

Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів*

В. В. Божидарнік^а, В. К. Опанасович^б, П. В. Герасимчук^а

^а Луцький державний технічний університет, Луцьк, Україна

^б Львівський національний університет ім. І. Франка, Львів, Україна

На основі класичної теорії згину пластин досліджено задачу про згин пластини розподіленими моментами на нескінченності з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів. Встановлено умови існування розв'язку задачі у такій постановці. Проведено числовий аналіз коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів, контактної зусилля між краями берегів тріщини, результати якого подано графічно.

Ключові слова: згин, ізотропна пластини, тріщина по дузі кола, плоска задача теорії пружності, класична теорія згину, комплексні потенціали, контактне зусилля, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів.

Вступ. Із фізичних міркувань зрозуміло, що якщо згинати пластину з наскрізною тріщиною, то її береги будуть контактувати. Задача про односторонній згин пластини моментами на нескінченності з наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів вперше була розв'язана в [1]. У тій же постановці [2] досліджено двосторонній згин пластини моментами на нескінченності. При цьому припускалося, що має місце геометрична і фізична симетрія задачі. У даній роботі при дослідженні задачі про двосторонній згин ізотропної пластини з тим же дефектом це припущення не виконується.

Формулювання задачі. Розглянемо двосторонній згин ізотропної пластини постійної товщини $2h$ рівномірно розподіленими моментами M_n і M_τ на нескінченності з наскрізною тріщиною по дузі кола радіуса R з кутом її розкриття 2φ (рис. 1). Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності вони вступають у гладкий контакт по всій її довжині на верхній основі пластини.

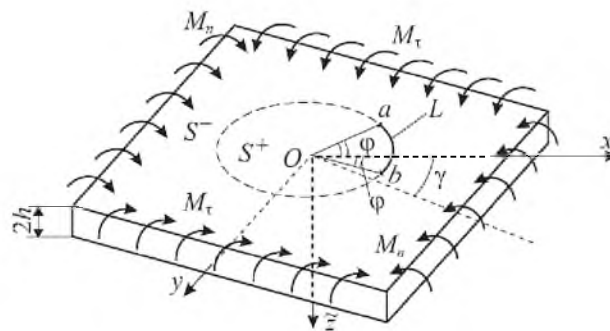


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини.

* За матеріалами доповіді на міжнародній науково-технічній конференції "Динаміка, міцність і ресурс машин і конструкцій" (1–4 листопада 2005 р., Київ, Україна).

Виберемо в серединній площині пластини декартову систему координат $Ox\bar{z}$ із початком у центрі кола і направимо вісь Ox через середину дуги, де розміщена тріщина; останню позначимо через L . Припустимо, що вектор моменту M_τ утворює з віссю Ox кут γ . Кінці тріщини в серединній площині позначимо через a і b , причому $a = Re^{i\varphi}$, $b = Re^{-i\varphi}$. Область, що займає внутрішня частина кола, де розміщена тріщина, позначимо через S^+ , а зовнішня – через S^- . Як і в роботі [3], розв’язок задачі подаємо у вигляді розв’язку двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини, причому для опису згину використаємо класичну теорію. У силу цього на берегах тріщини матимемо такі крайові умови:

$$\sigma_{rr}^\pm = -N_r/(2h), \quad \sigma_{r\theta}^\pm = 0, \quad M_r^\pm = hN_r, \quad P_r^\pm = 0, \quad [v_r] + h[\partial w/\partial r] = 0 \quad \text{на } L,$$

де N_r – контактне зусилля між берегами тріщини; σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ та v_r , v_θ – компоненти тензора напружень і вектора переміщення в полярній системі координат r і θ з початком у точці O і полярною віссю Ox для плоскої задачі; M_r і P_r – згинальний момент та узагальнена в сенсі Кірхгоффа перерізувальна сила в тій же полярній системі координат; w – прогин пластини при згині; $[f] = f^+ - f^-$; “+” і “-” – граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини відповідно справа та зліва по відношенню до вибраного додатного напрямку на ній.

