УДК 620.178.5:620.179

Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщение 3. Сквозные и поверхностные полуэллиптические трещины

В. В. Матвеев, О. Е. Богинич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассматриваются результаты аналитического определения вибродиагностических параметров, характеризующих наличие плоских сквозных и поверхностных полуэллиптических центральных трещин нормального отрыва в прямоугольной однородной пластине постоянной толщины при разных условиях закрепления и формах колебаний. Показано, что в случае сквозной трещины наиболее чувствительной вибродиагностической характеристикой повреждения пластины является изменение величины логарифмического декремента колебаний, а при наличии поверхностной трещины – относительная величина второй гармоники колебательного процесса при супергармоническом резонансе.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, усталостное повреждение, трещина нормального отрыва, вибродиагностические параметры повреждения, собственная частота колебаний, декремент колебаний, супергармонический резонанс.

Введение. Ранее [1] с использованием полученных для прямоугольной пластины общих исходных зависимостей [2] были найдены аналитические выражения для определения относительной энергетической характеристики и ряда вибродиагностических параметров ее усталостного повреждения типа плоских поверхностных трещин постоянной глубины.

В настоящем сообщении с использованием аналогичных подходов [2] рассматриваются результаты расчета вибродиагностических параметров повреждения типа центральных сквозной и поверхностной полуэллиптической трещин нормального отрыва по данным предварительно определяемой относительной энергетической характеристики повреждения пластины.

1. **Определение относительной энергетической характеристики повреждения пластины**. Для исследуемого типа усталостного повреждения прямоугольной пластины (рис. 1) используем общее исходное выражение для относительной энергетической характеристики повреждения в виде [1]

$$\kappa = \frac{t^3}{6D^2}\frac{\Phi_{\text{т}}}{\Phi_0}. \tag{1}$$

Здесь

$$\Phi_{\text{т}} = \iint\limits_{(S)} [K_1(\sigma_{\text{т}})]^2 \delta\bar{\rho} \cos\theta d\Gamma; \tag{2}$$

$$\Phi_0 = \int_0^L\int_0^B \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] dxdy, \tag{3}$$

где D – цилиндрическая жесткость неповрежденной пластины, $D = \dfrac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$; t – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона; $K_1(\sigma_т)$ – коэффициент интенсивности напряжений растяжения; $\sigma_т$ – амплитуда максимального номинального нормального напряжения изгиба в сечении расположения трещины $x = x_т$; $\delta\vec{\rho}$ – вектор возможного смещения точек фронта (контура Г) трещины; θ – угол между $\delta\vec{\rho}$ и нормалью к фронту трещины; w – собственная форма колебаний пластины, $w = w(x, y)$; S – площадь трещины.

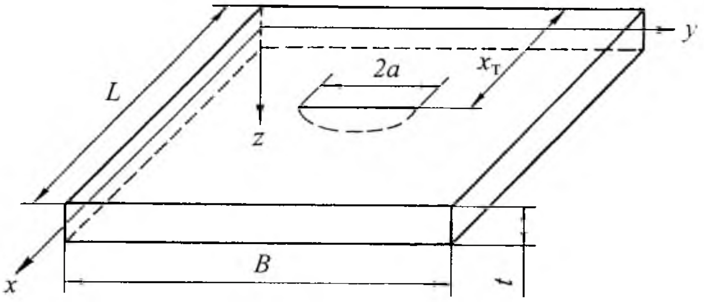


Рис. 1. Схема однородной прямоугольной пластины постоянной толщины t с прямолинейной плоской трещиной.

Ниже представлены результаты определения с использованием зависимостей (1)–(3) относительной энергетической характеристики κ наличия в пластине прямолинейных центральных сквозной и поверхностной полуэллиптической трещин при разном их количестве и расположении, а также при различных условиях закрепления и формах колебаний пластины.

1.1. ***Центральные сквозные прямолинейные трещины***. Для рассматриваемых плоских трещин длиной $2a_i$, расположенных параллельно плоскости yOz на расстоянии $x_{т,i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, N)$, в выражении (2) следует принять $\rho = a$, $\theta = 0$ и $d\Gamma = dz$.

В справочнике [3] для бесконечной пластины толщиной t и полосы толщиной t и шириной B с центральной трещиной длиной $2a$, находящихся под действием изгибающего момента, приведена единая формула для определения коэффициента интенсивности напряжений растяжения:

$$K_1(\sigma_т) = K_1 = \sqrt{a}\,\sigma_т \frac{2z}{t} F_1\left(\frac{t}{a}, \frac{a}{B}\right), \tag{4}$$

где

$$\sigma_т = \frac{6M_{x=x_т}}{t^2}.$$

Допуская в приближении возможность использования формулы (4) и в случае изменения величины $\sigma_т$ по длине трещины, т.е. при $\sigma_т = \sigma_т(y) > 0$, выражение (2) при наличии N невзаимодействующих трещин длиной $2a_i$ примет вид

$$\Phi_{\text{т}} = \frac{t}{3}\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{a_i} a\sigma_{\text{т},i}^2(a)F_1^2\left(\frac{t}{a}, \frac{a}{B}\right)da. \qquad (5)$$

Для рассматриваемых центральных трещин условие $\sigma_{\text{т}}(y) > 0$ выполняется для форм колебаний, симметричных относительно центральной оси пластины, перпендикулярной плоскости трещины, и длина полуволны которых больше длины трещины.

При интегрировании по длине трещины необходимо учитывать, что функция F_1 зависит от двух параметров: t/a и a/B. В связи с этим функцию F_1 представляли по данным приведенных в [3] кривых $F_1\left(\frac{t}{a\sqrt{10}}\right)$ и $F_1\left(\frac{2a}{B}\right)$ для $\nu = \frac{1}{3}$ в виде суммы двух интерполирующих функций, одна из которых определяет зависимость F_1 от параметра t/a при $a/B = 0$, а другая – от параметра a/B при данном значении t/a. В результате для квадрата функции F_1 получим

$$F_1^2\left(\frac{t}{a}, \frac{a}{B}\right) \cong \left[0{,}878 - \frac{0{,}124}{0{,}158 + \frac{t}{a\sqrt{10}}} + \left(1{,}476 - 1{,}745\frac{2a}{B}\right)\left(\frac{t}{a\sqrt{10}} - 0{,}5\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1{,}639\frac{2a}{B} - 1{,}346\right)\left(\frac{t}{a\sqrt{10}} - 0{,}5\right)^2\right]\mathrm{tg}\left(1{,}59\frac{2a}{B}\right) + \mathrm{th}\left(0{,}56\frac{t}{a\sqrt{10}} + 0{,}43\right). \qquad (6)$$

1.1.1. *Пластина, шарнирно опертая по всем краям*. Формы колебаний пластины, описываемые функцией

$$w(x, y) = A_{mn}\sin\frac{m\pi}{L}x\sin\frac{n\pi}{B}y \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad (7)$$

определяют выражения для амплитуд максимальных напряжений изгиба в сечениях расположения трещин $x = x_{\text{т},i}$ и функции (3):

$$\sigma_{\text{т},i} = \sigma_{\max}\sin\frac{m\pi}{L}x_{\text{т},i}\sin\frac{n\pi}{B}y; \qquad (8)$$

$$\Phi_0 = \frac{BLt^4}{144D^2}\lambda_{m,n}^2\sigma_{\max}^2, \qquad (9)$$

где

$$\sigma_{\max} = 6\pi^2\left[\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \nu\left(\frac{n}{B}\right)^2\right]\frac{D}{t^2}A_{mn}; \qquad (10)$$

$$\lambda_{m,n} = \frac{\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{B}\right)^2}{\left(\frac{m}{L}\right)^2 + \nu\left(\frac{n}{B}\right)^2}. \tag{11}$$

Учитывая необходимость непрерывного выполнения условия $\sigma_{\text{т}}(y) > 0$, ограничимся рассмотрением случаев $n = 1, 3, \ldots$ и $2a < B/n$.

