

## Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения

В. И. Гуляев<sup>а</sup>, В. В. Гайдайчук<sup>б</sup>, И. Л. Соловьев<sup>а</sup>, И. В. Горбунович<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Национальный транспортный университет, Киев, Украина

<sup>б</sup> Киевский национальный технический университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

*Поставлена задача о выпучивании удлиненного сжато-растянутого закрученного вращающегося стержня, содержащего внутренний поток однородной жидкости. Выведены разрешающие уравнения, позволяющие моделировать устойчивость колонн глубокого бурения; предложена методика их решения. Рассмотрены типичные примеры. Найдены критические значения параметров системы, определяющие ее упругое равновесие; построены формы потери устойчивости.*

**Ключевые слова:** бурильная колонна, кручение, вращение, потеря устойчивости, критические параметры, формы выпучивания.

**Введение.** При роторном бурении скважин в коренных породах на глубинах в несколько тысяч метров, когда вращающий момент подводится к верхнему концу бурильной колонны (БК), а усилие на долоте создается силой его тяжести (рис. 1), функционирование системы может сопровождаться возникновением ряда механических явлений, что негативно влияет на весь рабочий процесс. Так, например: потеря устойчивости БК в нижней ее части по типу сжато-изогнутого закрученного стержня; возбуждение продольных колебаний БК под действием различных возмущений технологического характера; возбуждение изгибных колебаний БК, обусловленных геометрическими несовершенствами и дисбалансом всей системы и отдельных ее частей; параметрическое самовозбуждение крутильных колебаний БК, вызванных нелинейными силами трения срывного взаимодействия между режущим инструментом и обрабатываемой породой. Указанные явления могут создавать аварийные ситуации, сопровождающиеся обрывом трубы БК, захватом режущего инструмента в зоне резания породы и загибанием участков БК в породу, отклонением оси скважины от вертикали и ее искривлением.

При теоретическом моделировании статического и динамического поведения БК в процессе бурения возникает необходимость интегрирования дифференциальных уравнений их равновесия и колебаний. Эти задачи сопряжены со значительными аналитическими и вычислительными трудностями, которые возникают на начальной стадии их постановки, и обусловлены сложной комбинацией статических и динамических силовых факторов, действующих на БК при работе. Основным из них является неоднородное поле внутренних продольных сил в БК, формируемое силами тяжести колонны, долота и центраторов, а также вертикальной реакцией взаимодействия долота и разрушаемой породы. Эти силы существенно влияют на устойчивость и колебания БК, как это обычно имеет место в высотных конструкциях башенного типа.

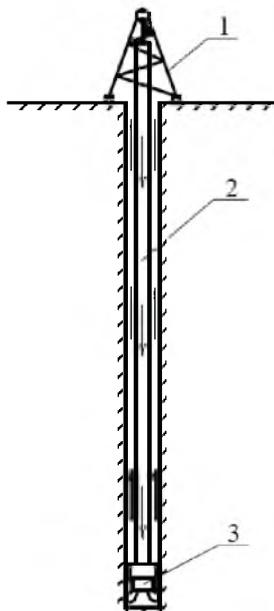


Рис. 1. Схема буровой установки: 1 – буровая вышка; 2 – буровая колонна; 3 – долото.

Не менее важным фактором является также вращение БК, в результате которого генерируются центробежные и кориолисовы силы инерции [1]. Из-за большой длины БК даже при малой угловой скорости вращения часто эти силы служат основной причиной потери устойчивости и, как это бывает в гироскопических системах, исключают возможность колебаний системы по стационарным формам. Эти эффекты достаточно полно изучены в теории вращающихся упругих валов [2]. Однако в БК они реализуются в более сложных формах, поскольку происходят в комбинации с другими механическими явлениями.