Побудова розв’язку задачі. Для розв’язку плоскої задачі теорії пружності введемо комплексні потенціали [4] та функцію $\Omega(z)$. Тоді напружено-деформований стан пластини будемо визначати за наступними формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= 4\operatorname{Re} \Phi(z); \\ \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} &= \Phi(z) - R^2 r^{-2} \Omega(R^2/\bar{z}) + f(r) \{ \overline{\Phi(z)} - \bar{z} \overline{\Phi'(z)} \}; \\ 2\mu r(v_r + iv_\theta) &= \bar{z} \{ \kappa \varphi(z) + \omega(R^2/\bar{z}) - zf(r) \overline{\Phi(z)} \}, \end{aligned}$$

де μ і ν – відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; $z = x + iy$ (x і y – координати точки, для якої знаходимо шукані величини); $r = |z|$; $\omega'(z) = \Omega(z)$; $f(r) = 1 - R^2/r^2$.

Для розв’язку задачі згину пластини введемо комплексні потенціали $\Phi_3(z)$ і $\Psi_3(z)$ та функцію $\Omega_3(z)$ [5]. У результаті отримаємо залежності

$$\begin{aligned} M_r + M_\theta &= 4\operatorname{Re} \Phi_3(z), \\ m(M_r + ic' + iP_r) &= \tilde{\kappa} \Phi_3(z) + R^2 r^{-2} \Omega_3(R^2/\bar{z}) - f(r) \{ \overline{\Phi_3(z)} - \bar{z} \overline{\Phi_3'(z)} \}; \\ r(\partial w/\partial r + i\partial w/\partial s) &= \bar{z} \{ \varphi_3(z) - \omega(R^2/\bar{z}) + zf(r) \overline{\Phi_3(z)} \}, \end{aligned}$$

де s – дугова координата; c' – дійсна стала; $\omega'(z) = \Omega_3(z)$; $\tilde{\kappa} = (3 + \nu)/(1 - \nu)$; $m = -\{D(1 - \nu)\}^{-1}$; $D = 2Eh^3/(3(1 - \nu^2))$.

У силу обмеженості об'єму статті наведемо кінцеві результати. При цьому зауважимо, що на основі підходу [1, 2] та методів теорії функцій комплексної змінної розв'язок задачі зведено до задач лінійного спряження та диференціального рівняння відносно невідомого контактної зусилля N_r між краями берегів тріщини:

$$N_r = -C\theta + A + B \cos 2(\theta - \gamma), \quad |\theta| \leq \varphi,$$

де

$$A = 0,75 \delta \kappa_1 \{3D_1 c_2 \cos^2 \varphi_1 [3 + v - (1 - v)s_2] +$$

$$+ (1 + s_2)[1 + \mu - D_1(9\kappa_1 s_2 + 3 - v)]\} / [3 + 2v + (1 + 2v)s_2];$$

$$C = -B_1 \sin 2\gamma s_2 [9\kappa_1 c_2 + 3 - v] / \{24[(3 + 2v)s_2 - 6\kappa_1 B]\};$$

$$B_1 = -4,5 \delta d \kappa_1; \quad D_1 = d \cos 2\gamma c_2; \quad d = (\tilde{\mu} - 1) / \{4(3 + 2v)\}; \quad \delta = M_n / h;$$

$$\kappa_1 = 1 + v; \quad \varphi_1 = \varphi / 2; \quad \tilde{\mu} = M_\tau / M_n; \quad c_2 = \cos^2 \varphi_1; \quad s_2 = \sin^2 \varphi_1.$$

Комплексні потенціали для плоскої задачі та задачі згину мають наступний вигляд:

$$\Omega(z) = -\bar{A}_0 - \Phi(z), \quad \Omega_3(z) = \tilde{\kappa} \Phi_3(z) - D'_0 - P / (2z^2); \quad (1)$$

$$\Phi(z) = 0,5 c q(z) + 0,5 [\delta_4 + 0,75 h^{-1} (\tilde{\delta}_1 R^2 z^{-2} + \delta_1 z^2 R^{-2})] -$$

$$- 0,5 X^{-1}(z) [\delta_4 q_1(z) + 0,75 \delta_1 R^{-2} h^{-1} q_2(z) + 0,75 \bar{\delta}_1 R^2 h^{-1} q_3(z)]; \quad (2)$$

$$\Phi_3(z) = q_2 q(z) + 0,5 (q_3 + q_4 z^{-2} + q_5 z^2) -$$

$$- X^{-1}(z) \{0,5 [q_1(z) q_3 + q_5 q_2(z) + q_4 q_3(z)] - (d_1 z + d_0)\}, \quad (3)$$

