ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2005. Том 7, N 2. С. 8 – 26

УДК 532.5

ВИХРОВА СТРУКТУРА ПОТОКУ ПРИ ОБТІКАННІ КВАДРАТНОЇ ПРИЗМИ: ЧИСЛОВА МОДЕЛЬ

В. О. ГОРБАНЬ, І. М. ГОРБАНЬ

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 20.05.2005

Побудована чисельна модель ламінарної течії в'язкої нестисливої рідини навколо квадратної призми при помірних числах Рейнольдса. Інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса в змінних "завихреність-швидкість" виконується за допомогою алгоритму, в якому конвективний перенос завихреності моделюється рухом Лагранжових вихрових елементів, а диффузія завихреності розраховується на багатошаровій адаптивній сітці. З метою зменшення гідродинамічних навантажень на тіло пропонуються пасивні схеми управління, які грунтуються на використанні тонких пластин, що встановлюються або на лобовій грані призми, або в її сліді. В першому випадку за допомогою двох симетричних пластин досягається зменшення інтенсивності вихорів, що утворюються на передніх ребрах призми, в другому – довга пластина, з'єднана із задньою стінкою призми, використовується для симетризації сліду. Зменшення генерації завихреності біля поверхні тіла призводить до помітного звуження сліду, а також до зниження гідродинамічних навантажень. Показано, що при оптимальному виборі параметрів управляючої системи можна досягти значного зменшення опору тіла.

Развита численная модель ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости вокруг квадратной призмы при умеренных числах Рейнольдса. Интегрирование уравнений Навье-Стокса в переменных "завихренность-скорость" выполняется с применением алгоритма, в котором конвективный перенос завихренности моделируется движением Лагранжевых вихревых элементов, а диффузия завихренности расчитывается на многослойной адаптивной сетке. С целью снижения гидродинамических нагрузок на тело предлагаются пассивные схемы управления, основанные на использовании тонких пластин, которые устанавливаются либо на лобовой грани призмы, либо в ее следе. В первом случае с помощью двух симметричных пластин подавляется интесивность вихрей, генерирующихся на передних ребрах призмы, а во втором – длинная пластина, примыкающая к задней стенке призмы, используется для симметризации следа. Уменьшение генерации завихренности вблизи поверхности тела приводит к сужению следа, что выражается в уменьшении гидродинамических нагрузок. Показано, что при оптимальном выборе параметров управляющей системы сопротивление тела может быть значительно снижено.

A coupled Larangian-Eulerian numerical scheme for modeling the laminar flow of viscous incompressible fluid past a square prism at moderate Reynolds numbers is developed. The two-dimensional Navier-Stokes equations are solved with the vorticity-velocity formulation. The convection step is simulated by motion of Lagrangian vortex elements and diffusion of vorticity is calculated on the multi-layered adaptive grid. To reduce the dynamic loads on the body, the passive control techniques using special thin plates are proposed. The plates are installed either on the windward side of prism or in its wake. In the first case, the installation of a pair of symmetrical plates produces substantial decreasing the intensity of the vortex sheets separating in the windward corners of prism. In the second case, the wake symmetrization is achieved with the help of a long plate abutting upon the leeward surface. Both the ways bring narrowing of the wake and, as a result, decrease of the dynamic loads. With optimal parameters of the control system, the drag reduction is shown to decrease considerably.

ВСТУП

Гідродинамічні характеристики тіла необтічної форми визначаються вихровою структурою потоку поблизу нього. Насамперед, вони залежать від того, відривною чи безвідривною є пристінна течія. У випадку безвідривної течії при великих числах Рейнольдса такі потоки є турбулентними, а опір тіла визначається частотою та інтенсивністю викидів когерентних вихрових утворень із буферної зони пограничного шару в зовнішню область. Незважаючи на малі розміри цих вихрових структур, саме вони визначають енергообмін між потоком і тілом. На загальну картину обтікання тіл впливає також співвідношення між процесами генерації завихреності та її дифузії в пристінній області. Для побудови схем управління, що забезпечували б зменшення опору тіла, в цьому випадку слід розглядати динаміку вихорів, розміри яких є близькими до ширини буферної зони або товщини пограничного шару. Про значні можливості управління вихровою структурою пристінних течій свідчать численні теоретичні і експериментальні дослідження [1 – 4]. Ряд схем і конструкцій, запропонованих для трансформації пристінної течії, наприклад, турбулізатори, генератори вихорів, руйнувачі вихорів, ріблети, поперечні канавки, інжектори спеціальних струменів, знайшли практичне застосування в авіації, морській техніці та в гідравлічних пристроях.

