

Оценка прочности слоистых эпоксикарбоволоконитов, армированных однонаправленными волокнами

Н. К. Кучер, М. Н. Заразовский

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Исследуются закономерности упругого деформирования слоистых эпоксикарбоволоконитов, армированных однонаправленными волокнами. Изучается влияние понижения температуры эксплуатации до 77 К на их деформирование и прочность. Исходя из механических характеристик волокна и матрицы проанализирована эффективность прогнозирования параметров жесткости, податливости и несущей способности слоистых композиций, упрочненных однонаправленными углеродными волокнами.

Ключевые слова: композиционные материалы, слоистые эпоксикарбоволокониты, эффективные характеристики жесткости и податливости, прочность, низкие температуры.

Введение. Требования повышения несущей способности конструкций, их надежности и срока службы, а также уменьшения веса и материалоемкости оборудования обуславливают необходимость разработки новых композиционных материалов и более широкое использование существующих. Значительное место среди композиционных материалов занимают карбоволокониты – композиты, армированные углеродными волокнами (карбо-волоконитами). Причинами, ограничивающими их применение в инженерной практике, являются отсутствие надежных экспериментальных методик для определения механических характеристик армированных композиций, трудности математического моделирования процессов деформирования и оценки несущей способности упрочненных конструкций, а также потребность в новых, более экономичных технологиях изготовления.

Механические свойства композиционных материалов определяются свойствами компонентов, структурой композиций, характером взаимодействия на границах раздела матрица–волокно и технологией изготовления. Многие механические параметры композиций могут быть рассчитаны по известным свойствам компонентов. Однако из-за большой чувствительности некоторых параметров, например прочности, к действию многих факторов, не поддающихся полному учету, применение строгих математических решений не всегда возможно.

Закономерностям деформирования и разрушения слоистых волоконитовых композиций посвящены многочисленные работы [1–8]. Наиболее разработанным разделом механики гетерогенных сред, по-видимому, является раздел по определению эффективных характеристик композиционных материалов. При этом, выражая механические параметры композита через характеристики отдельных компонент, открываются широкие возможности для проектирования материалов с заданными свойствами. Главное преимущество волоконитовых слоистых композитов – возможность придания материалу

такой анизотропии, которая будет оптимальной для каждого частного случая его применения.

В большинстве случаев процессы деформирования в гетерогенных средах исследовались при комнатной и повышенных температурах. Использование таких материалов при низких или криогенных температурах, например, в криогенной или космической технике требует более детального изучения процессов деформирования и разрушения в условиях глубокого охлаждения.

Цель настоящей работы заключалась в исследовании несущей способности слоистых эпоксикарбоволоконитов, армированных однонаправленными волокнами, при статическом нагружении в условиях комнатной и криогенных (до 77 К) температур и анализе возможностей прогнозирования их прочности, исходя из структуры объемного содержания и механических свойств волокна и матрицы.

В качестве объекта исследований выбран слоистый эпоксикарбоволоконит с симметричной схемой армирования $[0_2/90/0_2/\pm 45/(0_2/90)_2/\pm 45/\bar{0}]_s$. Можно считать, что данный композит относится к классу ортотропных материалов [2, 7]. Механическое поведение таких материалов и эффективность прогнозирования их параметров жесткости и податливости описаны ранее [9, 10]. Из [9, 10] следует, что понижение температуры эксплуатации до 77 К не оказывает существенного влияния на упругое деформирование слоистых эпоксикарбоволоконитов, армированных однонаправленными волокнами. Усредненные характеристики жесткости и податливости композиций могут быть достаточно эффективно описаны в рамках теории упругости неоднородных тел, исходя из параметров упругости волокна и матрицы.

Методики и результаты испытаний. Полагаем, что исследуемая структура является гомогенной средой, для описания деформирования которой можно воспользоваться соотношениями линейной теории упругости анизотропного тела. Для экспериментального определения характеристик прочности слоистого пакета воспользуемся декартовой системой координат с обычными декартовыми обозначениями. Будем считать, что ее оси 1, 2, 3 совпадают с осями упругой симметрии тела, а плоскость 102 совмещается со срединной плоскостью армирования композита.

Предположим, что эпоксикарбоволоконит находится в условиях плоского напряженного состояния. Тогда его прочность будет определяться следующими осредненными величинами: $\langle \tilde{\sigma}_{+1} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{-1} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{+2} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{-2} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{12} \rangle$, где $\langle \tilde{\sigma}_{+1} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{-1} \rangle$ – значения разрушающих напряжений композита при растяжении и сжатии в направлении 01; $\langle \tilde{\sigma}_{12} \rangle$ – прочность при сдвиге в плоскости армирования. Остальные обозначения аналогичны.

Для определения эффективных параметров прочности проводили испытания на растяжение, сжатие и несимметричный изгиб [11–13]. В частности, для определения характеристик $\langle \tilde{\sigma}_{+1} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{-1} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{+2} \rangle$, $\langle \tilde{\sigma}_{-2} \rangle$ из пластины композита вырезали плоские образцы в направлениях 0 и 90°. Требования к их форме, размерам, способам закрепления и нагружения при проведении испытаний на растяжение регламентировались ГОСТ 25601-80, на сжатие –

ГОСТ 25602-80. Для более точного определения параметров прочности с учетом возможного разброса экспериментальных данных испытания проводили для пяти образцов при исследовании каждого вида разрушения. Полученные значения затем усредняли.

Параметр $\langle \tilde{\sigma}_{12} \rangle$ вычисляли при обработке результатов испытаний на несимметричный изгиб [7, 11].

Для оценки влияния понижения температуры эксплуатации на несущую способность эпоксикарбоволоконитов проводили аналогичные испытания при 77 К. При этом образцы помещали в криостат, в который затем заливали жидкий азот. Особенности испытаний в среде жидкого азота изложены в [14].

Выполненные эксперименты позволили определить следующие параметры разрушения эпоксикарбоволоконита при комнатной ($T = 293$ К) и криогенной ($T = 77$ К) температурах:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}_{+1}^{293} \rangle &= 320 \text{ МПа}; \quad \langle \tilde{\sigma}_{-1}^{293} \rangle = 380 \text{ МПа}; \quad \langle \tilde{\sigma}_{+2}^{293} \rangle = 176 \text{ МПа}; \quad \langle \tilde{\sigma}_{-2}^{293} \rangle = 180 \text{ МПа}; \\ \langle \tilde{\sigma}_{12}^{293} \rangle &= 84 \text{ МПа}; \\ \langle \tilde{\sigma}_{+1}^{77} \rangle &= 301 \text{ МПа}; \quad \langle \tilde{\sigma}_{-1}^{77} \rangle = 367 \text{ МПа}; \quad \langle \tilde{\sigma}_{+2}^{77} \rangle = 142 \text{ МПа}; \quad \langle \tilde{\sigma}_{-2}^{77} \rangle = 169 \text{ МПа}; \\ \langle \tilde{\sigma}_{12}^{77} \rangle &= 78 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Как видно из представленных соотношений, понижение температуры испытаний до 77 К приводит к уменьшению прочности эпоксикарбоволоконитов на 4...19%. Кроме того, необходимо отметить, что охлаждение материала до такой температуры оказывает упрочняющее воздействие на его последующее деформирование при комнатной температуре. При последующем термоциклировании прочностные свойства не изменяются, что экспериментально наблюдалось авторами также при испытаниях эпоксидных боропластиков.