При работе БК внутри нее вниз движется промывочная жидкость, необходимая для удаления из скважины измельченных частиц разрушенной породы. Известно, что внутренние потоки жидкости в трубах могут привести к их дивергентной потере устойчивости [3], а если жидкость истекает из свободного конца трубы, то генерируемые ее движением силы являются неконсервативными и возбуждают флаттерные колебания трубы (как это бывает со свободными концами шлангов). Учитывая, что промывочная жидкость имеет плотность, превышающую  $2 \text{ г/см}^3$ , и конечную скорость, можно заключить, что ее влияние на устойчивость и колебания БК также ощутимо. Отметим, что устойчивость и колебания прямолинейных и спиральных труб под действием неоднородных потоков жидкости рассмотрены ранее [4–6].

Как правило, при анализе БК действию крутящего момента, приводящего колонну во вращение и служащего для создания усилия резания породы, уделяется мало внимания. Однако, несмотря на то что крутящий момент остается постоянным по длине БК, его влияние на механическое поведение последней является одним из наиболее ощутимых, поскольку с

ним связано наиболее заметное изменение мод потери устойчивости и колебаний, которые приобретают формы пространственных спиралей. Учет действия крутящего момента существенно усложняет постановку задачи, так как в этом случае перемещения элементов БК в двух взаимно перпендикулярных плоскостях оказываются связанными, и общий порядок дифференциальных уравнений удваивается. В работах [3, 7] поставлены и решены задачи об устойчивости закрученных стержней, преднапряженных постоянными внутренними продольными силами. Если эти силы переменны по длине БК, то аналитические решения построить невозможно.

Работа БК усложняется также наличием на ее нижнем конце вращающегося долота, которое играет роль твердотельного гироскопа. В зависимости от взаимного расположения центра масс этого тела и центра приложения всех сил его вращение может оказывать стабилизирующее или дестабилизирующее воздействие, что влияет на точность обеспечения заданной геометрии осевой линии скважины. При формулировке разрешающих уравнений динамики БК уравнения гироскопического движения долота используются в качестве краевых условий на нижнем конце трубчатого стержня и существенно влияют на форму решения, определяющего специфику колебаний БК. Поскольку в данной работе изучалась устойчивость квазистатического состояния равновесия, используются не уравнения прецессионных колебаний долота, а обычные условия шарнирного опирания.

В процессе работы БК все описанные выше факторы действуют одновременно при различных значениях их определяющих величин, поэтому возникающие механические явления отличаются большим разнообразием и сложностью. Общие закономерности протекания указанных явлений в настоящее время изучены недостаточно. Отметим, что одной из причин является большая длина бурильной колонны. Поэтому поля деформаций, формируемые в БК при потере устойчивости и колебаниях, имеют вид краевых эффектов, в зонах которых протекают наиболее сложные и опасные процессы. Задачи их математического моделирования сопряжены с большими трудностями.

В данной работе рассмотрены вопросы квазистатической устойчивости прямолинейной формы вращающихся БК при различных простейших сочетаниях действующих возмущений и их более сложных комбинациях.

**Уравнения критического равновесия вращающейся бурильной колонны.** Бифуркационное выпучивание вращающейся БК описывается уравнениями ее нейтрального равновесия в возмущенном состоянии, составленными с учетом наличия внутренних продольных сил, крутящего момента, сил инерции от вращения и движения внутреннего потока жидкости.

Введем инерциальную систему координат  $OXYZ$  с началом в точке подвеса БК, ось  $OZ$  совместим с осевой линией колонны. Полагаем, что БК вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  в направлении против хода часовой стрелки, если смотреть с конца оси  $OZ$ . Как это принято в теории устойчивости вращающихся валов [2], свяжем с БК вращающуюся систему координат  $Oxyz$  с осями  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , ось  $Oz$  которой совпадает с осью  $OZ$ , и потерю устойчивости БК будем изучать в этой системе.

Упругое деформирование колонны определяется с помощью функций упругих перемещений  $u(z)$ ,  $v(z)$  в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  соответственно. Для его описания используются уравнения упругого изгиба БК в форме

$$\frac{d^2 M_y}{dz^2} = q_x, \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q_y, \quad (1)$$

где  $M_x$ ,  $M_y$  – внутренние изгибающие моменты в рассматриваемом сечении трубы колонны, действующие относительно осей, проходящих через центр сечения параллельно осям  $Ox$ ,  $Oy$ ;  $q_x$ ,  $q_y$  – интенсивности распределения внешних нагрузок, направленных параллельно соответствующим осям.