Інший випадок – це відривне обтікання тіл необтічної форми (з гострими ребрами або з великими від'ємними градієнтами тиску над гладкими ділянками поверхні). Воно супроводжується генерацією вихрових структур, розміри яких є співмірними з геометричними параметрами тіла, що обтікається. Утворення вихорів призводить до незворотніх втрат енергії у потоці та вносить неси-

© В. О. Горбань, І. М. Горбань, 2005

метрію у картину обтікання симетричних конструкцій. Гідродинамічні характеристики тіла в даному випадку визначаються динамікою сформованої циркуляційної течії. Нестійкість і динамічні властивості циркуляційної зони визначаються рухом і взаємодією в ній вихрових структур.

Відомо, що в однорідній нестисливій рідині завихреність генерується лише на тілі та на границях області, в якій воно рухається. Інтенсивність генерації завихреності залежить від локальної кривизни поверхні тіла. На гладких ділянках поверхні вона є значно меншою, ніж при обтіканні гострих ребер. Тому інколи можна обмежитись аналізом динаміки завихреності, що сходить з країв тіла. Прикладом такого підходу можуть служити роботи з чисельного аналізу обтікання крил з гострою задньою кромкою [5]. Шари завихреності, сформовані внаслідок відриву, під дією малих випадкових збурень розпадаються на окремі вихори, які, об'єднуючись, утворюють великі циркуляційні зони (нестійкість Кельвіна–Гельмгольца). З часом, внаслідок дії в'язких сил, на динаміку вихрових утворень починають впливати процеси дифузії, зокрема, в'язка дифузія зумовлює генерацію нової завихреності на гладких ділянках поверхні. Таким чином, при обтіканні тіла, як правило, маємо декілька джерел завихреності, розташованих на гострих ребрах, а також на гладких ділянках поверхні. Ці джерела взаємодіють між собою як безпосередньо (змішуванням), так і через гідродинамічне поле швидкості. Практичний інтерес викликає можливість зменшення інтенсивності одного джерела завихреності під впливом іншого. Наприклад, змінюючи взаємне розташування джерел завихреності шляхом трансформації форми тіла, можна істотно зменшити інтенсивність вихорів, які утворюються при обтіканні тіла. В такому випадку відповідно спадає опір тіла та зменшується рівень нестаціонарних бокових сил.

Штучна модифікація структури відривної течії навколо тіла є одним із сучасних напрямків теорії управління потоками. В її основі лежить розробка алгоритмів, спрямованих на формування поблизу тіла крупних вихроутворень із заданими властивостями [6 – 9]. Засоби генерації штучних вихорів можуть бути пасивними (коли мета – подавлення процесів генерації завихреності – досягається модифікацією форми конструкції) або активними (з використанням елементів управління, наприклад, з відбором рідини через щілини чи проникні ділянки поверхні тіла, шляхом інжекції рідини, введення полімерних домішок у пристінну область, шляхом дії електричного та магнітного полів). Перший клас методів не потребує додаткових витрат енергії. Перевагою активних схем управління є їх адаптивність, можливості розвитку та застосування алгоритмів управління зі зворотнім зв'язком, коли інтенсивність і напрямок зовнішнього впливу на потік залежать від умов обтікання.