Выборочные исследования механического поведения данного материала при $T = 183$ К свидетельствуют о монотонном изменении характеристик прочности при понижении температуры испытаний до 77 К. В этом случае в качестве хладагента использовали спирт, охлажденный азотом.

Для определения несущей способности монослоев, упрочненных однонаправленными волокнами, проводили также испытания на растяжение и сжатие образцов в направлении армирования и в перпендикулярном (трансверсальном) направлении. Испытания проводили при комнатной температуре на образцах с таким же объемным содержанием волокон ($c = 0,55$) и при аналогичной их упаковке, как и для исследуемого композита.

Предположим, что ось 01 декартовой системы координат совпадает с направлением волокон. Тогда результаты испытаний на прочность образцов с одним направлением армирования можно представить так: $\tilde{\sigma}_{+1}^l = 860$ МПа; $\tilde{\sigma}_{-1}^l = 780$ МПа; $\tilde{\sigma}_{+2}^l = 30$ МПа; $\tilde{\sigma}_{-2}^l = 60$ МПа, где $\tilde{\sigma}_{+1}^l$ – усредненная величина разрушающих напряжений при действии растягивающих усилий в направлении волокон; верхний индекс l (layer-слой) обозначает, что данный

параметр является характеристикой монослоя. К сожалению, авторам не удалось определить прочность монослоя при сдвиге ввиду ограниченного объема исследуемого композита.

Механические свойства компонентов композиции. В качестве связующего (матрицы) слоистого эпоксикарбо волокна использовали блок – сополимер эпокситрифенольной и анилиноформальдегидной смол. Предполагали, что полимер является упругой и изотропной средой со следующими механическими характеристиками: модуль Юнга $E_m = 3,5$ ГПа; модуль сдвига $G_m = 1,325$ ГПа и коэффициент Пуассона $\nu_m = 0,32$. Прочностные свойства матрицы при растяжении, сжатии и сдвиге соответственно равны [1]: $\tilde{\sigma}_{+1}^m = 62$ МПа; $\tilde{\sigma}_{-1}^m = 136$ МПа; $\tilde{\sigma}_{12}^m = 34$ МПа.

Углепластик армирован вязким карбо волокном. Механические свойства волокна значительно зависят от технологии его изготовления. Существенный разброс значений модуля упругости и величины прочности, а также коэффициенты вариации этих параметров у однотипных волокон свидетельствуют о неоднородности их структуры и наличии различных дефектов в строении. Наиболее важные факторы, определяющие свойства волокон, – степень ориентации структурных элементов относительно оси волокна и термообработка [1]. Согласно паспортным данным модуль упругости углеродного волокна, используемого при производстве исследуемого композита, $E_f = 250$ ГПа, его прочность определяется соотношением $\tilde{\sigma}_f = 1,55$ ГПа. Полагаем, что волокно является упругим изотропным материалом. Кроме того, примем $\nu_f = 0,3$. Тогда $G_f = 96,15$ ГПа.

Оценка прочности монослоя углепластика при плоском напряженном состоянии. Рассмотрим деформирование монослоя, состоящего из системы параллельных волокон, которые равномерно распределены в матрице. Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ось 01 совпала с направлением волокон, а плоскость 102 совмещалась со срединной плоскостью монослоя.

Для вычисления распределения напряжений в слоистых композициях необходимо располагать усредненными характеристиками упругости и жесткости монослоя. Как следует из [9], для данного материала можно ограничиться предположением о равенствах параметров упругости при растяжении и сжатии. Тогда расчетные значения параметров упругости определяются соотношениями [9]: $\bar{E}_1^l = 138,0$ ГПа, $\bar{E}_2^l = 7,65$ ГПа, $\bar{G}_{12}^l = 11,54$ ГПа, $\bar{\nu}_{12}^l = 0,31$, $\bar{\nu}_{21}^l = 0,0172$, где \bar{E}_1^l , \bar{E}_2^l , \bar{G}_{12}^l – усредненные модули продольной упругости и сдвига монослоя; $\bar{\nu}_{12}^l$, $\bar{\nu}_{21}^l$ – коэффициенты Пуассона; в обозначении $\bar{\nu}_{ij}^l$ принято, что нижний индекс i относится к направлению приложения нагрузки, j – к направлению, вызванной этой нагрузкой, поперечной деформации. При расчетах параметров упругости использовалось предположение о существовании упругого потенциала.

Проанализируем возможности прогнозирования несущей способности монослоя, армированного однонаправленными волокнами, исходя из прочностных параметров его компонентов для частных видов нагружения, когда монослой находится в условиях плоского напряженного состояния.

При действии нагрузки в направлении волокон монослоя согласно правилу смесей прочность слоя определяется прочностью волокон, и разрушающее напряжение вычисляется по соотношению [3]

$$\tilde{\sigma}_{+1}^l = \tilde{\sigma}_f \left[c + (1-c) \frac{E_m}{E_f} \right], \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}_f$ – усредненная прочность одного волокна или его пучка при растяжении; c – объемное содержание волокон в композите.

Прочность монослоя при растяжении и сжатии в перпендикулярном направлении к направлению армирования согласно подходу сопротивления материалов определяется выражениями

$$\tilde{\sigma}_{+2}^l = \tilde{\sigma}_{+1}^m / k_{+2}, \quad \tilde{\sigma}_{-2}^l = \tilde{\sigma}_{-1}^m / k_{-2}, \quad k_{+2} = k_{-2} = \frac{1-c \left[1 - \frac{E_m}{E_f} \right]}{1 - \sqrt{\frac{4c}{\pi}} \left[1 - \frac{E_m}{E_f} \right]}, \quad (2)$$

где $\tilde{\sigma}_{+1}^m$, $\tilde{\sigma}_{-1}^m$ – пределы прочности матрицы при растяжении и сжатии; k_{+2} , k_{-2} – максимальные коэффициенты концентрации напряжений для этих видов нагружения.