де

$$q(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{\theta X^+(t) dt}{t - z}; \quad B = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} \theta \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\sin \frac{\varphi + \theta}{2} \sin \frac{\varphi - \theta}{2}} d\theta;$$

$$q_1(z) = z + \gamma_5; \quad q_2(z) = z^3 + \gamma_5 z^2 + \gamma_6 z + \gamma_7; \quad q_3(z) = \gamma_1 z^{-2} + \lambda_2 z^{-1};$$

$$X(z) = \sqrt{(z - a)(z - b)}; \quad \gamma_1 = -R; \quad \gamma_2 = \cos \varphi; \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2; \quad d_1 = \tilde{\Gamma};$$

$$\gamma_6 = 2R^2 c_2 s_2; \quad \gamma_7 = -\gamma_5 \gamma_6; \quad \tilde{\Gamma} = -3\delta(1 + \tilde{\mu}) / (8\beta h); \quad \beta = Eh / (1 - \nu);$$

$$D'_0 = \tilde{\kappa} \tilde{\Gamma} + \bar{A}'_0; \quad \text{Im } A'_0 = 0; \quad P = -2 \bar{\tilde{\Gamma}}' R^2; \quad \tilde{\Gamma}' = -0,5 m M_n (1 - \tilde{\mu}) e^{-2i\gamma};$$

$$c' = 2hc(3 + 2v)/(3\kappa_1); \quad \delta_4 = -A_0 - A/(2h); \quad q_5 = -1,5mh\delta_1/(\tilde{\kappa}R^2);$$

$$\operatorname{Re} A_0 = s_2[-A + 3c_2 \operatorname{Re} \delta_1]/[2h(1 + s_2)]; \quad \delta_1 = -\tilde{\Gamma}'\beta h/(2m\beta h^2 - \tilde{\kappa});$$

$$\operatorname{Im} A_0 = -(2h)^{-1}[cB/c_2 + 3s_2^2 \operatorname{Im} \delta_1]; \quad \beta \operatorname{Re} A'_0 = \beta\tilde{\Gamma} - \operatorname{Re} A_0;$$

$$q_3 = \tilde{\kappa}^{-1}[m(hA + iq_3) + D'_0]; \quad d_0 = \tilde{\Gamma}\gamma_5; \quad q_4 = -1,5mh\tilde{\delta}_1 R^2 \tilde{\kappa}^{-1} + P/(2\tilde{\kappa}).$$

За допомогою виразів для комплексних потенціалів та відповідних залежностей [5] можна визначити коефіцієнти інтенсивності зусиль k_i та моментів K_i :

$$k_1^\pm - ik_2^\pm = -\tilde{M}h^{-1}\{q^\pm + \delta^{-1}[2h\delta_4 e^{\mp i\varphi_1} + 1,5(e^{\mp 3i\varphi_1} - \delta_1 P^\pm)]\};$$

$$K_1^\mp - iK_2^\pm = \tilde{M}\{q^\pm + e^{\mp i\varphi_1}(3 + v)[0,5(\tilde{\mu} - 1) + 2q_2 Eh^3/((1 - v)M_n)]/\kappa_1 - \\ - [9\kappa_1 e^{-2i\gamma} P^\pm + (15 + 7v)e^{i(\mp 3\varphi_1 + 2\gamma)}](\tilde{\mu} - 1)/(16(3 + 2v))\},$$

де

$$P^\pm = -e^{\pm 3i\varphi_1} \pm 0,5i \sin \varphi (e^{\pm i\varphi_1} + \cos \varphi e^{\mp i\varphi_1});$$

$$q^\pm = \frac{q_2}{\pi \sin \varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \theta e^{i(\theta \mp \varphi)} \sqrt{\frac{\sin(0,5(\varphi \pm \theta))}{\sin(0,5(\varphi \mp \theta))}} d\theta; \quad \tilde{M} = M_n \sqrt{R \sin \varphi},$$

тут і надалі індекс чи знак “+” і “-” відповідають відповідно верхній тріщині b і a .