В даній роботі розглядаються схеми управління структурою течії поблизу тіла необтічної форми, спрямовані на зменшення гідродинамічного опору та вібрації конструкцій в потоці. Це важливо, наприклад, для підвищення надійності будівельних конструкцій, зменшення акустичних шумів та енерговитрат при русі тіл у воді. Для розробки алгоритмів управління важливим є розуміння процесів генерації, еволюції та динаміки вихорів у потоці поблизу тіла. Апробацію нових алгоритмів можна проводити на прикладах обтікання відносно простих тіл. З цієї точки зору широкі можливості апробації алгоритмів управління потоками навколо тіл необтічної форми дає аналіз обтікання квадратної призми.

Вивчення структури течії навколо квадратної призми є важливим як з точки зору поглиблення розуміння закономірностей фізичних процесів, пов'язаних з генерацією та взаємодією відривних циркуляційних зон, одержання типових картин, що формуються при обтіканні тіла необтічної форми, так і для вирішення практичних інженерних задач динаміки та міцності конструкцій, які експлуатуються в потоках води або вітру (обтікання мостових опор, висотних будівель, елементів океанографічного устаткування, офшорних конструкцій).

У значній кількості експериментальних робіт, присвячених вивченню течії за квадратною призмою, аналіз проводився при великих числах Рейнольдса [10 – 13]. Саме цей діапазон є важливим для більшості інженерних задач. Результати досліджень вказують на те, що картина течії за квадратною призмою і її гідродинамічні характеристики значно менше залежать від числа Рейнольдса, ніж це має місце для кругового циліндра, і вже при $\mathrm{Re} > 10^3$ змінюються слабо. Це зумовлено наявністю фіксованого відриву на гострих ребрах, внаслідок чого частота відриву вихорів є приблизно постійною. Зазначимо, що при помірних числах Рейнольдса, $5 \cdot 10 \leq \mathrm{Re} \leq 5 \cdot 10^3$, структура потоку навколо призми є досить складною. Це зумовлює певні зміни числа Струхаля та коефіцієнта опору квадратної призми при зростанні числа Рейнольдса [14].

Перші чисельні дослідження течії за квадратною призмою пов'язані з використанням дискретно-вихрового методу [15 – 17]. Одержані в цих роботах коефіцієнти опору та частоти зри-

ву вихорів близькі до експериментальних значень при $\mathrm{Re} \to \infty$. Зі зменшенням числа Рейнольдса невідповідність розрахованих та експериментальних значень зростає.

Чисельні моделі течії навколо квадратної призми, які враховують в'язкі ефекти, грунтуються на повній системі рівнянь Нав'є-Стокса. В більшості таких досліджень розглядаються двовимірні задачі при малих та помірних числах Рейнольдса. Одним із перших і найбільш повних досліджень у цьому напрямку є робота [18]. Запропонований в ній алгоритм розрахунку комбінує в собі елементи методу сіток та скінченних об'ємів. Зважаючи на обмежені можливості обчислювальної техніки, розрахунки виконано на грубій сітці. Одержані дані для коефіцієнту гідродинамічного опору та числа Струхаля, що характеризує частоту зриву вихорів, на 10-20 % відрізняються від їхніх експериментальних значень.

У роботі [19] вивчення ламінарної течії за квадратним циліндром, що коливається, проводиться методом скінченних об'ємів. Розглянуто основні режими, які виникають внаслідок накладання вимушених коливань циліндра на його власні коливання, викликані зривом вихорів. У роботі [20] цей саме метод використовується для дослідження двовимірної та тривимірної течій за квадратною призмою при помірних числах Рейнольдса. Одержані результати свідчать, що перехід від двовимірного до тривимірного режиму відбувається в діапазоні чисел Рейнольдса від 150 до 200. У той же час показано, що число Струхаля і коефіцієнт опору тіла, одержані при двовимірному моделюванні, є достатньо близькими до їхніх експериментальних значень.

Сітковий чисельний алгоритм, використаний в роботі [21] для аналізу обтікання квадратного циліндра, що повертається навколо поздовжньої осі, грунтується на використанні рівнянь Нав'є-Стокса в змінних "завихреність-функція течії". Перевагою цього підходу є відсутність у рівняннях членів з тиском, що дає можливість використати явні схеми розрахунків по часові і прибирає проблему вибору граничних умов для тиску.