С использованием формул (5) и (9) найдем выражение для параметра κ:

$$\kappa_{1.1.N} = \frac{8}{BL\lambda_{m,n}^2}\sum_{i=1}^{N}\sin^2\frac{\pi m}{L}x_{\text{т},i}\int_0^{a_i} a\cos^2\frac{\pi n}{B}aF_1^2\left(\frac{t}{a},\frac{a}{B}\right)da. \tag{12}$$

Заметим, что поскольку при сквозной трещине ее раскрытие может происходить как с одной, так и с другой стороны поверхности пластины, то при наличии трещин одинаковой длины ($2a$) и расположении их при колебаниях пластины по m-й форме в сечениях с наибольшим значением $\sigma_{\text{т}}$, т.е. при $x_{\text{т},i} = \frac{1+2(i-1)}{2m}L$ $(i = 1, 2, \ldots, N = m)$, формула (12) преобразуется к виду

$$\kappa_{1.1.m} = \frac{8m}{BL\lambda_{mn}^2}\int_0^{a} a\cos^2\frac{\pi n}{B}aF_1^2\left(\frac{t}{a},\frac{a}{B}\right)da. \tag{13}$$

1.1.2. *Пластина, шарнирно опертая по краям $x = 0$ и $x = L$ и свободная по двум другим*. При простых балочных формах колебаний (см. (7) при $\sin\frac{\pi n}{B}y \equiv 1$) наиболее приемлемо использование формул (4), (6), т.е. при постоянном значении $\sigma_{\text{т},i}$ по длине трещины. Подставив выражение (6) в (5), после интегрирования и элементарных преобразований получим

$$\Phi_{\text{т}} \approx \frac{t}{3}\sum_{i=1}^{N}\sigma_{\text{т},i}^2 a_i^2\lambda_i\left(\frac{a_i}{t},\frac{a_i}{B},\frac{t}{B}\right), \tag{14}$$

где

$$\lambda_i\left(\frac{a_i}{t},\frac{a_i}{B},\frac{t}{B}\right) = \frac{1}{a_i^2}\int_0^{a_i} aF_1^2\left(\frac{t}{a},\frac{a}{B}\right)da \approx \left[1{,}518 + 0{,}2\frac{a_i}{t} - 0{,}926\frac{a_i}{B} - \right.$$

$$\left. - 0{,}098\frac{t}{B} + 0{,}54\left(\frac{t}{a_i}\right)^2\right]\left[0{,}795\frac{a_i}{B} + 1{,}00492\left(\frac{a_i}{B}\right)^3 + 2{,}1679\left(\frac{a_i}{B}\right)^5\right] +$$

$$+\left[0{,}1235\frac{B}{a_i}\left(1 + 0{,}5\frac{a_i}{t}\right) - 0{,}013\frac{t}{a_i}\frac{B}{a_i} + 0{,}103\left(\frac{t}{a_i}\right)^2 - 0{,}291\right]\times$$

$$\times \ln\cos\left(3{,}18\frac{a_i}{B}\right)+0{,}54\,\mathrm{th}\left(0{,}43+0{,}1771\frac{t}{a_i}\right). \qquad (15)$$

Тогда формулы для параметра κ при N трещинах разной длины a_i в произвольных сечениях $x_{\text{т},i}$ и одинаковой длины a в сечениях с наибольшим значением $\sigma_\text{т}$ примут соответственно вид

$$\kappa_{1.2.N}=\frac{8}{BL}\sum_{i=1}^{N}a_i^2\lambda_i\sin^2\frac{m\pi}{L}x_{\text{т},i}; \qquad (16)$$

$$\kappa_{1.2.m}=\frac{8a^2}{BL}m\lambda. \qquad (17)$$

1.1.3. *Пластина, жестко защемленная по краям $x=0$ и $x=L$ и свободная по двум другим.* При наиболее простых формах колебаний, описываемых балочной функцией

$$w(x,\,y)=A_{kj}[(\sin k_jx-\mathrm{sh}\,k_jx)-B_j(\cos k_jx-\mathrm{ch}\,k_jx)], \qquad (18)$$

амплитуды максимальных напряжений изгиба в сечениях расположения трещин $x_{\text{т},i}\equiv x_i$ определяются выражением

$$\sigma_{\text{т},i}=\sigma_{\max}\frac{(\sin k_jx_i+\mathrm{sh}\,k_jx_i)-B_j(\cos k_jx_i+\mathrm{ch}\,k_jx_i)}{(\sin k_jx_{mj}+\mathrm{sh}\,k_jx_{mj})-B_j(\cos k_jx_{mj}+\mathrm{ch}\,k_jx_{mj})}. \qquad (19)$$

Здесь

$$\sigma_{\max}=\frac{6(k_jL)^2}{t^2L^2}[(\sin k_jx_{mj}+\mathrm{sh}\,k_jx_{mj})-B_j(\cos k_jx_{mj}+\mathrm{ch}\,k_jx_{mj})]A_{kj} \qquad (20)$$

– наибольшее из максимальных напряжений изгиба в пластине; $k_1L=4{,}73$; $k_2L=7{,}853$; $k_j=\frac{\pi}{2}(2j+1)$ $(j=3,\,4,\,...)$; $B_1=1{,}0178$; $B_2=0{,}999223$; $B_3=$ $=1{,}0000335$; $B_4=0{,}9999986$; $B_5=1{,}0000001$; ... .

Координата x_{mj} соответствует одной из координат, вычисляемых из уравнения

$$(\cos k_jx_j+\mathrm{ch}\,k_jx_j)+B_j(\sin k_jx_j+\mathrm{sh}\,k_jx_j)=0.$$

Тогда с использованием выражения (14), учитывая (19), найдем при наличии N невзаимодействующих трещин

$$\Phi_\text{т}=\frac{t}{3}\sigma_{\max}^2\frac{\sum_{i=1}^{N}a_i^2\lambda_i[(\sin k_jx_i+\mathrm{sh}\,k_jx_i)-B_j(\cos k_jx_i+\mathrm{ch}\,k_jx_i)]^2}{[(\sin k_jx_{mj}+\mathrm{sh}\,k_jx_{mj})-B_j(\cos k_jx_{mj}+\mathrm{ch}\,k_jx_{mj})]^2}. \qquad (21)$$

Выражение для параметра κ получим с помощью формул (1), (21), учитывая, что при данной форме колебаний (18)

$$\Phi_0 = \frac{Bt^4 L\sigma_{\max}^2}{36D^2[(\sin k_j x_{mj} + \operatorname{sh} k_j x_{mj}) - B_j(\cos k_j x_{mj} + \operatorname{ch} k_j x_{mj})]^2}, \quad (22)$$

$$\kappa_{1.3.N} = \frac{2}{BL}\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \lambda_i [(\sin k_j x_i + \operatorname{sh} k_j x_i) - B_j(\cos k_j x_i + \operatorname{ch} k_j x_i)]^2. \quad (23)$$

Ранее [1] отмечалось, что из-за статической неопределимости пластины, обусловливаемой условиями жесткого закрепления ее краев, используемые здесь выражения для коэффициента интенсивности напряжений целесообразно ограничить рассмотрением трещин, расположенных вдали от защемленных краев достаточно гибкой пластины.

В качестве примера возможной зависимости параметра κ от относительных размеров трещины и пластины на рис. 2 приведены результаты, рассчитанные по формулам (13) и (17), для пластины, шарнирно опертой по всем краям и по краям $x = 0$ и $x = L$ при различных значениях отношения B/t. Данные представлены в виде зависимостей обобщенных параметров $\kappa L\lambda_{m,n}^2/B$ для пластины, шарнирно опертой по всем краям, и $\kappa L/B$ для пластины, опертой по двум краям, от относительной длины $\gamma = 2a/B$ одиночной ($N = 1$) центральной сквозной трещины, расположенной при колебаниях пластины по m-й форме в одном из сечений ($x_{\text{т},i} = \dfrac{1+2(i-1)}{2m}L$, $i = 1, 2, \ldots, N = m$) с наибольшим значением максимального напряжения изгиба $\sigma_{\text{т},i} = \sigma_{\max}$. При наличии одинаковых трещин при m-й форме колебаний во всех m сечениях с напряжением $\sigma_{\text{т},i} = \sigma_{\max}$ приведенные значения обобщенного параметра $\kappa L/B$ либо $\kappa L\lambda_{m,n}^2/B$ увеличиваются в m раз.