Аналогично для определения прочности монослоя при внутрислойном сдвиге имеет место выражение

$$\tilde{\sigma}_{12}^l = \tilde{\sigma}_{12}^m \bar{G}_{12}^l / (G_m k_{12}), \quad k_{12} = \frac{1-c \left[1 - \frac{G_m}{G_f} \right]}{1 - \sqrt{\frac{4c}{\pi}} \left[1 - \frac{G_m}{G_f} \right]}, \quad (3)$$

где $\tilde{\sigma}_{12}^m$ – предельное сдвиговое напряжение материала матрицы; \bar{G}_{12}^l – эффективный модуль сдвига монослоя [10]; k_{12} – коэффициент концентрации напряжений при сдвиге.

Коэффициенты концентрации напряжений при растяжении, сжатии и сдвиге представляют собой отношения максимальных напряжений, действующих в сечении композита, к средним напряжениям, которые отнесены ко всему сечению.

Подставляя в соотношения (1)–(3) механические характеристики волокна и матрицы, вычисляем коэффициенты концентрации напряжений: $k_{+2} = 2,6167$; $k_{12} = 2,6189$ и расчетные значения разрушающих напряжений монослоя: $\tilde{\sigma}_{+1}^l = 862$ МПа; $\tilde{\sigma}_{+2}^l = 24$ МПа; $\tilde{\sigma}_{-2}^l = 52$ МПа; $\tilde{\sigma}_{12}^l = 113$ МПа.

Как отмечалось в [1, 3], при использовании более точных методов решения краевых задач теории упругости, например метода конечных эле-

ментов, можно получить значения коэффициентов концентрации деформаций, которые в 1,5–2,0 раза меньше вычисленных по формулам (2), (3).

Разрушение однонаправленных композиционных материалов при продольном сжатии происходит либо от исчерпания прочности армирующих волокон или матрицы, либо вследствие местной потери устойчивости армирующих волокон. Потеря устойчивости волокон сопровождается разрушением связи по поверхности раздела волокно–матрица. Поэтому с увеличением диаметра волокна и его модуля упругости повышается прочность композита при сжатии.

Для оценки прочности композита предложено несколько моделей, например Дау, Хаяси [15] и Розена [16]. Согласно методике Розена, возможны две формы потери устойчивости волокон: симметричная и несимметричная:

$$\tilde{\sigma}_{-1}^l = 2c \sqrt{\frac{cE_f E_m}{3(1-c)}} \quad \text{или} \quad \tilde{\sigma}_{-1}^l = \frac{G_m}{1-c}. \quad (4)$$

Применительно к данному случаю получим $\tilde{\sigma}_{-1}^l = 2944$ МПа. Следовательно, применение этих подходов к расчету исследуемой композиции приводит к значительно завышенным значениям прочности при сжатии, такая же ситуация наблюдается и при использовании методик Дау и Хаяси.

Таким образом, соотношение (1) позволяет достаточно эффективно вычислить разрушающие напряжения монослоя только в направлении армирования. Остальные параметры могут рассматриваться в качестве первого приближения. Наибольшее расхождение между расчетными и экспериментальными данными имеет место при определении прочности однонаправленного композита в результате действия продольных сжимающих нагрузок.

Для уточнения расчетных разрушающих напряжений в соотношения (2)–(4) вводятся различные поправочные коэффициенты, которые учитывают диаметр волокна, его эффективную длину, наличие пор в композите, химическую обработку волокон, технологию изготовления и т.д. [3]. Такие параметры определяются при обработке результатов испытаний на растяжение, сжатие и внутрислойный сдвиг. Их применимость ограничивается только классом исследуемых материалов.

При отсутствии соответствующих экспериментальных данных представления (2)–(4) могут быть уточнены в результате использования зависимостей разрушающих напряжений [1] от упругих характеристик компонент, степени ориентации волокон в композите, активирующей обработки их поверхности, комплексного показателя устойчивости волокон, пористости материала, а также от параметров прочности волокна и матрицы. Весьма полезными являются соотношения, которые связывают прочность однонаправленных композитов при различных видах нагружения [1]. Например, соотношения, связывающие прочность при поперечном сжатии $\tilde{\sigma}_{-2}^l$ с прочностью при межслойном сдвиге $\tilde{\sigma}_{13}^l$ или с прочностью сцепления матрицы с волокном по межфазной границе. На основании линейной зависимости между $\tilde{\sigma}_{12}^l$ и $\tilde{\sigma}_{-2}^l$ для эпоксикарбоволоконитов [1] примем $\tilde{\sigma}_{12}^l = 65$ МПа.

Дальнейший прогресс в прогнозировании разрушающих напряжений композитов связывают с уточнением механических свойств компонентов и привлечением численных методов решения краевых задач теории упругости гетерогенных сред, а также с подходами математической статистики экстремальных значений [3, 4, 17].

Расчет напряженно-деформированного состояния слоистых композиций. Методы исследования деформационных свойств слоистых композиционных материалов достаточно полно приведены в [2, 4–6]. Наибольшее распространение среди них получили классическая и уточненная теории слоистых пластин и оболочек [2, 18], а также теория упругости неоднородных тел [4].

Для представления определяющих соотношений последней воспользуемся линейными зависимостями между компонентами тензоров напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij} анизотропного тела в матричном виде:

$$\sigma_i = \lambda_{ij} \varepsilon_j, \quad \varepsilon_i = A_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{11}; \quad \sigma_2 = \sigma_{22}; \quad \sigma_3 = \sigma_{33}; \quad \sigma_4 = \sigma_{23}; \quad \sigma_5 = \sigma_{13}; \quad \sigma_6 = \sigma_{12}; \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_{11}; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}; \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{23}; \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_{13}; \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_{12}; \end{aligned} \quad (6)$$

λ_{ij}, A_{ij} – элементы симметричных матриц жесткости и податливости, которые связаны соотношением $[\lambda][A] = [E]$ ($[E]$ – единичная матрица). По повторяющимся индексам в (5) и далее по тексту предполагается суммирование.

Для расчета напряженно-деформированного состояния слоистых структур, слои которых повернуты относительно друг друга на различные углы, необходимо знать определяющие деформационные свойства монослоев в повернутой системе координат. Исходя из гипотезы континуума, каждый монослой можно считать ортотропным материалом, который обладает тремя плоскостями упругих свойств симметрии. Матрица жесткости ортотропного тела в главных осях ортотропии имеет 12 ненулевых элементов (из них девять независимы). При повороте системы координат вокруг оси, перпендикулярной к плоскости армирования, на угол θ таких компонент будет уже 20. Столько же компонент в матрице жесткости имеет среда с одной плоскостью симметрии упругих свойств.