Якщо контакт берегів тріщини не враховувати, то функцію $\Omega_3(z)$ визначимо за формулою (1), а вираз для комплексного потенціалу $\Phi_3(z)$ – з виразу для функції $\Phi_3(z)$ (2), поклавши в ньому $q_2 = q_5 = 0$ і замінивши $q_3 \rightarrow r_0$ і $q_4 \rightarrow r_4$, де $r_0 = \tilde{\kappa}^{-1}(mic' + \tilde{\kappa}\tilde{\Gamma} + A'_0)$; $r_1 = P/(2\tilde{\kappa})$; $c' = -c_2 \operatorname{Im} \tilde{\Gamma}'/m$; $A'_0 = c_2(\tilde{\kappa}\tilde{\Gamma} - s_2 \operatorname{Re} \tilde{\Gamma}')/(\tilde{\kappa} - s_2)$.

Коефіцієнти інтенсивності моментів у цьому випадку знайдемо за формулами

$$K_1^\pm - iK_2^\pm = \pm iD(3 + v) \exp(\mp i\varphi_1) \{2(d_1 \operatorname{Re} e^{\pm i\varphi} + d_0) - \\ - [r_0(\gamma_5 + \operatorname{Re} e^{\pm i\varphi}) + r_1(\gamma_1 R^{-2} e^{\mp 2i\varphi} + \gamma_2 R^{-1} e^{\mp i\varphi})]\} / \sqrt{R \sin \varphi}.$$

Числовий аналіз та висновки. Був проведений числовий аналіз, результати якого подано на рис. 2–5 при $v = 0,3$. Зауважимо, що контакт по всій довжині тріщини відбувається при $\gamma = 0$ для всіх $\tilde{\mu}$, що задовольняють нерівність $\mu_* \leq \tilde{\mu} \leq \mu^*$, при $\tilde{\mu} > \mu^*$ або $\tilde{\mu} < \mu_*$ буде мати місце відставання берегів тріщини. Іншу ситуацію маємо при $\gamma = 30^\circ$.

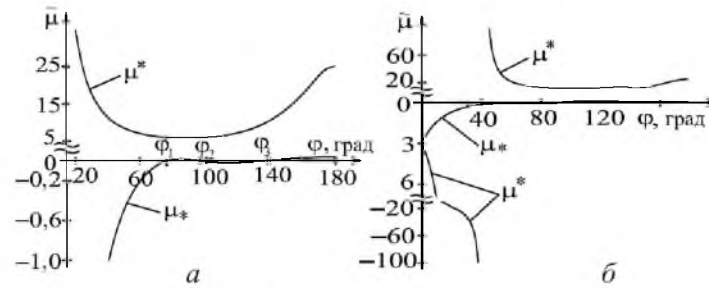


Рис. 2. Гранична залежність $\tilde{\mu} = M_y^\infty / M_x^\infty$ від кута розкриття тріщини при контакті по всій її довжині: *a* – $\gamma = 0$; *б* – $\gamma = 30^\circ$.

При значенні кута розкриття тріщини $\tilde{\varphi} \approx 41^\circ$ μ^* прямує до нескінченності, при $\gamma = 0$ цей кут рівний нулю. Якщо $\varphi < \tilde{\varphi}$, то контакт берегів тріщини буде відбуватися для $\tilde{\mu}$, що задовольняє хоча б одну з нерівностей $\tilde{\mu} \leq \mu^*$ або $\tilde{\mu} \geq \mu_*$, при $\varphi > \tilde{\varphi}$ він буде проходити при виконанні нерівності $\mu_* \leq \tilde{\mu} \leq \mu^*$. Якщо ж вказані нерівності не виконуються, то маємо відставання берегів тріщини (рис. 3). Зауважимо, що при $\tilde{\mu} = 1$ контактний тиск між берегами країв тріщини приймає постійне значення, яке залежить від кута її розкриття.