1.2. ***Центральная полуэллиптическая поверхностная трещина***. Для рассматриваемой трещины длиной $2a$ и максимальной глубиной b (рис. 3), расположенной параллельно плоскости yOz на расстоянии $x = x_{\text{т}}$, в формуле (2) вектор $\vec{\rho}$ соответствует расстоянию от центра эллипса до текущей точки на контуре Γ трещины, модуль которого

$$\rho = a\left(\cos^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)^{0,5}.$$

Косинус угла между радиус-вектором $\vec{\rho}$ и нормалью к контуру трещины при его задании в полярных координатах (α, ρ) будет $\cos\theta = \rho\dfrac{d\alpha}{d\Gamma}$.

При вычислении значений функции (2), следуя работе [4], полагаем, что величина $\Phi_{\text{т}}$ не зависит от пути интегрирования и отношение полуосей эллипса есть величина постоянная $\overline{\alpha} = b/a = \text{const}$. В этом случае можно записать $\dfrac{d\rho}{da}=\dfrac{\rho}{a}$, а учитывая зависимость между декартовыми и полярными координатами эллипса, определяющую соотношения $\rho\cos\alpha = a\cos\varphi$ и $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}\operatorname{tg}\varphi$, получаем $d\alpha = \dfrac{ab}{\rho^2}d\varphi$.

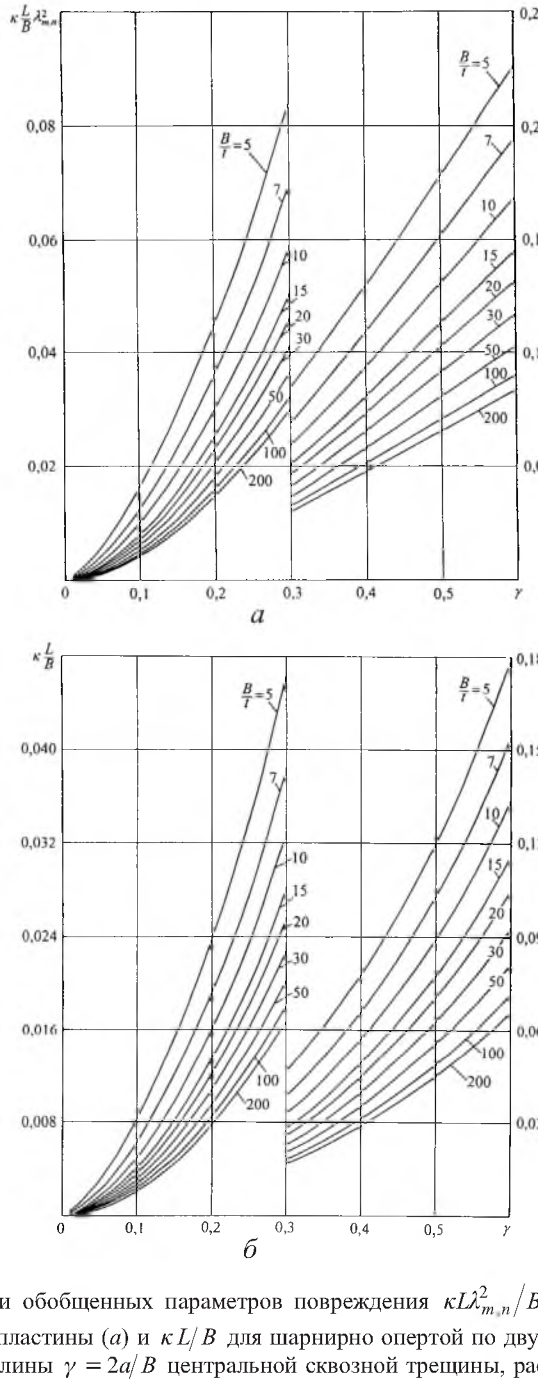


Рис. 2. Зависимости обобщенных параметров повреждения $\kappa L\lambda^2_{m,n}/B$ для шарнирно опертой по всем краям пластины (*а*) и $\kappa L/B$ для шарнирно опертой по двум краям пластины (*б*) от относительной длины $\gamma = 2a/B$ центральной сквозной трещины, расположенной в одном из сечений пластины с наибольшим значением максимального напряжения изгиба при разных отношениях B/t ее размеров.

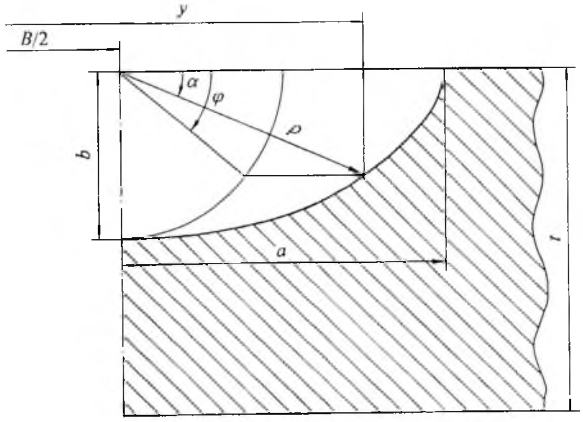


Рис. 3. Схема центральной полуэллиптической поверхностной трещины длиной $2a$ и максимальной глубиной b.

С помощью приведенных соотношений выражение (2) преобразуется к виду

$$\Phi_{\text{т}} = 2\overline{\alpha} \int\limits_{0}^{\pi/2} \int\limits_{0}^{a} a K_1^2 \, da d\varphi. \tag{24}$$

Для определения коэффициента интенсивности напряжений K_1 используем известную зависимость для пластины конечных размеров, которая нагружена изгибающим моментом [5]:

$$K_1 = \sigma_{\text{т}} \frac{\sqrt{\pi b}}{E_k} H(\overline{\alpha}, \beta, \varphi) F_1(\beta, \overline{\alpha}, \gamma, \varphi), \tag{25}$$

где $\sigma_{\text{т}}$ – максимальное номинальное напряжение изгиба в сечении $x = x_{\text{т}}$;

$$\begin{cases} E_k = (1 + 1{,}464\overline{\alpha}^{1,65})^{1/2}; \quad H = H_1 + (H_2 - H_1)\sin^p \varphi; \\ H_1 = 1 - 0{,}34\beta - 0{,}11\overline{\alpha}\beta; \\ H_2 = 1 - (1{,}22 + 0{,}12\overline{\alpha})\beta + (0{,}55 - 1{,}05\overline{\alpha}^{0,75} + 0{,}47\overline{\alpha}^{1,5})\beta^2; \\ p = 0{,}2 + \overline{\alpha} + 0{,}6\beta; \\ F_1(\beta, \overline{\alpha}, \gamma, \varphi) = \left[1{,}13 - 0{,}09\overline{\alpha} - \left(0{,}54 - \dfrac{0{,}89}{0{,}2 + \overline{\alpha}}\right)\beta^2 + \right. \\ \left. + \left(0{,}5 - \dfrac{1}{0{,}65 + \overline{\alpha}} + 14(1 - \overline{\alpha})^{24}\right)\beta^4\right][1 + (0{,}1 + 0{,}35\beta^2)(1 - \sin\varphi)^2] \times \\ \times [\sec(\pi\gamma\sqrt{\beta})]^{0,5} (\sin^2\varphi + \overline{\alpha}^2 \cos^2\varphi)^{0,25}; \\ \beta = \dfrac{b}{t} = \overline{\alpha}\dfrac{a}{t}; \quad \gamma = \dfrac{a}{B}. \end{cases} \tag{26}$$

1.2.1. *Пластина, шарнирно опертая по всем краям.* Рассмотрим N параллельных центральных трещин длиной $2a_q$ и максимальной глубиной b_q, расположенных в сечениях $x = x_{\text{т},q}$, при условии отсутствия значимого их взаимовлияния.