Предположим, что ось 03 декартовой системы координат перпендикулярна к единственной плоскости симметрии материала. Для такой среды матрица жесткости $[\lambda]$ характеризуется 13 независимыми константами:

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & 0 & 0 & \lambda_{16} \\ & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & \lambda_{26} \\ & & \lambda_{33} & 0 & 0 & \lambda_{36} \\ & & & \lambda_{44} & \lambda_{45} & 0 \\ & & & & \lambda_{55} & 0 \\ & & & & & \lambda_{66} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

При повороте системы координат вокруг оси 03 на угол θ компоненты тензора четвертого ранга λ_{ij} определяются следующими формулами преобразования [4, 6]:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda'_{11} &= m^4 \lambda_{11} + 2m^2 n^2 (\lambda_{12} + 2\lambda_{66}) + 4mn(m^2 \lambda_{16} + n^2 \lambda_{26}) + n^4 \lambda_{22}; \\ \lambda'_{12} &= m^2 n^2 (\lambda_{11} + \lambda_{22} - 4\lambda_{66}) - 2mn(m^2 - n^2)(\lambda_{16} - \lambda_{26}) + \\ &\quad + (m^2 + n^2)\lambda_{12}; \\ \lambda'_{13} &= m^2 \lambda_{13} + n^2 \lambda_{23} + 2mn\lambda_{36}; \\ \lambda'_{16} &= m^2(m^2 - 3n^2)\lambda_{16} - mn[m^2 \lambda_{11} - n^2 \lambda_{22} - (m^2 - n^2)(\lambda_{12} + 2\lambda_{66})] + \\ &\quad + n^2(3m^2 - n^2)\lambda_{26}; \\ \lambda'_{22} &= n^4 \lambda_{11} + 2m^2 n^2 (\lambda_{12} + 2\lambda_{66}) - 4mn(m^2 \lambda_{26} + n^2 \lambda_{16}) + m^4 \lambda_{22}; \\ \lambda'_{23} &= n^2 \lambda_{13} + m^2 \lambda_{23} - 2mn\lambda_{36}; \\ \lambda'_{26} &= m^2(m^2 - 3n^2)\lambda_{26} - mn[n^2 \lambda_{11} - m^2 \lambda_{22} + (m^2 - n^2)(\lambda_{12} + 2\lambda_{66})] + \\ &\quad + n^2(3m^2 - n^2)\lambda_{16}; \\ \lambda'_{33} &= \lambda_{33}; \\ \lambda'_{36} &= (m^2 - n^2)\lambda_{36} + mn(\lambda_{23} - \lambda_{13}); \\ \lambda'_{44} &= m^2 \lambda_{44} - 2mn\lambda_{45} + n^2 \lambda_{55}; \\ \lambda'_{45} &= (m^2 - n^2)\lambda_{45} + n^2 \lambda_{55}; \\ \lambda'_{55} &= m^2 \lambda_{55} + 2mn\lambda_{45} + n^2 \lambda_{44}; \\ \lambda'_{66} &= m^2 n^2 (\lambda_{11} + \lambda_{22} - 2\lambda_{12}) + 2mn(m^2 - n^2)(\lambda_{22} - \lambda_{16}) + \\ &\quad + (m^2 - n^2)\lambda_{66}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где $m = \cos(\theta)$; $n = \sin(\theta)$; θ – угол поворота; λ'_{ij} – компоненты матрицы жесткости в “новой” системе координат.

Зависимости между усредненными деформациями $\langle \varepsilon_i \rangle$ и усредненными напряжениями $\langle \sigma_i \rangle$ описываются соотношениями

$$\langle \sigma_i \rangle = \bar{\lambda}_{ij} \langle \varepsilon_j \rangle, \quad \langle \varepsilon_i \rangle = \bar{A}_{ij} \langle \sigma_j \rangle, \quad (9)$$

где $[\bar{\lambda}]$, $[\bar{A}]$ – матрицы усредненных жесткостей и податливостей слоистой среды, которые связаны соотношением $[\bar{\lambda}][\bar{A}] = [E]$.

Отличительная особенность соотношений (9) от классических уравнений состояния теории упругости, которые связывают напряжения и деформации в бесконечно малом материальном элементе, состоит в том, что они определяют геометрические изменения в композите в зависимости от действующих усилий и моментов, отнесенных к единице длины. При таком

подходе композит рассматривается как однородная среда с некоторыми усложненными свойствами.

Усредненные характеристики жесткости и податливости слоистых материалов выводятся исходя из известных механических параметров слоев на основе уравнений теории упругости неоднородных тел, удовлетворяя при этом всем внешним краевым условиям и условиям непрерывности на поверхностях раздела. Тогда для композита, образованного слоями с одной плоскостью упругой симметрии, имеем [3]

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\lambda}_{11} &= \langle \lambda_{11} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \bar{\lambda}_{12} &= \langle \lambda_{12} \rangle + \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{13} \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \bar{\lambda}_{13} &= \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \\ \bar{\lambda}_{22} &= \langle \lambda_{22} \rangle + \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{23}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \bar{\lambda}_{23} &= \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \quad \bar{\lambda}_{33} = \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1}; \\ \bar{\lambda}_{66} &= \langle \lambda_{66} \rangle + \langle \lambda_{36} \lambda_{33}^{-1} \rangle^2 \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} - \langle \lambda_{36}^2 \lambda_{33}^{-1} \rangle; \\ \bar{\lambda}_{44} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2}; \quad \bar{\lambda}_{55} = \frac{\lambda_3}{\lambda_2^2 - \lambda_1 \lambda_2}; \\ \lambda_1 &= \left\langle \frac{\lambda_{44}}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{44} \lambda_{55}} \right\rangle; \quad \lambda_2 = \left\langle \frac{\lambda_{45}}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{44} \lambda_{55}} \right\rangle; \quad \lambda_3 = \left\langle \frac{\lambda_{55}}{\lambda_{45}^2 - \lambda_{44} \lambda_{55}} \right\rangle, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

где λ_{ij} – параметры жесткости k -го слоя относительно системы координат, которая повернута вокруг оси 03 на соответствующий угол. Компоненты $\bar{\lambda}_{16}$, $\bar{\lambda}_{26}$, $\bar{\lambda}_{36}$, $\bar{\lambda}_{45}$ равны нулю для симметричной схемы укладки монослоев.

Применительно к нашей структуре углепластика запишем

$$\langle \lambda_{ij} \rangle = [17\lambda_{ij}^0 + 6\lambda_{ij}^{90} + 4\lambda_{ij}^{45} + 4\lambda_{ij}^{-45}] \Delta h / H, \quad (11)$$

где λ_{ij}^{90} – параметры жесткости монослоя относительно локальной системы координат, которая повернута на угол $\theta = 90^\circ$; Δh – толщина монослоя; H – общая толщина пакета.