В більшості методів чисельного моделювання в'язких течій нестисливої рідини незалежними шуканими величинами є швидкість і тиск. Більш зручна, з точки зору чисельного моделювання, форма рівнянь Нав'є-Стокса була запропонована в роботі Лайтхілла [22]. Тут як незалежні шукані величини розглядаються швидкість і завихреність. Це дає можливість виділити задачу кінематики рідини, застосувавши узагальнений закон Біо-Савара. Чисельні моделі в рамках такого підходу зводяться до граничного інтегрального рівняння для швидкості. Окремо розглядаються задачі для завихреності, що теж приводять до граничних інтегральних рівнянь [23]. Значною перевагою такого підходу є те, що при розрахунку швидкості враховується лише розподіл завихреності. В більшості задач гідромеханіки область, зайнята завихреною рідиною, є значно меншою за область немалих збурень швидкості. Тому розміри розрахункової області в рамках підходу, що розглядається, можуть бути набагато меншими, ніж у випадку, коли шуканими є функції швидкості і тиску. Більше того, в задачах зовнішнього обтікання тіл граничні умови для швидкості на нескінченності виконуються точно шляхом аналітичного вибору функції Гріна, що входить у рівняння Біо-Савара. В деяких випадках, наприклад для плоскої стінки, так само можна виконати і частину граничних умов на стінці (умову непротікання).

В даній роботі для розрахунку течії за квадратним циліндром і аналізу деяких схем управління пропонується узагальнений вихровий алгоритм. Він грунтується на повній системі рівнянь Нав'є-Стокса в змінних "завихреність-швидкість" і поєднує використання сіток, Лагранжових вихрових частинок та методу дискретних вихорів.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглядається двовимірна задача про обтікання квадратного циліндра в'язкою нестисливою рідиною. Вважаючи, що основними параметрами задачі є швидкість течії на нескінченності U_∞ та довжина сторони квадрату a, отримуємо наступний безрозмірний вигляд рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = (V \cdot \nabla)V = -\triangle p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2 V, \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot V = 0, \qquad (2)$$

де $V(x, y, t)$ – швидкість рідини; $p(x, y, t)$ – тиск; ν – в'язкість рідини; $\mathrm{Re} = U_\infty a/\nu$.

Якщо відносно кожного члена рівняння (1) виконати операцію *rotor* і ввести завихреність $\omega = \nabla \times V$, то, використовуючи (2), одержимо рівняння, яке описує еволюцію та поширення завихреності в області. Для плоских задач, зокрема, маємо:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (V \cdot \nabla)\omega = \frac{1}{Re}\triangle\omega. \qquad (3)$$

З рівняння (3) випливає: якщо в момент часу t швидкість і завихреність в області відомі, то можна знайти розподіл завихреності в наступний мо-

мент часу $t + \Delta t$. Після цього, на основі нових одержаних значень ω, використовуючи формулу Біо-Савара та враховуючи граничні умови на поверхні тіла, знаходимо нові значення швидкості в області. Цей цикл обчислень вперше був описаний Лайтхілом [22]. Відмінність чисельних алгоритмів, що грунтуються на ньому, полягає в способах обчислення дифузії та конвекції завихреності, а також у різних підходах до моделювання процесів генерації завихреності на стінках тіла.

Для розв'язання задачі поширення завихреності ω необхідно виконати граничні умови на тілі і на нескінченності. Для швидкості $V(x, y, t) = V_n(x, y, t) + V_\tau(x, y, t)$ це є стандартні умови непротікання і прилипання:

$$V_n(x, y, t)|_L = U_{n\,body}, \tag{4}$$

$$V_\tau(x, y, t)|_L = U_{\tau\,body}, \tag{5}$$

де $U_{body} = U_{n\,body} + U_{\tau\,body}$ – швидкість тіла, яка в загальному випадку складається із швидкостей поступального та обертального рухів; L – границя тіла.