Допускаем в приближении возможность использования формулы (24) для случая некоторого изменения $\sigma_{\text{т},q}$, определяемого выражением (8) при $i \equiv q$, по длине трещины. Выразив $\sin\frac{\pi n}{B}y$ в пределах изменения y от $B/2$ до $B/2 + a_q$ через угол φ, т.е. осуществив в формуле (8) замену $\sin\frac{\pi n}{B}y =$ $= \cos\left(\frac{\pi n}{B}a\cos\varphi\right)$, получим

$$\sigma_{\text{т},q}(y) = \sigma_{\text{т},q}(\varphi) = \sigma_{\max}\sin\frac{m\pi}{L}x_{\text{т},q}\cos\left(\frac{\pi n}{B}a\cos\varphi\right),$$

где $\sigma_{\max}$ определяется по формуле (10).

Тогда выражение (24) с учетом (25) при $\overline{\alpha} = b_q/a_q = \text{const}$ и $b_q = \overline{\alpha}a_q$ для q-й трещины примет следующий вид:

$$\Phi_{\text{т}_q} = \frac{2\pi\overline{\alpha}^2}{E_k^2}\sigma_{\max}^2\sin^2\frac{m\pi}{L}x_{\text{т},q}F_{2n}(a_q, \overline{\alpha}_q, \beta_q, \gamma_q), \qquad (27)$$

где

$$F_{2n}(a_q, \overline{\alpha}_q, \beta_q, \gamma_q) =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{a_q}\left[a\cos\left(\frac{\pi n}{B}a\cos\varphi\right)H(\overline{\alpha}, \beta, \varphi)F_1(\beta, \overline{\alpha}, \gamma, \varphi)\right]^2 da d\varphi. \qquad (28)$$

В случае $n = 1$ получим

$$F_2(a_q, \overline{\alpha}_q, \beta_q, \gamma_q) \approx a_q^3\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{4}\beta_q^{i-1}f_i(\overline{\alpha})[f_{i1}(\gamma_q)C_1^2 + f_{i2}(\gamma_q)C_1C_2\beta_q^2 +$$

$$+ f_{i3}(\gamma_q)(C_2^2 + 2C_1C_3)\beta_q^4 + f_{i4}(\gamma_q)C_2C_3\beta_q^6], \qquad (29)$$

где

$$f_i(\overline{\alpha}) = A_{i0} + A_{i1}\overline{\alpha} + A_{i2}\overline{\alpha}^2 + A_{i3}\overline{\alpha}^3; \qquad f_{ij}(\gamma_q) = A_{ij,0} + A_{ij,2}\gamma_q^2 + A_{ij,4}\gamma_q^4;$$

$$C_1 = 1{,}13 - 0{,}09\overline{\alpha}; \quad C_2 = \frac{0{,}89}{0{,}2 + \overline{\alpha}} - 0{,}54; \quad C_3 = 0{,}5 - \frac{1}{0{,}65 + \overline{\alpha}} + 14(1 - \overline{\alpha})^{24}.$$

Значения коэффициентов A_{ij} ($i = 1, 2, 3, \ldots, 7$; $j = 0, 1, 2, 3$) и $A_{ij,m}$ ($i, j =$ $= 1, 2, 3, 4$; $m = 0, 2, 4$) приведены в табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1

Значения коэффициентов A_{ij} выражения (29)

i	$A_{i,0}$	$A_{i,1}$	$A_{i,2}$	$A_{i,3}$
1	1,009 1,059	0,223 −0,103	0,641 1,220	−0,230 −0,539
2	−2,357 −2,380	−0,222 0,224	−0,882 −0,891	0,277 0,280
3	2,647 2,673	−2,242 −2,264	2,676 2,703	−0,908 −0,917
4	−1,714 −1,731	3,157 3,189	−3,020 −3,050	1,015 1,025
5	0,740 0,747	−1,701 −1,719	1,968 1,988	−0,781 −0,789
6	−0,270 −0,273	0,588 0,594	−0,653 −0,660	0,259 0,262
7	0,105 0,106	−0,245 −0,247	0,266 0,269	−0,104 0,105

Примечание. Над чертой приведены значения для пластин, шарнирно опертых по контуру, под чертой – для пластин, шарнирно опертых по краям $x = 0$; $x = L$ и свободных по двум другим.

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициентов $A_{ij,m}$ выражения (29)

i	j	$A_{ij,0}$	$A_{ij,2}$	$A_{ij,4}$	i	j	$A_{ij,0}$	$A_{ij,2}$	$A_{ij,4}$
1	1	1/3	−1,03	1,23	4	3	1/10	−0,30	0,35
	2	2/5	−1,43	1,94		4	1/6	−0,50	0,60
	3	1/7	−0,55	0,83	5	1	1/7	−0,52	0,72
	4	2/9	−0,92	1,39		2	2/9	−0,85	1,21
2	1	1/4	−0,56	0,60		3	1/11	−0,36	0,53
	2	1/3	−0,90	1,00		4	2/13	−0,62	1,00
	3	1/8	−0,39	0,35	6	1	1/8	−0,71	1,13
	4	1/5	−0,58	0,68		2	1/5	−1,17	1,93
3	1	1/5	−0,39	0,36		3	1/12	−0,51	0,84
	2	2/7	−0,60	0,60		4	1/7	−0,87	1,50
	3	1/9	−0,23	0,30	7	1	1/9	−0,72	1,28
	4	2/11	−0,40	0,50		2	2/11	−1,21	2,21
4	1	1/6	−0,43	0,49		3	1/13	−0,52	0,97
	2	1/4	−0,70	0,82		4	2/15	−0,93	1,74

Для случая наличия N трещин имеем

$$\Phi_{\text{т}_N} = \frac{2\pi\overline{\alpha}^2}{E_k^2}\sigma_{\max}^2 \sum_{q=1}^{N} F_{2,n}(a_q, \overline{\alpha}_q, \beta_q, \gamma_q)\sin^2\frac{m\pi}{L}x_{\text{т},q}. \qquad (30)$$

При этом под знаком суммирования учитываются данные только для тех трещин, в месте расположения которых номинальное напряжение $\sigma_{\text{т},q}$ является растягивающим для рассматриваемого полуцикла колебаний пластины. Как и выше (см. п. 1.1), учитывая, что условие $\sigma_{\text{т},q} > 0$ должно выполняться по всей длине центральной трещины, ограничимся исследованием симметричных форм колебаний пластины относительно ее центральной оси, перпендикулярной плоскости трещины при длине полуволны, большей длины трещины.

С использованием формул (1), (9) и (30) найдем следующее выражение для параметра κ:

$$\kappa_{1.2.1N} = \frac{48\pi\overline{\alpha}^2}{BLtE_k^2\lambda_{m,n}^2}\sum_{q=1}^{N}\sin^2\frac{m\pi}{L}x_{\text{т},q}F_{2,n}(a_q, \overline{\alpha}_q, \beta_q, \gamma_q). \qquad (31)$$

При наиболее опасном расположении N трещин одинаковых размеров (a, b) в сечениях $x_{\text{т},q} = \dfrac{1+2(q-1)}{2m}L$ $(q = 1, 2, 3, \ldots, N = m)$, т.е. с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба $\sigma_{\text{т},q} = \sigma_{\max}$, выражения (30) и (31) при колебаниях пластины по m-й форме при $n = 1, 3, \ldots$ и $2a < B/n$ для четных значений m примут вид

$$\Phi_{\text{т}_N} = \frac{2\pi m\overline{\alpha}^2}{E_k^2}\sigma_{\max}^2 F_{2,n}(a, \overline{\alpha}, \beta, \gamma); \qquad (32)$$

$$\kappa_{1.2.1m} = \frac{48\pi m\overline{\alpha}^2}{BLtE_k^2\lambda_{m,n}^2}F_{2,n}(a, \overline{\alpha}, \beta, \gamma) \qquad (33)$$

и в случае нечетных значений m для полуциклов разного ($\pm$) знака –

$$\kappa_{1.2.1m} = \frac{24\pi(m\pm 1)\overline{\alpha}^2}{BLtE_k^2\lambda_{m,n}^2}F_{2,n}(a, \overline{\alpha}, \beta, \gamma), \qquad (34)$$

где $\lambda_{m,n}$ определяется формулой (11).