Ненулевые элементы матрицы жесткости ортотропного тела относительно главных осей ортотропии связаны с техническими постоянными упругости с помощью известных соотношений [2]:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_{11} &= (1 - \nu_{23} \nu_{32}) DE_1; & \lambda_{22} &= (1 - \nu_{31} \nu_{13}) DE_2; \\ \lambda_{33} &= (1 - \nu_{12} \nu_{21}) DE_3; & \lambda_{12} &= (\nu_{21} + \nu_{23} \nu_{31}) DE_1; \\ \lambda_{13} &= (\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}) DE_1; & \lambda_{23} &= (\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}) DE_2; \end{aligned} \right. \quad (12a)$$

$$\begin{cases} \lambda_{44} = G_{23}; & \lambda_{55} = G_{13}; & \lambda_{66} = G_{12}; \\ D = [1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}]^{-1}, \end{cases} \quad (126)$$

где $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}$ – эффективные модули продольной упругости и сдвига; ν_{ij} – коэффициенты Пуассона монослоя. Заметим, что для удобства дальнейшего изложения верхний индекс l и черточку над выражениями опускаем.

Для исследуемого ортотропного монослоя примем

$$E_3 = E_2; \quad G_{13} = G_{23} = G_{12}; \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu_{12}. \quad (13)$$

На основе полученных эффективных характеристик монослоя с помощью соотношений (8), (10)–(13) определим элементы матриц $[\bar{\lambda}]$ и $[\bar{A}]$. Переходя затем к техническим параметрам упругости, вычисляем усредненные характеристики всего пакета:

$$\begin{aligned} \bar{E}_1^p &= 85,92 \text{ ГПа}; & \bar{G}_{12}^p &= 11,36 \text{ ГПа}; & \bar{\nu}_{12}^p &= 0,259; & \bar{\nu}_{21}^p &= 0,122; \\ \bar{E}_2^p &= 40,52 \text{ ГПа}; & \bar{G}_{13}^p &= 2,90 \text{ ГПа}; & \bar{\nu}_{13}^p &= 0,288; & \bar{\nu}_{31}^p &= 0,028; \\ \bar{E}_3^p &= 8,27 \text{ ГПа}; & \bar{G}_{23}^p &= 2,90 \text{ ГПа}; & \bar{\nu}_{23}^p &= 0,299; & \bar{\nu}_{32}^p &= 0,061. \end{aligned}$$

Сравнение вычисленных значений параметров упругости с результатами опытов [9] свидетельствует о хорошей корреляции расчетных и экспериментальных данных, за исключением параметра G_{23} . Причина такого несоответствия связана с известными трудностями моделирования модуля сдвига G_{23} в рамках трансверсально-изотропной модели [6].

После определения эффективных характеристик жесткости слоистого композита можно вычислить локальные напряжения в каждом слое.

В качестве примера рассмотрим распределение напряжений в углепластике с симметричной схемой армирования слоев, который подвергается одноосному растяжению (рис. 1):

$$\langle \sigma_1 \rangle = \sigma_0; \quad \langle \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_3 \rangle = \dots = \langle \sigma_6 \rangle = 0. \quad (14)$$

При подстановке средних напряжений во второе соотношение (9) получим

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \bar{A}_{11}\sigma_0; \quad \langle \varepsilon_2 \rangle = \bar{A}_{21}\sigma_0; \quad \langle \varepsilon_3 \rangle = \bar{A}_{31}\sigma_0. \quad (15)$$

Остальные компоненты средних деформаций равны нулю.

Значения локальных нормальных напряжений в слоях определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= [\lambda_{11} + \lambda_{13}\lambda_{33}^{-1}(\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13}\lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13})] \langle \varepsilon_1 \rangle + \\ &+ [\lambda_{12} + \lambda_{13}\lambda_{33}^{-1}(\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23}\lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23})] \langle \varepsilon_2 \rangle + \lambda_{13}\lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_3 \rangle; \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\sigma_2 = [\lambda_{12} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} (\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{13} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{13})] \langle \varepsilon_1 \rangle +$$

$$+ [\lambda_{22} + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} (\langle \lambda_{33}^{-1} \rangle^{-1} \langle \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \rangle - \lambda_{23})] \langle \varepsilon_2 \rangle + \lambda_{23} \lambda_{33}^{-1} \langle \lambda_{33}^{-1} \rangle \langle \varepsilon_3 \rangle, \quad (16б)$$

где σ_1 , σ_2 – напряжения в k -м слое относительно глобальной системы координат, которая совпадает с осями ортотропии композита ($\sigma_1 = \sigma_x^{(k)}$, $\sigma_2 = \sigma_y^{(k)}$). Выражения для определения напряжений σ_{12} приведены в [4]. Остальные компоненты тензора напряжений для данного вида нагружения равны нулю.

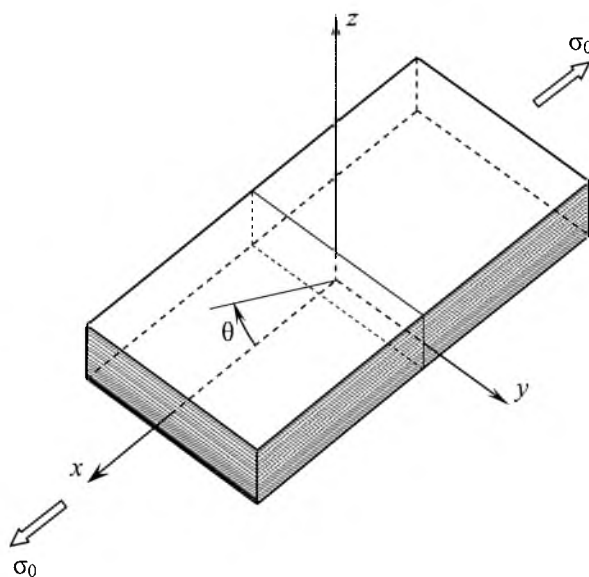


Рис. 1. Геометрия слоистого тела и расположение глобальной системы координат.

Результаты расчетов распределения локальных нормальных напряжений в исследуемом слоистом углепластике приведены на рис. 2.

Как видно из рис. 2, при действии растягивающих усилий в композите возникают как положительные, так и отрицательные нормальные напряжения. Максимальной напряженностью характеризуются слои, армирования которых совпадает с направлением действующих усилий.

Аналогично легко вычислить распределение напряжений в слоях при действии распределенной нагрузки в направлении оси y или при чистом сдвиге в плоскости армирования. Распределение безразмерных напряжений при чистом сдвиге в слоях композита показано на рис. 3. Максимальные напряжения возникают в слоях, которые армированы в направлениях $\pm 45^\circ$. Напряжения в других слоях (с углами укладки волокон 0 и 90°) являются одинаковыми и значительно меньшими по величине.

Вычисленные с помощью соответствующего критерия прочности анизотропных сред распределения напряжений можно использовать для расчета прочности рассматриваемого конструктивного элемента.