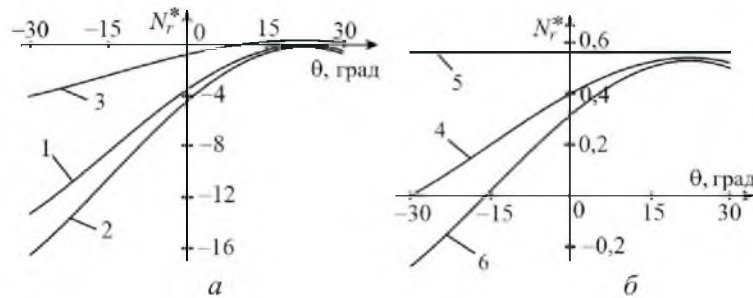


Рис. 3. Розподіл приведенного контактного зусилля $N_r^* = N_r h / M_n$ між берегами тріщини при $\varphi = 30^\circ$ і $\gamma = 30^\circ$ та різних $\tilde{\mu}$: 1 – $\tilde{\mu} = \mu^* = -32,17$; 2 – $\tilde{\mu} = -40$; 3 – $\tilde{\mu} = -10$; 4 – $\tilde{\mu} = \mu^* = -0,34$; 5 – $\tilde{\mu} = 1$; 6 – $\tilde{\mu} = -1$.

Представлені на рис. 2 дані свідчать, якщо заданий кут розкриття тріщини φ відомий, то можна встановити значення $\tilde{\mu}$, коли контакт відбувається по всій довжині тріщини, і навпаки, якщо відоме значення $\tilde{\mu}$, то можна визначити ті кути, коли має місце розв'язок задачі у такій постановці. Наприклад, при $\gamma = 0$ і $\tilde{\mu} = 0$ існують три граничні кути φ_i , коли контакт відбувається по всій довжині тріщини. Окрім того, він буде проходити для кутів розкриття тріщини φ , що задовольняють одну з нерівностей: $\varphi \leq \varphi_1$ або $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3$. Для кругової шайби з того ж матеріалу, що вставлена в пластину без натягу, контакт берегів по всій межі буде відбуватися при $0,04 \leq \tilde{\mu} \leq 25$ незалежно від значення γ . Якщо $\tilde{\mu}$ лежить в межах $\tilde{\mu}_* \leq \mu \leq \mu^*$, то контакт берегів тріщини буде проходити для любого кута розкриття

тріщини φ , де $\tilde{\mu}_* \approx 0,02$ і $\tilde{\mu}^* = 5,79$ для $\gamma = 0$ та $\tilde{\mu}_* = 0,12$ і $\tilde{\mu}^* = 10,87$ для $\gamma = 30^\circ$. Зауважимо, що з ростом γ кут $\tilde{\varphi}$, коли $\tilde{\mu}$ прямує до нескінченності, зростає, і таких кутів може бути декілька.

На рис. 4 криві 1, 3, 5 побудовано при $\mu = \mu^*$, криві 2, 4, 6 – при $\mu = \mu$. Аналіз приведених даних дозволяє оцінити поведінку тріщини, коли $\tilde{\mu}$ незначно відрізняється від граничного. Наприклад, якщо $\tilde{\mu} = 11,29$ і $\varphi = 90^\circ$, то буде мати місце відставання у точці $\theta \approx 26^\circ$, при $\tilde{\mu} = 12,33$ і $\varphi = 150^\circ$ – поблизу кінця точки $\theta = -150^\circ$. У цих випадках потрібно змінити постановку задачі, врахувавши відставання берегів тріщини.

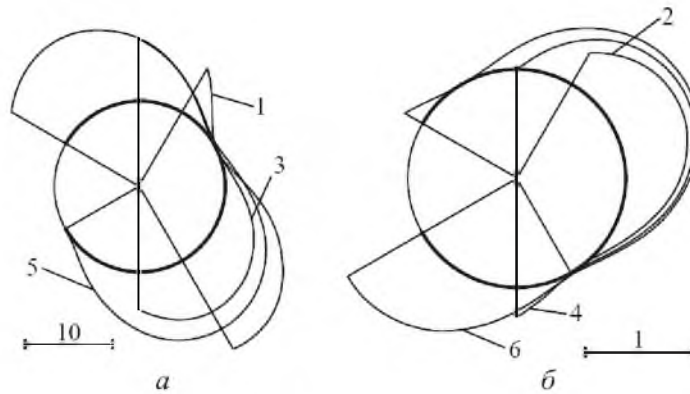


Рис. 4. Розподіл контактної сили N_r^* між берегами тріщини для різних кутів її розкриття при граничному значенні $\tilde{\mu}$ і $\gamma = 30^\circ$: 1, 2 – $\varphi = 60^\circ$; 3, 4 – $\varphi = 90^\circ$; 5, 6 – $\varphi = 150^\circ$.