1.2.2. *Пластина, шарнирно опертая по краям* $x = 0$ *и* $x = L$ *и свободная по двум другим*. Рассмотрим, как и выше (п. 1.1.2), наиболее простые балочные формы колебаний $w(x, y) = A_m \sin\dfrac{m\pi}{L}x$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Поскольку при данных формах колебаний изгибающий момент M_x не изменяется вдоль ширины пластины, наиболее приемлемым является использовать формулу (25). В этом случае в выражениях (31), (33), (34) следует принять $\lambda_{m,n} \equiv 1$ и, кроме того, учитываем, что в (28) $\cos\left(\frac{\pi n}{B} a\cos\varphi\right) \equiv 1$:

$$F_{2,n}(a_q, \overline{\alpha}_q, \beta_q, \gamma_q) \equiv F_2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a_q} [aH(\overline{\alpha}, \beta, \varphi) F_1(a, \overline{\alpha}, \beta, \gamma, \varphi)]^2 \, da d\varphi. \qquad (35)$$

При этом для вычисления F_2 может использоваться приближенное аналитическое выражение (29) при значениях коэффициентов A_{ij}, приведенных в табл. 1.

1.2.3. *Пластина, жестко защемленная по краям $x = 0$; $x = L$ и свободная по двум другим.* Для рассмотренных форм колебаний пластины (18), как и для пластины с двумя шарнирно опертыми краями (п. 1.2.2), используем функцию (35) или ее приближенное выражение (29) при соответствующих значениях коэффициентов A_{ij} (табл. 1). Тогда, учитывая, формулы (1), (22), а также то, что сомножители при $\sigma_{\max}$ в (8) и (19) отличаются, выражения (30), (31) примут вид

$$\Phi_{\text{т}_N} = \frac{2\pi\overline{\alpha}^2}{E_k^2} \sigma_{\max}^2 \sum_{q=1}^{N} F_2(a_q, \overline{\alpha}, \beta_q, \gamma_q) \times$$

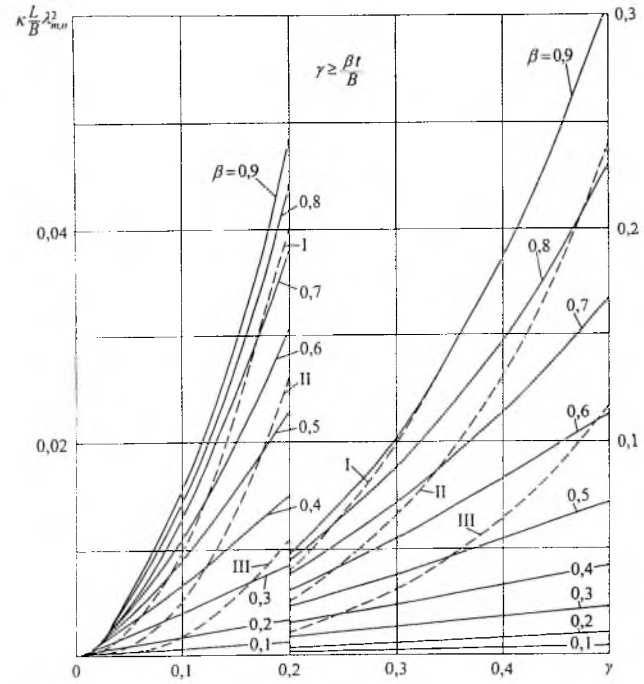
$$\times \frac{[(\sin k_j x_q + \operatorname{sh} k_j x_q) - B_j(\cos k_j x_q + \operatorname{ch} k_j x_q)]^2}{[(\sin k_j x_{mj} + \operatorname{sh} k_j x_{mj}) - B_j(\cos k_j x_{mj} + \operatorname{ch} k_j x_{mj})]^2}; \qquad (36)$$

$$\kappa_{1.3.N} = \frac{12\pi\overline{\alpha}^3}{BLtE_k^2} \sum_{q=1}^{N} a_q^2 F_2(a_q, \overline{\alpha}, \beta_q, \gamma_q) \times$$

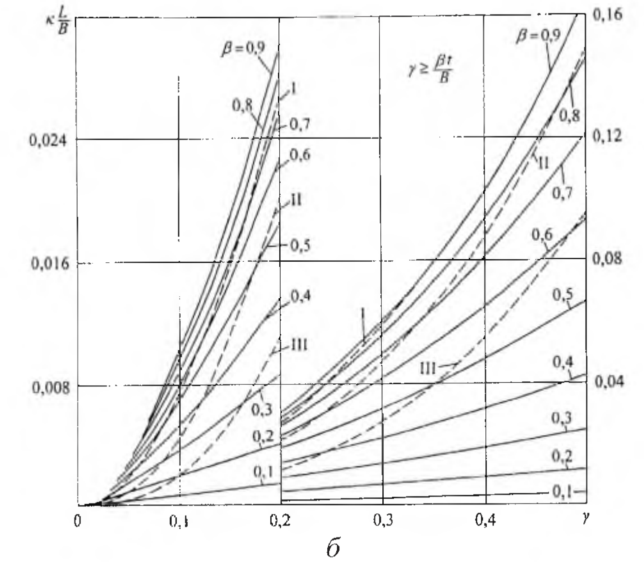
$$\times [(\sin k_j x_q + \operatorname{sh} k_j x_q) - B_j(\cos k_j x_q + \operatorname{ch} k_j x_q)]^2, \qquad (37)$$

где j обозначает соответствие значений k и x_m j-й форме колебаний пластины (п. 1.1.3.). При этом под знаком суммирования для рассматриваемого полуцикла колебаний пластины учитываются только те трещины, в месте расположения которых номинальное напряжение $\sigma_{\text{т}}$ является растягивающим. Кроме того, как уже отмечалось (п. 1.1.3.), приведенные выражения допустимо использовать при расположении трещин вдали от защемленных краев достаточно гибкой пластины.

В качестве примера на рис. 4,*а* для шарнирно опертой по контуру пластины представлены зависимости обобщенного параметра $\kappa L\lambda_{m,n}^2 / B$ от относительной длины $\gamma = 2a/B$ одной ($N = 1$) центральной полуэллиптической трещины, расположенной в одном из сечений ($x_{\text{т}} = L/2$) с наибольшим значением максимального напряжения изгиба, т.е. при $\sin\frac{\pi m}{L} x_{\text{т}} = 1$, при разных отношениях ее глубины b к толщине t пластины ($\beta = b/t$). Данные рассчитывали по формуле (31) для первой формы колебаний ($n = 1$; $m = 1$).



а



б

Рис. 4. Зависимости обобщенных параметров повреждения $\kappa L\lambda_{m,n}^2/B$ для шарнирно опертой по контуру пластины (*а*) и $\kappa L/B$ для шарнирно опертой по двум краям пластины (*б*) от относительной длины $\gamma = 2a/B$ центральной поверхностной полуэллиптической трещины при разных значениях параметра $\beta = b/t$. (Здесь штриховые линии соответствуют устойчивой форме фронта поверхностной трещины при циклическом изгибе пластины с разными значениями отношения ее размеров t/B: I – $t/B = 0{,}05$; II – $t/B = 0{,}10$; III – $t/B = 0{,}20$.)