Примем, что БК преднапряжена продольной силой  $T$ , обусловленной силами тяжести трубы БК, долота и утяжелителей, и заданным крутящим моментом  $M_z$ . С учетом их действия изгибающие моменты в БК определяются равенствами [3, 7]

$$M_x = EI \frac{d^2 v}{dz^2} - Tv - M_z \frac{du}{dz}, \quad M_y = EI \frac{d^2 u}{dz^2} - Tu + M_z \frac{dv}{dz}. \quad (2)$$

В правых частях этих равенств первые слагаемые обусловлены изгибным деформированием БК, вторые связаны с эксцентриситетом продольной силы  $T$ , третьи характеризуют добавки к изгибающим моментам, вызванные проектированием крутящего момента  $M_z$  на оси  $Ox$ ,  $Oy$  при искривлении осевой линии трубы БК.

Составляющие нагрузок  $q_x$  и  $q_y$  обусловлены действием центробежных сил инерции вращающейся БК с потоком жидкости при ее выпучивании [1, 2, 8]:

$$q_x^и = (\rho F + \rho_{ж} F_{ж}) \omega^2 u, \quad q_y^и = (\rho F + \rho_{ж} F_{ж}) \omega^2 v \quad (3)$$

и действием центробежных сил инерции внутреннего потока жидкости при ее движении вдоль искривленной трубы [4, 8]:

$$q_x^ж = V^2 \rho_{ж} F_{ж} \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad q_y^ж = V^2 \rho_{ж} F_{ж} \frac{d^2 v}{dz^2}. \quad (4)$$

В формулах (3), (4) введены обозначения:  $\rho$ ,  $\rho_{ж}$  – плотности материала трубы БК и жидкости;  $F$ ,  $F_{ж}$  – площади поперечного сечения трубы и ее внутреннего круга;  $\omega$  – угловая скорость вращения трубы;  $V$  – скорость движения потока промывочной жидкости.

Подставив (2)–(4) в уравнения (1), получим уравнения критического равновесия вращающейся БК с внутренним потоком промывочной жидкости, преднапряженной продольной силой  $T$  и крутящим моментом  $M_z$ :

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left( T \frac{du}{dz} \right) - \frac{d^2}{dz^2} \left( M_z \frac{dv}{dz} \right) - (\rho F + \rho_{ж} F_{ж}) \omega^2 u + V^2 \rho_{ж} F_{ж} \frac{d^2 u}{dz^2} &= 0; \\
 EI \frac{d^4 v}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left( T \frac{dv}{dz} \right) + \frac{d^2}{dz^2} \left( M_z \frac{du}{dz} \right) - (\rho F + \rho_{ж} F_{ж}) \omega^2 v + V^2 \rho_{ж} F_{ж} \frac{d^2 v}{dz^2} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Эти уравнения интегрируются при следующих граничных условиях шарнирного опирания:

$$\begin{aligned}
 u(0) = v(0) = 0; \quad u(L) = v(L) = 0; \\
 \frac{d^2 u}{dz^2} \Big|_{z=0} = \frac{d^2 v}{dz^2} \Big|_{z=0} = 0; \quad \frac{d^2 u}{dz^2} \Big|_{z=L} = \frac{d^2 v}{dz^2} \Big|_{z=L} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Значения параметров  $T$ ,  $M_z$ ,  $\omega$ ,  $V$ ,  $L$ , при которых однородная система (5), (6) имеет нетривиальные решения, являются бифуркационными. Они определяют критические квазистатические состояния прямолинейной формы БК.