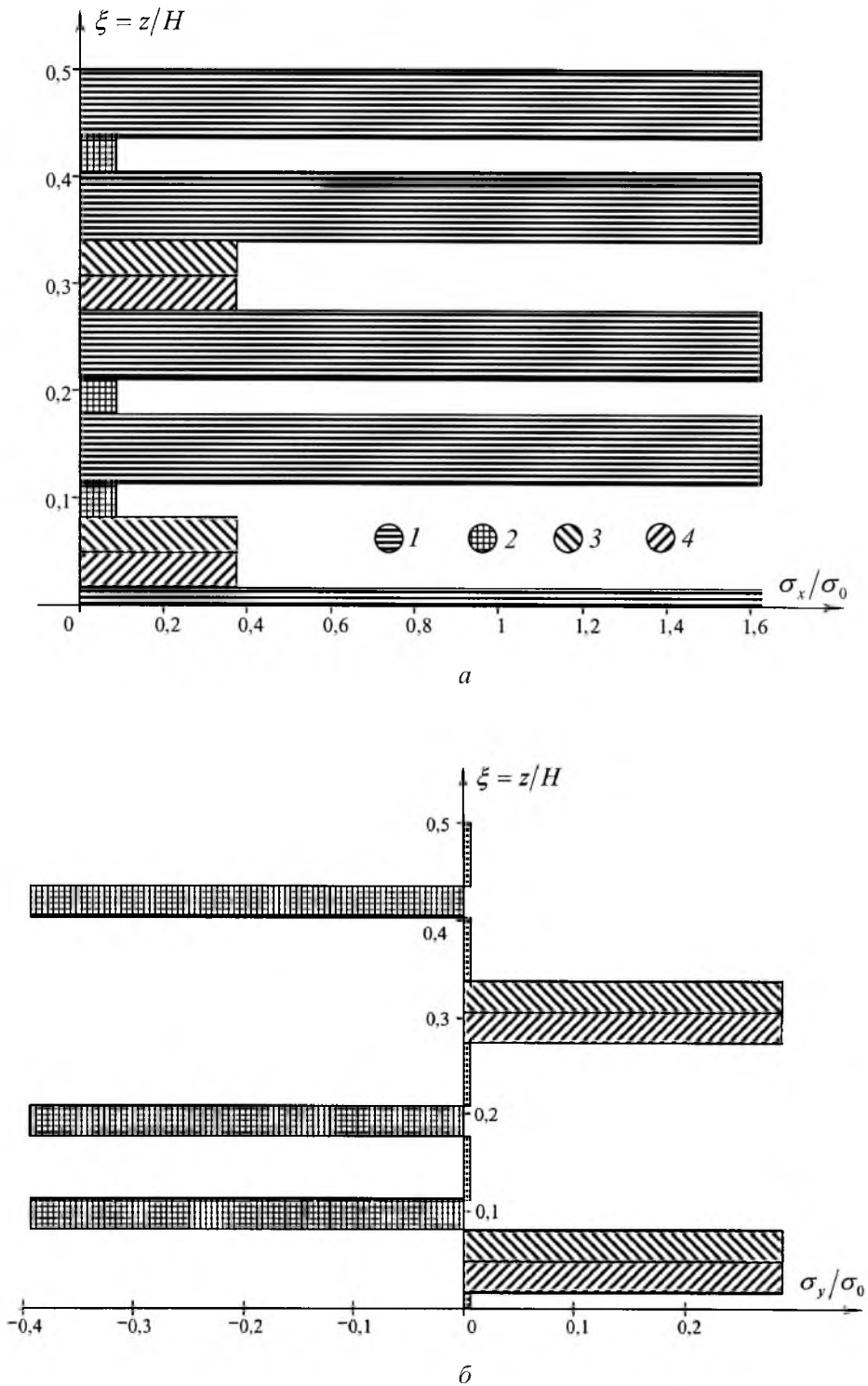


Рис. 2. Распределение безразмерных напряжений σ_x/σ_0 (а) и σ_y/σ_0 (б) в симметричном слоистом композите при действии распределенной нагрузки σ_0 в направлении оси x . (Здесь и на рис. 3: 1, 2, 3, 4 – слои, армированные волокнами в направлениях $\theta = 0, 90, 45$ и -45°)

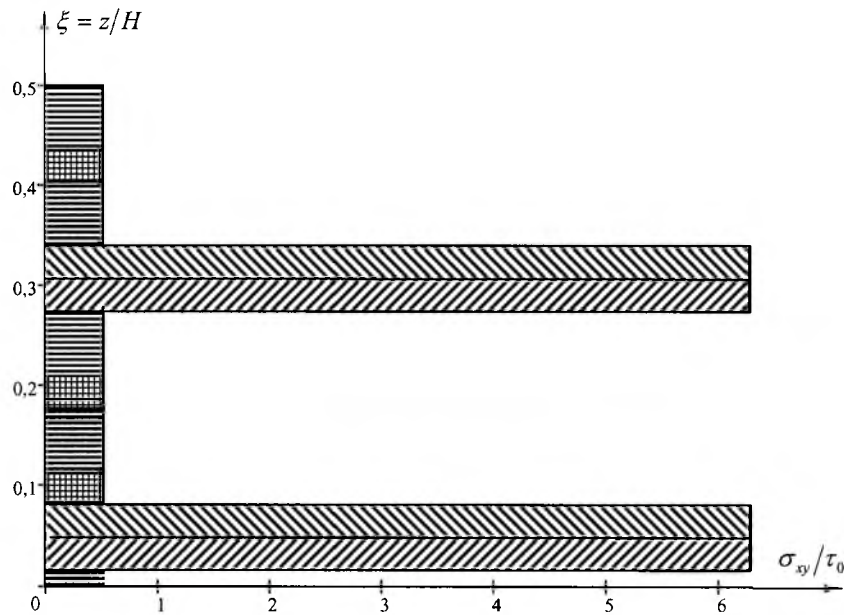


Рис. 3. Послойное распределение сдвиговых напряжений σ_{xy}/τ_0 при чистом сдвиге в плоскости армирования.

Оценка прочности слоистых эпоксикарбофибров. В изотропных материалах прочность не зависит от пространственных координат и определяется только напряженным состоянием. В анизотропных материалах прочность зависит как от величины компонент тензора напряжений, так и от угла между главными направлениями тензоров напряжения и прочности. Следовательно, прочность изотропного материала является скалярной величиной, анизотропного – тензорной. Чтобы сопоставлять прочность при простом и сложном напряженном состоянии, необходимо с помощью математических методов анализа напряженного состояния преобразовать тензорные параметры свойств материала в характеристики критерия разрушения.

Обзор различных критериев разрушения анизотропных материалов, их преимущества в отношении принятых ограничений и возможности описания процессов разрушения различных материалов наиболее полно изложены в работах [2, 3, 6, 18–23]. В инженерной практике при оценке прочности композитных систем широкое распространение получили тензорно-полиномиальные формы критерия разрушения [2, 3, 7]:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j + F_{ijk} \sigma_i \sigma_j \sigma_k + \dots = 1, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, 6, \quad (17)$$

где F_i , F_{ij} , F_{ijk} , ... – матричные обозначения тензоров поверхности прочности второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов. Скалярная форма представления (17) автоматически обеспечивает условие инвариантности тензорного соотношения, которое справедливо в любых системах отсчета и может быть записано путем соответствующего перехода от любой заданной системы координат. Большинство известных полиномиальных критериев прочности являются частными случаями соотношений (17).