Значения параметра $\kappa L\lambda_{m,n}^2 / B$ для наиболее устойчивой формы фронта поверхностной полуэллиптической трещины при симметричном циклическом изгибе пластины, определяемой формулой $\overline{\alpha} = 0{,}96 - 0{,}78\beta$ [6], показаны на рис. 4 штриховыми линиями.

Для пластины, шарнирно опертой по двум краям $x = 0$; $x = L$ и свободной по двум другим, на рис. 4,*б* приведены зависимости обобщенного параметра $\kappa L/B$ от относительной длины трещины $\gamma = 2a/B$, которые при расположении трещины в одном из сечений с наибольшим напряжением изгиба не зависят от формы колебаний. При наличии $N = m$ одинакового размера центральных трещин, расположенных в сечениях ($x_{\text{т},i} = \dfrac{1 + 2(i-1)}{2m} L$, $i = 1, 2, 3, \ldots, N = m$) с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба, полученные значения параметра $\kappa L/B$ для одной трещины увеличиваются в $m/2$ раза для четных m и в $(m \pm 1)/2$ раза для нечетных m с учетом знака полуцикла (±).

2. **Определение вибродиагностических параметров**. В качестве вибродиагностических параметров поврежденности пластины вследствие образования трещин нормального отрыва удобно использовать определяемые через параметр κ приближенные значения относительного изменения собственной частоты ее колебаний при открытых и закрывающихся трещинах соответственно [1]:

$$\beta_{\text{т}} = \frac{\omega_0 - \omega_{\text{т}}}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1+\kappa} - 1}{\sqrt{1+\kappa}}; \tag{38}$$

$$\beta_{\text{т.з}} = \frac{\omega_0 - \omega_{\text{т.з}}}{\omega_0} = \frac{\sqrt{1+\kappa} - 1}{\sqrt{1+\kappa} + 1}. \tag{39}$$

В случае если ни на одном из полуциклов (±) не все трещины закрываются или открываются и значения параметра κ на этих полуциклах разные ($\kappa_+ \neq \kappa_-$), то относительное изменение собственной частоты определяется формулой [2]

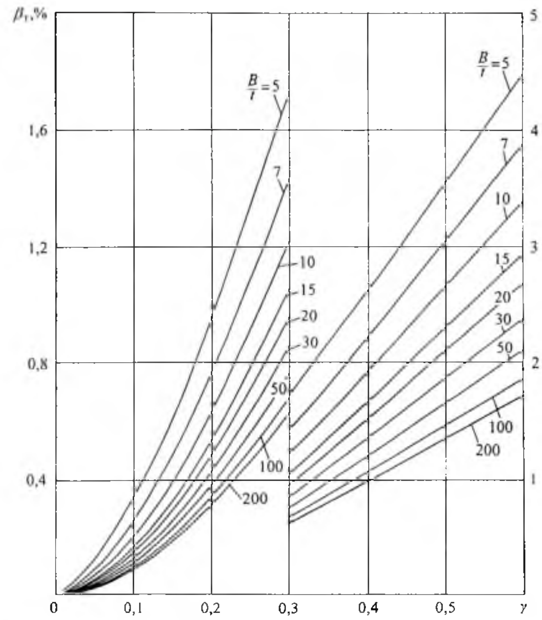
$$\beta'_{\text{т.з}} = \frac{\omega_0 - \omega'_{\text{т.з}}}{\omega_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{1+\kappa_+} + \sqrt{1+\kappa_-}}, \tag{40}$$

при $\kappa_+ = \kappa_- = \kappa$ – формулой (38).

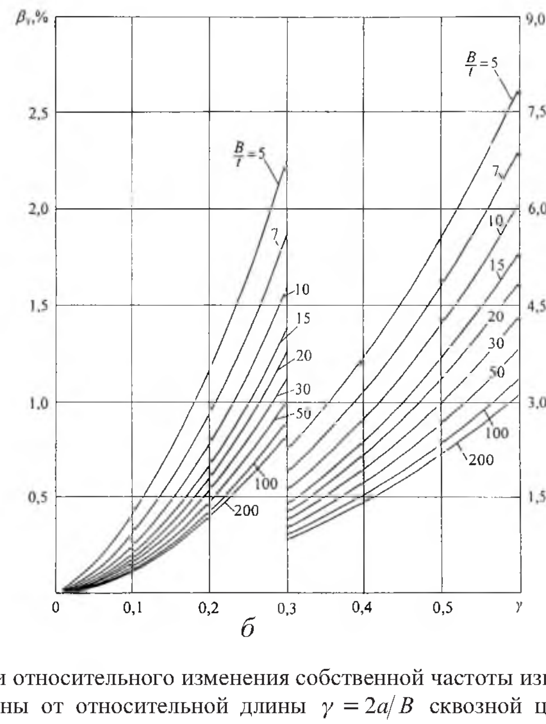
С использованием зависимостей (12), (13), (16), (17), (23), (31), (33), (34), (37) (см. также рис. 2 и 4) можно для заданных условий закрепления пластины и формы ее колебаний определить зависимости относительного изменения частоты собственных колебаний от относительных размеров сквозных и поверхностных трещин для разных относительных размеров пластины.

В качестве примеров на рис. 5 и 6 показаны зависимости относительного изменения собственной частоты колебаний квадратной пластины, шарнирно опертой по всем краям и шарнирно опертой только по двум краям ($x = 0$; $x = L$), а по остальным свободной, при низших формах ее колебаний

($m = n = 1$ и $m = 1$ соответственно) от относительной длины $\gamma = 2a/B$ одной сквозной центральной трещины и одной открытой центральной поверхностной полуэллиптической трещины, расположенных посередине пластины ($x_{\text{т}} = L/2$) при разных относительных ее размерах.



а



б

Рис. 5. Зависимости относительного изменения собственной частоты изгибных колебаний $\beta_{\text{т}}$ квадратной пластины от относительной длины $\gamma = 2a/B$ сквозной центральной трещины, расположенной в сечении с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба, при разных значениях отношения ее размеров B/t: *а* – шарнирно опертая по всем краям при $m = n = 1$; *б* – шарнирно опертая по двум краям при $m = 1$.

