщ. Харьк. Мат. общества. Сер. 2. – 1896. – 2, N 3/4. – С. 101–128.
47. Тарапов И. Е. Об одном новом интеграле вихревых стационарных движений магнитной гидродинамики // Магнит. гидродинамика. – 1988. – N 2. – С. 3–7.
48. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
49. Ткалич В. С. Стационарные с циклической координатой задачи анизотропно проводящих жидкостей. Обтекание тел. Волноводы // Современные вопросы гидродинамики. – Киев: Наук. думка. – 1967. – С. 66–87.
50. Ткалич В. С., Ткалич Е. Ф. Винтовые движения в многокомпонентной магнитной гидродинамике // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1960. – N 5. – С. 184–186.
51. Черный Г. Г. Закрученные течения с сжимаемого газа в каналах // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. – 1956. – N 6. – С. 55–62.