Если ограничиться линейными и квадратичными слагаемыми, то критерий (17) при плоском напряженном состоянии применительно к ортотропному телу в главных осях ортотропии принимает вид

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{66}\sigma_6^2 = 1, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_{+1}^l} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_{-1}^l}; & F_2 &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_{+2}^l} - \frac{1}{\tilde{\sigma}_{-2}^l}; \\ F_{11} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_{+1}^l} \frac{1}{\tilde{\sigma}_{-1}^l}; & F_{22} &= \frac{1}{\tilde{\sigma}_{+2}^l} \frac{1}{\tilde{\sigma}_{-2}^l}; & F_{66} &= \frac{1}{(\tilde{\sigma}_{12}^l)^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Пренебрегая взаимным влиянием нормальных напряжений на прочность композита и полагая $F_{12} = -F_{11}$, выражение (18) сводится к известному критерию Хоффмана [8]. Отметим, что этот критерий учитывает различную прочность материала при растяжении и сжатии в направлениях главных осей и позволяет в единой форме описать процессы разрушения во всех четырех квадрантах пространства напряжений $\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle$.

Большинство существующих методов построения предельных поверхностей основаны на представлении слоистого композита в виде составного анизотропного материала, и для их определения используют свойства и критерий слоя, а также теорию слоистых сред, позволяющую осуществить переход от усредненных напряжений и деформаций к локальным напряжениям и деформациям в любом слое.

Разрушение слоистых композиций в большинстве случаев начинается с разрушения одного из слоев или связей между ними. Часто такие процессы не вызывают заметных изменений в макроскопическом механическом поведении композитов [3, 16, 22], их практически трудно определить на диаграмме деформирования. Разрушение слоев, ориентированных перпендикулярно направлению нагружения, наиболее заметно проявляется в скачкообразном изменении коэффициента Пуассона, что существенно изменяет реакцию материала на последующие процессы деформирования. Поэтому вышеизложенный подход позволяет определить условия разрушения отдельных слоев, что не менее важно, чем оценка предельных напряжений всей композиции.

Отметим, что в настоящее время разрабатываются также подходы, позволяющие определить прочность не отдельных слоев, а слоистого композита в целом, например критерии Пуппо–Эвенсена или Ву–Шойблейна [3, 21] и др. Недостатком этих критериев являются сложность получения исходной информации и необходимость проведения дополнительных и трудоемких экспериментов.

Полную трехмерную предельную поверхность в соответствии с критерием Хоффмана можно построить, рассчитав все возможные комбинации $\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_{xy} \rangle$, приводящие к разрушению наиболее слабого звена композита. Как правило, такие поверхности строятся в виде кривых для различных уровней $\langle \sigma_{xy} \rangle$.

Для построения предельной поверхности разрушения первого слоя (в зарубежной литературе этот термин известен как “first ply failure”) рассмотрим последовательность задач о распределении напряжений в слоистом композите при одновременном действии нормальных напряжений $\langle \sigma_x \rangle = k_1 \sigma_0$ и $\langle \sigma_y \rangle = k_2 \sigma_0$, где $k_1 = 0; \pm 0,25; \pm 0,5; \pm 1$; $k_2 = 0; \pm 0,25; \pm 0,5; \pm 1$. В частности, при $k_1 = 1, k_2 = 0$ имеем задачу о распределении напряжений в слоях данного композита при действии растягивающей нагрузки в направлении оси x (рис. 1). Распределения безразмерных напряжений $\sigma_x/\sigma_0, \sigma_y/\sigma_0$ для такого вида нагружения представлены на рис. 2.

Напомним, что эти напряжения согласно представлению (16) определены относительно глобальной системы координат $x_{г\text{л}}z_{г\text{л}}$. Переход от глобальной системы координат к локальной, совпадающей с главными осями слоя, осуществляется с помощью преобразований

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где $m = \cos(\theta)$; $n = \sin(\theta)$; θ – угол поворота системы координат вокруг оси z .

Подставляя вычисленные значения безразмерных напряжений $\sigma_1/\sigma_0, \sigma_2/\sigma_0$ в критерий (18), определяем значения σ_0 , при которых происходит потеря несущей способности слоев с углом армирования $\theta = 90^\circ$. Такая методика позволяет найти первые две точки предельной поверхности разрушения первого слоя пространства $\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle$ при $\langle \sigma_{xy} \rangle = 0$. Аналогично, рассматривая другие случаи нагружения, определяем значения σ_0 для остальных 18 точек искомой предельной поверхности. Результаты численных расчетов представлены на рис. 4. Для получения аналогичных кривых в других сечениях предельной поверхности разрушения необходимо проанализировать распределение локальных напряжений при действии как нормальных $\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle$, так и касательных $\langle \sigma_{xy} \rangle$ напряжений.

Как видно из рис. 4, согласно критерию Хоффмана, предельные напряжения уменьшаются во всех четырех квадрантах пространства $\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle$ по мере повышения сдвиговых напряжений $\langle \sigma_{xy} \rangle$. Кроме того, расчетные разрушающие напряжения первого слоя достаточно удовлетворительно коррелируют с предельными разрушающими напряжениями всего пакета, которые определены экспериментально.

Исследование экспериментальной диаграммы деформирования $\langle \sigma_x \rangle - \langle \varepsilon_x \rangle$ показало, что она состоит из трех линейных участков. Первая точка перелома приблизительно соответствует разрушению слоев с направлением армирования $\theta = 90^\circ$, вторая – $\theta = 45^\circ$. По достижении предельной поверхности первого слоя на образцах в слоях с ориентацией 90° появляются трещины, расположенные параллельно волокнам данного слоя, и наблюдается скачкообразное изменение коэффициентов Пуассона.