**Методика численного исследования и ее тестирование.** Приведем систему (5) двух уравнений четвертого порядка к системе восьми уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vec{y}}{dz} = A_1 \vec{y} + T(z) A_2 \vec{y} + \frac{dT(z)}{dz} A_3 \vec{y} + M_z A_4 \vec{y} + \omega^2 A_5 \vec{y} + V^2 A_6 \vec{y}, \tag{7}$$

где  $\vec{y}(z)$  – восьмимерная искомая вектор-функция с компонентами  $y_1 = u$ ,  $y_2 = \frac{du}{dz}$ ,  $y_3 = \frac{d^2 u}{dz^2}$ ,  $y_4 = \frac{d^3 u}{dz^3}$ ,  $y_5 = v$ , ...,  $y_8 = \frac{d^3 v}{dz^3}$ ;  $A_1, \dots, A_6$  – постоянные матрицы коэффициентов размера  $8 \times 8$ .

Вектор-функция  $\vec{y}(z)$  должна удовлетворять граничным условиям (6), которые можно представить в виде

$$A\vec{y}(0) = 0, \quad B\vec{y}(L) = 0, \tag{8}$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные матрицы размера  $4 \times 8$ .

Общее решение системы (7) при заданных  $T(z)$ ,  $M_z$ ,  $\omega$ ,  $V$  представляется в форме Коши

$$\vec{y}(z) = Y(z)\vec{C}, \tag{9}$$

где  $Y(z)$  – матрица Коши размера  $8 \times 8$  решений системы (7) с начальными условиями  $Y(0) = E$ ;  $E$  – единичная матрица;  $\vec{C}$  – искомый постоянный восьмимерный вектор.

При использовании такого подхода вначале при заданных  $T(z)$ ,  $M_z$ ,  $\omega$  и  $V$  путем интегрирования системы (7) методом Эверхарта строится матрица  $Y(z)$  на отрезке  $0 \leq z \leq L$ . Затем путем подстановки сформированного с

ее помощью решения (9) в условия (8) строится однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$D\vec{C} = 0. \quad (10)$$

Состояния, в которых матрица  $D$  вырождается, являются критическими, поскольку в них система (7), (8) имеет как тривиальное, так и нетривиальные решения. Для определения нетривиального решения, определяющего форму потери устойчивости БК, одна из компонент вектора  $\vec{C}$  задается произвольно, а семь других вычисляются из соответствующим образом усеченной системы (10).

Одна из трудностей реализации описанного алгоритма заключается в вычислении матрицы  $Y(z)$  на больших отрезках длины  $L$  колонны, поскольку среди ее элементов встречаются быстро возрастающие функции, и точность численного интегрирования системы (7) обычными численными методами оказывается недостаточной. Она обеспечивалась путем применения высокоточного метода Эверхарта совместно с операцией ортогонализации [8].

Для проверки точности конструируемых решений и сходимости вычислений решены тестовые задачи при некоторых частных значениях функции  $T(z)$  и параметров  $M_z, \omega, V$ . В наиболее простом случае, когда шарнирно опертый стержень сжат приложенными на концах силами  $T$  и параметры  $M_z, \omega, V$  равны нулю, он выпучивается по форме

$$u = U_1 \sin \frac{\pi z}{L} \quad \text{или} \quad v = V_1 \sin \frac{\pi z}{L}, \quad (11)$$

и критическое значение  $T_{кр}$  определяется по формуле Эйлера [3]:

$$T_{кр} = P_э = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \quad (12)$$

При решении этой задачи с помощью разработанной методики для БК длиной  $L = 1500$  м полученное авторами значение  $T_{кр}$  совпало с решением (12) с точностью до восьмой значащей цифры.

В теории устойчивости вращающихся валов [2] путем подстановки (11) в (7) найдено критическое значение угловой скорости

$$\omega_{кр} = \pi^2 \sqrt{EI/\rho F} / L^2, \quad (13)$$

шарнирно опертого вала. Для рассматриваемой БК длиной  $L = 1500$  м значение  $\omega_{кр}$  (13) было подтверждено путем решения уравнений (7) при  $T(z) = 0, M_z = 0, V = 0$ .

Выпучивание шарнирно опертого трубчатого стержня, содержащего внутренний поток однородной жидкости, также происходит по форме (11).