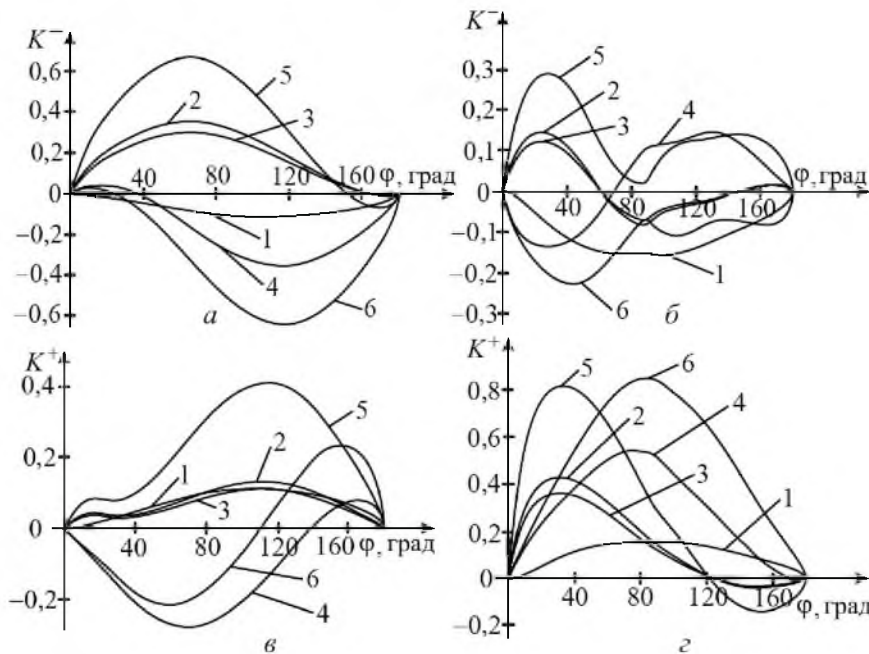


Рис. 5. Гранична залежність приведених коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від кута розкриття тріщини при граничному значенні $\tilde{\mu}$ і $\gamma = 30^\circ$: а, в – $\tilde{\mu} = \mu^*$; б, г – $\tilde{\mu} = \mu$.

На рис. 5 кривим 1 (k_1^*) і 2 (k_2^*) відповідають приведені коефіцієнти інтенсивності зусиль $k_i^* = k_i h / (M_\tau \sqrt{\varphi R})$ ($k_i^* = k_i h / (M_n \sqrt{\varphi R})$), кривим 3 і 5 (K_1^*) та 4 і 6 (K_2^*) – приведені коефіцієнти інтенсивності моментів $K_i^* = K_i / (M_\tau \sqrt{\varphi R})$ ($K_i^* = K_i / (M_n \sqrt{\varphi R})$), причому криві 5 і 6 відповідають випадку, коли контакт берегів тріщини не враховується. Рис. 5,а,б відповідає вершині тріщини *a*, рис. 5,в,г – вершині *b*. Зауважимо, що на відміну від прямолінійної тріщини [3], для тріщини, розміщеної по дузі кола, мають місце коефіцієнти інтенсивності k_2 і K_2 . Окрім того, коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів зв'язані між собою залежністю $k_1^* / K_1^* = 3(1 + \nu) / (3 + \nu)$.

Резюме

На основани классической теории изгиба пластин исследована задача об изгибе пластин распределенными моментами на бесконечности с несимметричной сквозной трещиной по дуге круга с учетом контакта ее берегов. Установлены условия существования решения задачи в такой постановке. Проведен численный анализ коэффициентов интенсивности усилий и моментов, контактного усилия между краями берегов трещины, результаты которого проиллюстрированы графически.

1. Герасимчук П. В., Божидарнік В. В., Опанасович В. К. Односторонній згин пластини з тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Наук. нотатки Луцького техн. ун-ту. – 2003. – С. 57 – 63.
2. Божидарнік В. В., Опанасович В. К., Герасимчук П. В. Двосторонній згин ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2004. – С. 213 – 218.
3. Шацький І. П. Згин пластини, ослабленої розрізом із контактуючими берегами // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49 – 51.
4. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. – 200 с.
5. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.

Поступила 04. 11. 2005