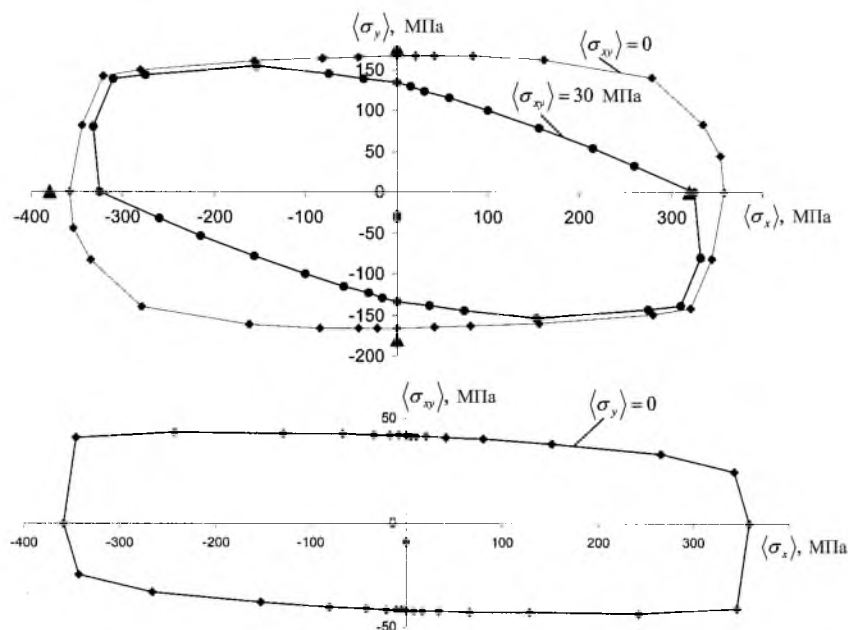


Рис. 4. Предельные кривые, соответствующие точке первого разрушения слоя (◆, ●), и экспериментально определенные разрушающие напряжения (▲) слоистого эпоксикарбо-волокнита.

Разрушение одного или нескольких слоев с одинаковым направлением армирования еще не означает потерю несущей способности композита в целом [3, 4, 16]. Если при каком-то значении нагрузки происходит разрушение одного слоя, то необходимо проанализировать механическое поведение пакета без учета данного слоя. В этом случае изменятся средние напряжения и произойдет их перераспределение между слоями. Однако точная доля нагрузки, которую разрушенный слой продолжает воспринимать или передает другим слоям, до настоящего времени не установлена.

Выводы

1. Понижение температуры эксплуатации до 77 К не оказывает существенного влияния на закономерности упругого деформирования эпоксидных слоистых углепластиков, армированных однонаправленными карбо волокнами. Характеристики жесткости и податливости таких композиций могут быть рассчитаны в рамках линейной теории упругости неоднородных тел на основании их структуры и параметров упругости волокна и матрицы. Более точные результаты по прогнозированию процессов деформирования в слоистых средах, армированных высокопрочными волокнами, должны основываться на экспериментальных данных, полученных при испытаниях соответствующих образцов.

2. Экспериментально определенные характеристики упругости и прочности монослоев, находящиеся в условиях плоского напряженного состояния, могут быть использованы в инженерной практике для расчета деформирования и прочности структур с произвольными схемами укладки слоистых пакетов.

3. Оценка прочности монослоев в рамках теории сопротивления материалов исходя из прочности компонентов композита позволяет достаточно надежно рассчитать прочность в направлении ориентации волокон, остальные компоненты тензора прочности могут рассматриваться в качестве первого приближения. Наибольшее расхождение между расчетными и экспериментальными данными имеет место при определении прочности однонаправленного композита в результате действия продольных сжимающих нагрузок.

4. Анализ деформирования слоистых структур показал, что по достижении деформациями предельных значений в наиболее слабых слоях начинают появляться трещины. Начало таких процессов можно предсказать в рамках теории слоистых сред на основе механических характеристик слоя и критерия слоя.

5. При $T = 77$ К прочность слоистых эпоксикарбоволоконитов уменьшается приблизительно на 4...19%.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность ст. науч. сотр., канд. техн. наук М. П. Земцову за помощь в организации и проведении экспериментальных исследований.

Резюме

Досліджуються закономірності пружного деформування шаруватих епоксикарбоволоконитів, що армовані односпрямованими волокнами. Розглядається вплив зниження температури експлуатації до 77 К на їх деформування і міцність. На основі механічних характеристик волокна і матриці аналізується ефективність прогнозування параметрів жорсткості, піддатливості та несучої здатності шаруватих композицій, що зміцнені односпрямованими вуглецевими волокнами.

1. Гуняев Г. М. Структура и свойства полимерных волокнистых композитов. – М.: Химия, 1981. – 232 с.
2. Композиционные материалы. В 8 т. Т. 2. Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендечки. – М.: Мир, 1978. – 564 с.
3. Композиционные материалы. В 8 т. Т. 5. Разрушение и усталость / Под ред. Л. Браутмана. – М.: Мир, 1978. – 486 с.
4. Механика композитов. В 12 т. Т. 3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов / Под ред. Л. П. Хорошуна. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с.
5. Ванин Г. А. Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 272 с.
6. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / Пер. с англ. под ред. Ю. М. Тарнопольского. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
7. Композиционные материалы. Справочник / Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
8. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка. – 592 с.

9. Gotes T. S., Whitley K. S., Grenoble R. W., and Bandorawalla T. Thermal mechanical durability of polymer-matrix composites in cryogenic environments // AIAA. – 2003. – P. 7408 – 7420.
10. Кучер Н. К., Земцов М. П., Заразовский М. Н. Деформирование слоистых эпоксидных композитов, армированных прямыми высокопрочными волокнами или тканью сатинового переплетения // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 41 – 58.
11. Тарнопольский Ю. М., Кинцис Т. Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. – М.: Химия, 1981. – 272 с.
12. Скудра А. М., Булавс Ф. Я. Структурная теория армированных пластиков. – Рига: Зинатне, 1978. – 192 с.
13. Стрижало В. А., Земцов М. П. Жесткость и прочность слоистых углепластиков при одноосном нагружении // Пробл. прочности. – 2001. – № 6. – С. 61 – 71.
14. Кучер Н. К., Двейрин А. З., Заразовский М. Н., Земцов М. П. Деформирование слоистых стеклопластиков, армированных тканью сатинового переплетения при комнатной и низких температурах // Механика композитных материалов. – 2004. – 40, № 3. – С. 341 – 354.
15. Фудзии Т., Дзако М. Механика композиционных материалов / Пер. с англ. под ред. В. И. Бурлаева. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
16. Разрушение. В 7 т. / Под ред. Г. Либовица. Т. 7. Разрушение неметаллов и композитных материалов. Ч. 1. Неорганические материалы. – М.: Мир, 1976. – 634 с.
17. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
18. Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Гигиняк Ф. Ф., Ламашевский В. П. Механические свойства материалов при сложном напряженном состоянии / Под общ. ред. А. А. Лебедева. – Киев: Издательский дом “Ин Юре”, 2003. – 540 с.
19. Победра Б. Е. Критерий прочности анизотропного материала // Прикл. математика и механика. – 1988. – 52, № 1. – С. 141 – 144.
20. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
21. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
22. Роуландс Р. Течение и потеря несущей способности композитов в условиях двухосного напряженного состояния: сопоставление расчета и экспериментальных данных // Новое в зарубежной науке. Сер. Механика. Неупругие свойства композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – Т. 16. – С. 140 – 179.
23. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.

Поступила 14. 06. 2005