Используя это равенство в качестве решения системы (7) при  $T = 0$ ,  $M_z = 0$ ,  $\omega = 0$ , имеем [5, 6, 8]

$$V_{кр} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho_{ж} F_{ж}}}. \quad (14)$$

С помощью формулы (14) выполнено тестирование устойчивости шарнирно опертого трубчатого стержня длиной  $L = 1500$  м под действием сил инерции потока жидкости, описываемых формулой (4). Результаты тестовых расчетов с высокой точностью совпали со значением  $V_{кр}$ , рассчитываемым по формуле (14).

Более сложный случай имеет место при  $\omega = 0$ ,  $V = 0$ ,  $T = \text{const}$ ,  $M_z = \text{const}$ , поскольку для данной комбинации параметров подстановка (11) не удовлетворяется. Для нее в работах [3, 7] найдено соотношение между критическими значениями  $T_{кр}$  и  $M_z^{кр}$ :

$$M_z^{кр} = \pm 2\sqrt{EI} \sqrt{\pi^2 EI/L^2 + T_{кр}}. \quad (15)$$

Однако форму потерю устойчивости для такой бифуркации построить не удалось. Ниже при тестировании зависимости (15) построена и форма потери устойчивости.

**Результаты расчетов.** Задача анализа устойчивости БК является многопараметрической, поскольку состояния вырождения системы (5), (6) зависят от изгибной жесткости  $EI$ , величины продольной силы  $T$  и характера ее зависимости от координаты  $z$ , крутящего момента  $M_z$ , скорости  $V$  течения промысловой жидкости, длины  $L$  бурильной колонны и наличия исходных геометрических несовершенств. Поэтому всестороннее изучение данного явления представляется необъятной задачей. Ниже рассмотрены только некоторые частные случаи нагружения трубчатой колонны, имеющей длину  $L = 1500$  м, наружный и внутренний диаметр трубы соответственно  $d_1 = 0,355$  м,  $d_2 = 0,327$  м. Модуль упругости материала трубы  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па, плотность  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, ее вес  $G = 17,22 \cdot 10^5$  Н.

Принято, что БК подвешена на верхнем конце  $z = 0$ , на нижнем конце  $z = L$  на нее действует направленная вертикально вверх сила  $R$  контактного взаимодействия долота и породы. С учетом этого БК оказывается преднапряженной внешней вертикальной нагрузкой  $q_z = g\rho F$ , и сила  $T(z)$  определяется равенством  $T(z) = 9,81\rho F(L - z) - R$ . С целью проверки сходимости счета при вычислении методом Эверхарга матрицы Коши  $Y(z)$  шаг интегрирования уменьшался до значений  $\Delta z = L/32000$  и  $L/64000$ , число точек ортогонализации доводилось до 40 и 80.

Поскольку результаты счета при этих значениях расчетных параметров совпали с высокой точностью, дальнейшие расчеты проводили при значении  $\Delta z = L/32000$  с выбором 40 точек ортогонализации.

Рассматривалась простейшая задача о потере устойчивости невращающейся БК, преднапряженной силами тяжести  $q_z = g\rho F$  и вертикальной реакцией  $R$  при  $M_z = 0$ . Методом перебора найдено критическое значение

реакции  $R$ , которое составило  $R_{кр} = 6,23 \cdot 10^4$  Н. При этом значении  $R_{кр}$  нижняя часть трубы длиной  $l = R_{кр}L/G = 54,3$  м оказалась сжатой, часть трубы длиной  $L - l$  над этим участком – растянутой.

Форма потери устойчивости БК при таком напряженном состоянии показана на рис. 2,а. Видно, что основное выпучивание трубы происходит в нижней части, причем на расстоянии  $l_1 = 76,5$  м от ее нижнего края перемещение максимальное.