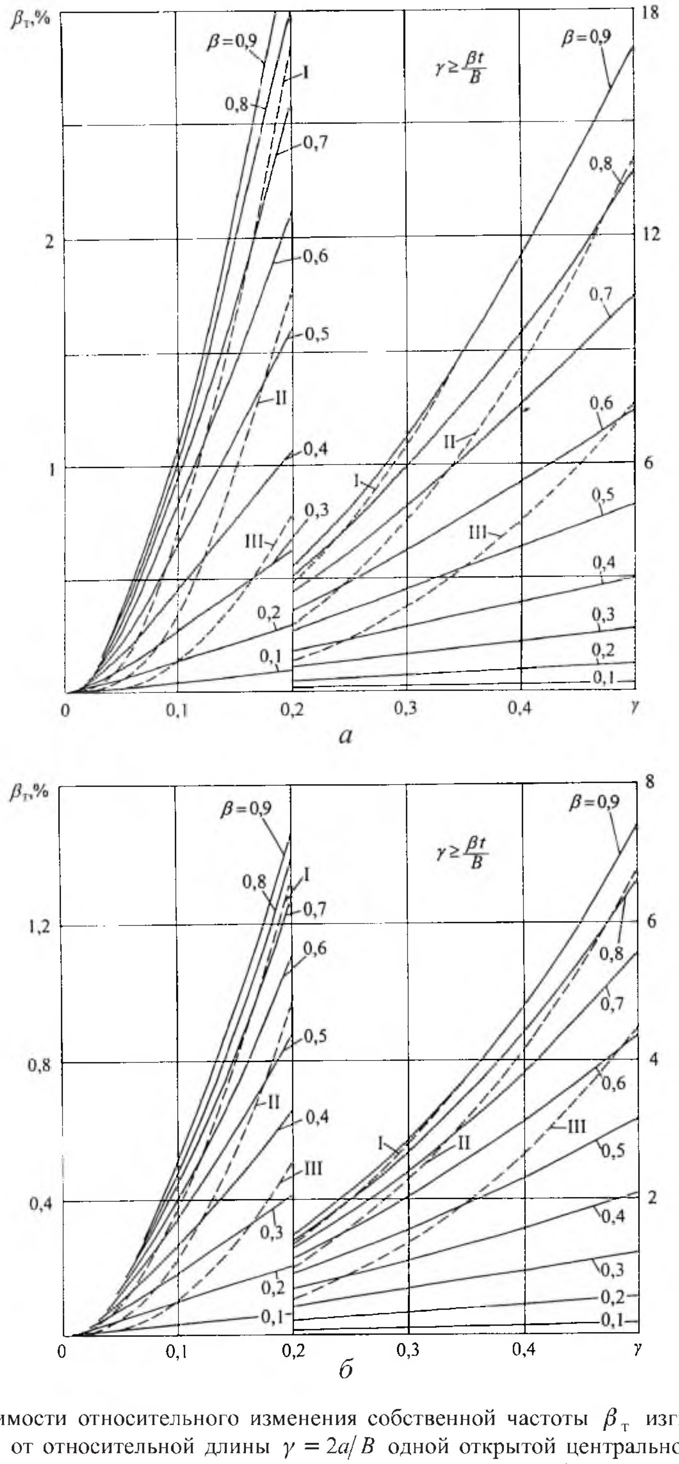


Рис. 6. Зависимости относительного изменения собственной частоты $\beta_т$ изгибных колебаний пластины от относительной длины $\gamma = 2a/B$ одной открытой центральной поверхностной полуэллиптической трещины, расположенной в сечении $x_т = L/2$, при разных значениях параметра $\beta = b/t$: *а* – шарнирно опертая по контуру при $m = n = 1$ и $B/L = 2$; *б* – шарнирно опертая по двум краям при $m = 1$ и $B/L = 1$. (Штриховые линии соответствуют устойчивой форме фронта поверхностной трещины при циклическом изгибе пластины с разными значениями отношения ее размеров t/B: *I* – $t/B = 0{,}05$; *II* – $t/B = 0{,}10$; *III* – $t/B = 0{,}20$.)

При использовании приведенных данных с целью практической вибродиагностики повреждения пластин заметим: несмотря на то что в многочисленных исследованиях колебаний упругих тел с трещинами преимущественно внимание уделяется определению их влияния на изменение собственных частот, считается, что надежное диагностирование повреждения возможно, если изменение собственной частоты превышает 5% [7].

Как следует из представленных данных, при наличии только одной трещины наблюдаемое изменение собственной частоты колебаний пластины только в отдельных случаях удовлетворяет условию надежного диагностирования ее повреждения.

В связи с этим оценим возможную эффективность таких более чувствительных вибродиагностических индикаторов повреждения, как параметры искажения гармоничности колебаний, обусловленного нелинейностью колебательной системы вследствие наличия периодически закрывающихся трещин, что имеет место в случае поверхностной трещины, т.е. когда изменение собственной частоты колебаний пластины определяется формулами (39) или (40) [1, 2].

Наиболее представительными параметрами искажения гармоничности колебаний, определяемыми при спектральном анализе регистрируемого колебательного процесса упругого тела с трещиной, являются величина отношения постоянной составляющей A_0 и амплитуды второй гармоники A_2 к амплитуде первой гармоники A_1 [8, 9]. Особенно проявляется амплитуда второй гармоники при супергармоническом резонансе второго порядка $(v = \dfrac{1}{2}\omega_{\text{т.з}})$ [8, 9]. Эти вибродиагностические параметры выражаются через энергетический параметр κ. Так, относительные величины постоянной составляющей и амплитуды второй гармоники определяются по приближенным формулам при основном резонансе (частота возбуждения $v = \omega_{\text{т.з}}$) [8]

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{\kappa}{\pi(1+\kappa)}; \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{2\kappa}{9\pi(1+\kappa)}, \tag{41}$$

при супергармоническом резонансе второго порядка относительная величина постоянной составляющей определяется по той же формуле, а относительная амплитуда второй гармоники – по выражению

$$\frac{A_2}{A_1} \approx \frac{\pi\kappa(1+\sqrt{(1+\kappa)})[(8-\pi)(1+\kappa)-\pi]}{16(1+\kappa)^2\delta}, \tag{42}$$

где δ – логарифмический декремент колебаний пластины.

В качестве примера на рис. 7 для низших форм колебаний квадратной пластины, шарнирно опертой по всем краям и шарнирно опертой только по двум краям $x = 0$ и $x = L$, а по двум другим свободной, представлены зависимости отношений A_0/A_1 и A_2/A_1 от относительной длины $\gamma = 2a/B$ одиночной полуэллиптической центральной трещины для разных значений ее относительной глубины $\beta = b/t$, рассчитанные по формулам (41). Рис. 8

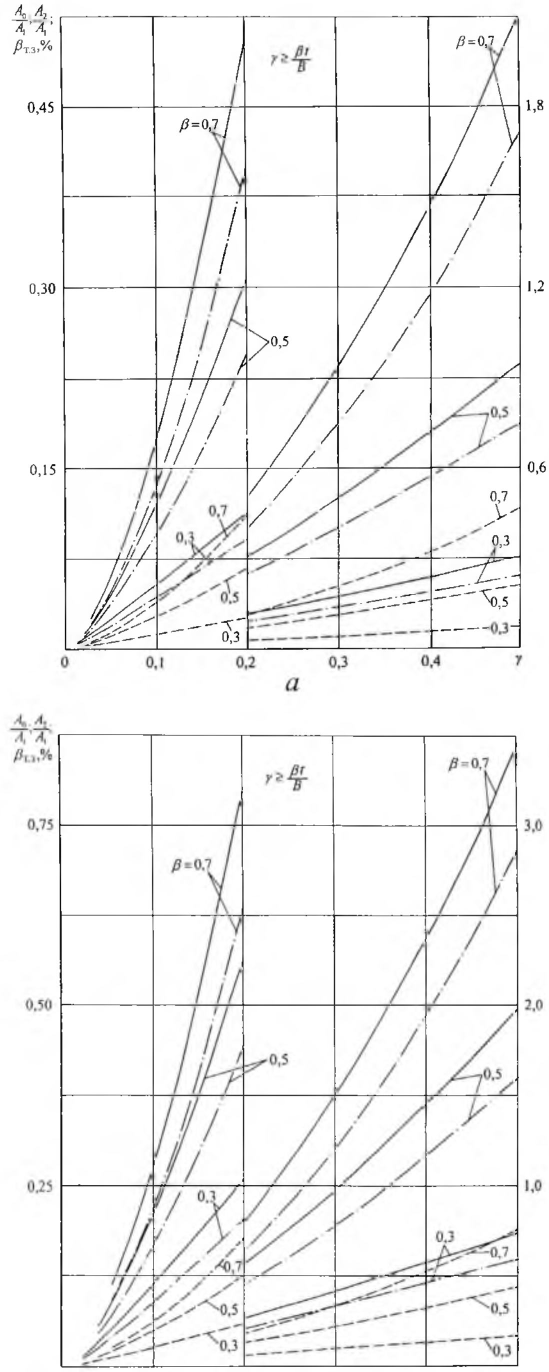
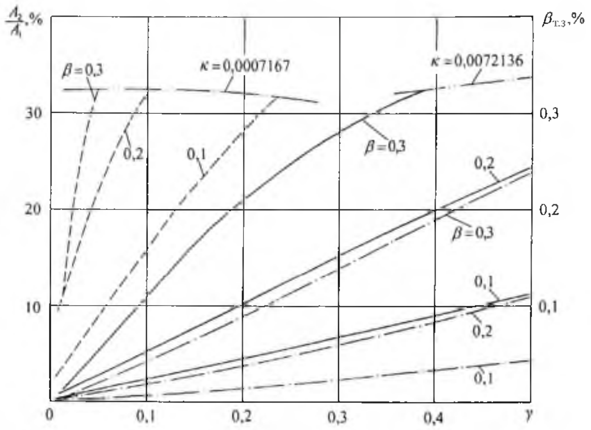
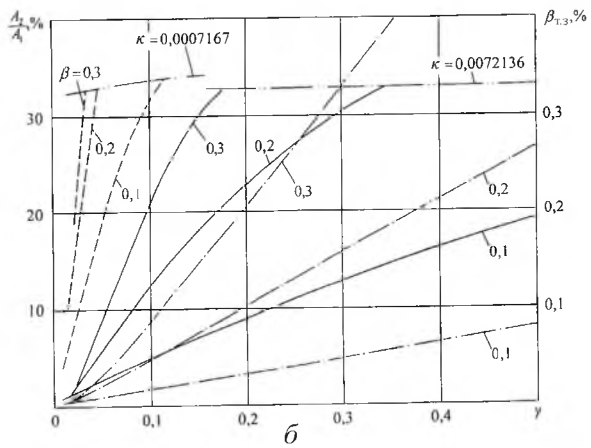