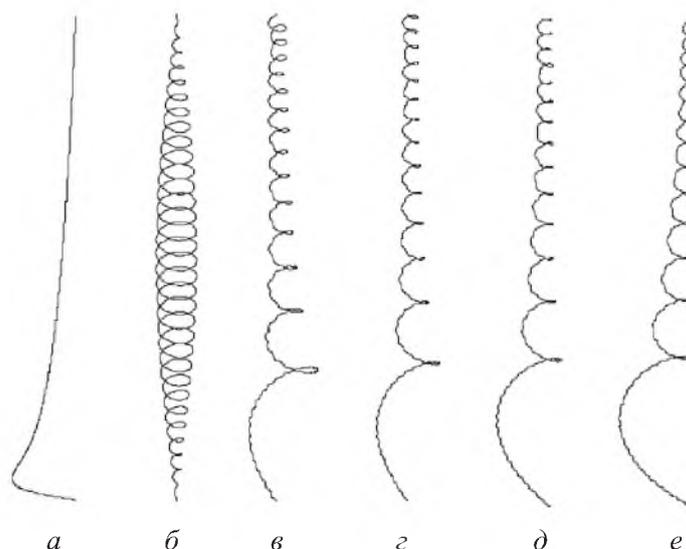


Рис. 2. Формы потери устойчивости закрученных буровых колонн.

Найдены критические состояния БК при совместном действии крутящего момента  $M_z$  и продольной силы  $T$  при  $\omega = 0, V = 0$ . Рассматривалась труба, преднапряженная постоянной силой  $T = G/2 = 8,61 \cdot 10^5$  Н. Критическое значение крутящего момента  $M_z^{кр}$ , определенное по формуле (15), составило  $1,2561 \cdot 10^7$  Н·м. При численном решении задачи оно оказалось равным  $1,25664 \cdot 10^7$  Н·м. Соответствующая этому случаю форма потери устойчивости имеет вид спирали с примерно одинаковыми шагами витков, но с различными значениями их диаметров (рис. 2,б).

Решались задачи об определении  $M_z^{кр}$  для БК, преднапряженной силами тяжести  $q_z$  и опорной реакцией  $R$ , значения которой составляли:  $0, G/100, G/50$  и  $3G/100$ . Отметим, что при заданных  $R$  общий характер изменения силы  $T(z)$  несуществен, поэтому полученные значения  $M_z^{кр}$  (табл. 1) при различных  $R$  изменялись также незначительно. При этом мало изменялись и формы потери устойчивости (рис. 2,в–е для соответствующих значений  $R$ ). Подчеркнем, что все они имеют характерную особенность: их формирование связано с образованием спиральных волн большой длины и амплитуды и наложенных на них коротковолновых вейвлетов, играющих роль дополнительных возмущений. При проверке сходимости вычислений этот тонкий эффект проявляется с высокой точностью.

Т а б л и ц а 1

Критические значения крутящих моментов  $M_z^{\text{кр}}$ 

$R, \text{Н}$	$M_z^{\text{кр}} \cdot 10^{-7}, \text{Н} \cdot \text{м}$
0	1,8376
$G/100$	1,8411
$G/150$	1,8319
$3G/100$	1,8225

Интересно проследить зависимость критического значения угловой скорости  $\omega_{\text{кр}}$  вращения БК от значения  $M_z$  при заданном  $q_z$  и  $V=0$ . Найденные значения  $\omega_{\text{кр}}$  без учета масс жидкости представлены в табл. 2, соответствующие им формы потери устойчивости – на рис. 3. Из данных табл. 2 следует, что нагружение вращающейся БК крутящим моментом при  $R=0$  приводит к увеличению  $\omega_{\text{кр}}$ . Это явление, противоречивое на первый взгляд, можно объяснить тем, что при  $M_z=0$  (№ 1 в табл. 2) форма выпучивания вращающегося стержня плоская (рис. 3,а), центробежные силы инерции лежат в одной плоскости, действуют в одном направлении и их дестабилизирующий эффект складывается. Однако если на вращающийся стержень действует еще и крутящий момент (№ 2–4 в табл. 2), то при выпучивании в его нижней, наименее напряженной, части искривление происходит по спиральной линии, действующие на элементы спирали центробежные силы инерции не лежат в одной плоскости, они нейтрализуют друг друга и их дестабилизирующий эффект уменьшается. Причем с увеличением  $M_z$  это свойство проявляется более заметно (рис. 3,б–г для № 2–4 в табл. 2). К сожалению, попытка аналитической проверки этого эффекта связана со значительными трудностями, и для авторов представляется невозможной.

Т а б л и ц а 2

Критические значения угловых скоростей  $\omega_{\text{кр}}$  вращения бурильных колонн

№ п/п	$R, \text{Н}$	$M_z \cdot 10^{-7}, \text{Н} \cdot \text{м}$	$\omega_{\text{кр}} \cdot 10, \text{с}^{-1}$
1	0	0	1,2989
2	0	0,5	1,4230
3	0	1,0	1,4757
4	0	1,5	1,5101
5	$G/100$	0,5	1,4368
6	$G/50$	0,5	1,3756

Если БК в нижней части имеет участок, сжатый реакцией  $R$ , то критическое значение угловой скорости  $\omega_{\text{кр}}$  уменьшается (рис. 3,д,е для № 5, 6 в табл. 2).

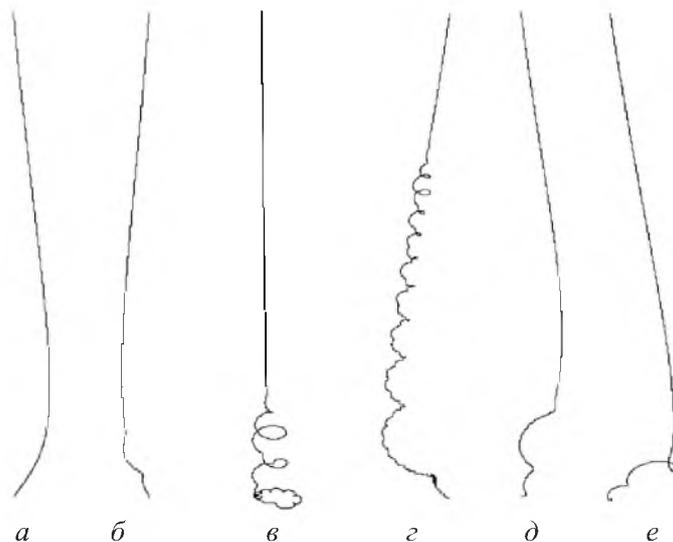


Рис. 3. Формы потери устойчивости вращающихся буровых колонн.

**Заключение.** Полученные результаты свидетельствуют, что устойчивость БК при ее функционировании определяется рядом факторов, дестабилизирующие или стабилизирующие эффекты которых зависят от их сочетания и интенсивности проявления каждого в отдельности. Причем при наложении этих эффектов их действия могут усиливаться или ослабевать.

### Резюме

Поставлено задачу про випинання видовженого стисло-розтягнутого закрученого стрижня, що обертається та містить внутрішній потік однорідної рідини. Виведено розв'язувальні рівняння, що дозволяє моделювати стійкість колон глибокого буріння; запропоновано методику їх розв'язання. Розглянуто типові приклади. Знайдено критичні значення параметрів системи, що визначають її пружну рівновагу; побудовано форми втрати стійкості.

1. Гуляев В. И. Динамика упругих систем при сложном движении (обзор) // Прикл. механика. – 2003. – 39, № 5. – С. 28 – 51.
2. Филипов А. П. Колебания деформируемых систем. – Киев: Наук. думка, 1970. – 673 с.
3. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 237 с.
4. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Абдулаев Ф. Я. Самовозбуждение неустойчивых колебаний в трубчатых системах с подвижными массами // Прикл. механика. – 1997. – № 3. – С. 84 – 90.
5. Gulyayev V. I. and Tolbatov E. Yu. Forced and self-excited vibrations of pipes containing mobile boiling fluid clots // J. Sound Vibration. – 2002. – 257, No. 3. – P. 425 – 437.

6. *Gulyayev V. I. and Tolbatov E. Yu.* Dynamics of spiral tubes containing internal moving masses of boiling liquid // *Ibid.* – 2004. – **274**. – P. 233 – 248.
7. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. – М.: Мир, 1971. – 192 с.
8. *Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 344 с.

Поступила 26. 09. 2005