Рис. 7. Зависимости относительных величин постоянной составляющей A_0/A_1 (сплошные линии) и амплитуды второй гармоники A_2/A_1 (штриховые линии), а также относительного изменения собственной частоты $\beta_{т.з}$ (штрихпунктирные линии) изгибных колебаний квадратной пластины при основном резонансе от относительной длины $\gamma = 2a/B$ центральной поверхностной полуэллиптической трещины, расположенной в сечении с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба, при разных значениях параметра $\beta = b/t$: *а* – шарнирно опертая по контуру; *б* – шарнирно опертая по двум краям.



а



б

Рис. 8. Зависимости относительной амплитуды второй гармоники A_2/A_1 при двух значениях логарифмического декремента ($\delta = 0{,}01$ – сплошные линии, $\delta = 0{,}001$ – штриховые линии) и относительного изменения собственной частоты $\beta_{т.з}$ (штрихпунктирные линии) изгибных колебаний квадратной пластины при супергармоническом резонансе 2-го порядка от относительной длины $\gamma = 2a/B$ центральной поверхностной полуэллиптической трещины, расположенной в сечении с наибольшим значением максимальных напряжений изгиба, при разных значениях параметра $\beta = b/t$: *а* – шарнирно опертая по контуру; *б* – шарнирно опертая по двум краям. (Штрихпунктирные с двумя точками линии соответствуют предельному значению параметра κ.)

иллюстрирует зависимости $A_2/A_1(\gamma)$, рассчитанные по формуле (42) при различных значениях логарифмического декремента колебаний δ.

Для сопоставления влияния поврежденности на рассматриваемые вибродиагностические параметры на рис. 7, 8 приведены также зависимости относительного изменения собственной частоты изгибных колебаний пластины $\beta_{т.з}$ от относительной длины γ трещины. Видно, что если для основного резонанса (рис. 7) наиболее чувствительным параметром повреждения является относительная величина постоянной составляющей (сплошные линии), практически сравнимая с изменением собственной частоты колебаний пластины (штрихпунктирные линии), а чувствительность относительной величины второй гармоники значительно им уступает, то для супергармонического резонанса (рис. 8) чувствительным параметром будет относительная величина второй гармоники (сплошные и штриховые линии), которая может более чем на 2-3 порядка превышать относительное изменение собственной частоты колебаний пластины (штрихпунктирные линии). Относительная амплитуда второй гармоники существенно зависит от уровня демпфирующей способности колебательной системы, которая характеризуется в данном случае величиной логарифмического декремента колебаний $\delta = 0{,}01$ и $0{,}001$. Величина δ определяет также предельное значение параметра $\kappa = \dfrac{2{,}25\delta}{\pi - 2{,}25\delta}$, ограничивающего достоверность использования формулы (42) [2].

Наличие сквозных трещин в пластине не обусловливает ее нелинейность, и более чувствительным параметром повреждения может быть относительное изменение логарифмического декремента колебаний [1]:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta_{\text{т}} - \delta_0}{\delta_0} = \left(\frac{\Delta W_{\text{т}}}{\Delta W_0} - \kappa\right)(1+\kappa)^{-1}, \tag{43}$$

где $\Delta W_{\text{т}}$ – рассеяние энергии колебаний пластины при наличии трещины; ΔW_0 – то же без трещины.

Так, при пренебрежимо малом рассеянии энергии в трещине относительное изменение декремента колебаний

$$\bar{\delta} \approx \frac{\kappa}{1+\kappa}, \tag{44}$$

его величина примерно в два раза больше относительного изменения собственной частоты колебаний $\beta_{\text{т}}$. Однако при использовании на практике относительного изменения демпфирующей способности пластины, как и изменения ее собственной частоты, необходимо обеспечить строго идентичные условия испытаний пластины в исходном и поврежденном состоянии, а при низкой демпфирующей способности пластины также оценить уровень рассеяния энергии, обусловленного трещиной.

Заключение. С использованием изложенной ранее авторами методики получены приближенные аналитические выражения для определения относительной энергетической характеристики повреждения κ прямоугольной пластины, обусловленной наличием центральных плоских сквозных и поверхностных полуэллиптических трещин. Расчетные зависимости параметра κ от относительных размеров трещин и места их расположения приведены для пластины, шарнирно опертой по контуру, шарнирно опертой и жестко защемленной по двум краям при свободных остальных. С использованием полученных зависимостей определены вибродиагностические параметры повреждения пластин: относительное изменение собственной частоты и изменение относительной амплитуды второй гармоники колебательного процесса при основном и супергармоническом резонансах. На примере квадратной пластины показано, что при наличии сквозной трещины наиболее чувствительной вибродиагностической характеристикой повреждения является изменение логарифмического декремента колебаний, а при наличии поверхностной трещины – относительная величина второй гармоники колебательного процесса при супергармоническом резонансе.

Резюме

Розглядаються результати аналітичного визначення вібродіагностичних параметрів, що характеризують наявність плоских наскрізних та поверхневих напівеліптичних центральних тріщин нормального відриву в прямокутній однорідній пластині, що має постійну товщину за різних умов закріплювання і форм коливань. Показано, що у випадку наскрізної тріщини найбільш чутливою вібродіагностичною характеристикою пошкодження пластини є зміна величини логарифмічного декремента коливань, за наявності поверхневої тріщини – відносна величина другої гармоніки коливального процесу при супергармонічному резонансі.

1. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.* Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 2. Прямолинейные трещины постоянной глубины // Пробл. прочности. – 2005. – № 1. – С. 43 – 59.
2. *Матвеев В. В.*, *Богинич О. Е.* Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 1. Методика определения параметров повреждения // Там же. – 2004. – № 6. – С. 5 – 16.
3. *Справочник* по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2 т. Т. 1 / Под. ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 448 с.
4. *Вайншток В. А.*, *Варфоломеев И. В.* Оценка погрешностей выражений для коэффициентов интенсивности напряжений трещин эллиптического типа // Пробл. прочности. – 1989. – № 10. – С. 53 – 58.
5. *Newman J. C. and Raju I. S.* An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack // Eng. Fract. Mech. – 1981. – **15**, No. 1-2. – P. 185 – 192.
6. *Варфоломеев И. В.*, *Вайншток В. А.*, *Красовский А. Я.* Критерии и устойчивые формы роста несквозных трещин при циклическом нагружении. Сообщ. 2 // Пробл. прочности. – 1990. – № 9. – С. 11 – 16.
7. *Salawu O. S.* Detection of structural damage through changes in frequency: a review // Eng. Struct. – 1997. – **19**, No. 9. – P. 718 – 723.
8. *Матвеев В. В.*, *Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // Пробл. прочности. – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.
9. *Матвеев В. В.*, *Бовсуновский А. П.* Некоторые аспекты колебаний упругого тела с “дышащей” несплошностью материала // Там же. – № 5. – С. 44 – 60.

Поступила 12. 09. 2005