Вибір граничної умови на поверхні тіла L для функції ω є нетривіальною задачею. Він пов'язаний зі способом описання генерації завихреності стінками тіла. Згідно методу Лайтхіла, поверхня тіла замінюється неперервним вихровим шаром. У цьому випадку значення завихреності на стінці ω_0 зв'язане з інтенсивністю цього вихрового шару γ. Існують різні підходи до знаходження функції ω. Один з них грунтується на тому, що величина розриву дотичної швидкості V_τ в ідеальній нестисливій рідині при переході через вихровий шар дорівнює $\gamma/2$ [24]. Тоді, зважаючи на умову прилипання, на поверхні L повинно виконуватись:

$$V_\tau^0 + \gamma/2 = 0.$$

Якщо врахувати, що $\omega_0 = \gamma/h$ (тут h – задана мала відстань по нормалі від стінки або відповідний крок дискретизації для розрахункової сітки, зв'язаної з тілом), маємо:

$$\omega_0 = -\frac{2V_\tau^0}{h}\bigg|_L. \tag{6}$$

Швидкість V_τ в формулі (6) розраховується безпосередньо на стінці.

В роботах [25, 26] для визначення величини ω_0 пропонується використовувати розклад у ряд Тейлора дотичної швидкості біля поверхні тіла. В такому випадку, наприклад, для горизонтальної стінки отримуємо:

$$\omega_0 = -\frac{2V_\tau(x, h/2)}{h} + \frac{\partial^2 V_\tau}{\partial y^2}\bigg|_{y=0} h/4 + O(h^2) + \ldots. \tag{7}$$

Якщо в формулі (7) залишити лише малі величини першого порядку, то одержимо вираз, який є аналогом відомої формули Томсона в моделі $\omega - \psi$ [26]. Вирази (6), (7) є прикладами умови Діріхлє для функції ω_0. У роботі [27] використовується умова Неймана для потіку завихреності. Треба відзначити, що ще не існує строгого математичного обгрунтування граничних умов для функції ω, яке б співвідносило інтенсивність вихрового шару навколо тіла із завихреністю, що генерується його стінками. В кожному конкретному випадку вибір граничної умови для функції ω визначається особливостями чисельного методу, який використовується для розв'язання рівняння переносу завихреності (3).

Тут розглядається необмежений потік рідини. Тому для збурень швидкості рідини, викликаних тілом, виконується умова затухання:

$$V(x, y, t) \to U_\infty, \quad if \;\; r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty. \tag{8}$$

Формулювання задачі доповнюється початковими умовами:

$$\begin{aligned} V(x, y, 0) &= U_\infty(x, y), \\ \omega(x, y, 0) &= \nabla \times U_\infty(x, y). \end{aligned} \tag{9}$$

2. ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ

Для моделювання течії, що описується рівнянням (3) з відповідними граничними та початковими умовами, в роботі пропонується узагальнений вихровий метод, який поєднує використання сіток і Лагранжових вихрових частинок та грунтується на досвіді побудови чисельних алгоритмів на основі дискретно-вихрових апроксимацій.

Конфігурація розрахункової області і зв'язана з тілом система координат, які використовуються в задачі, показані на рис. 1. Враховуючи, що єдиним джерелом завихреності в потоці є поверхня тіла, на вході в розрахункову область течію можна вважати безвихровою:

$$\omega|_{AB} = 0, \;\; \mathrm{V}|_{AB} = U_\infty. \tag{10}$$

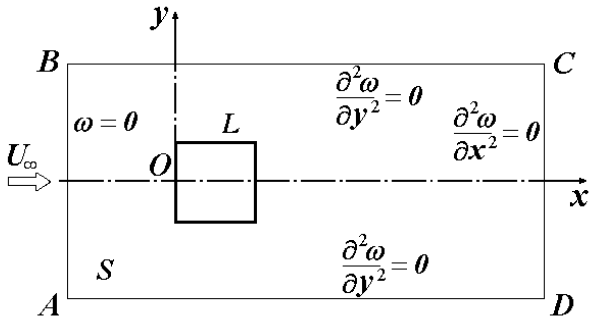

Рис. 1. Розрахункова область

На інших границях цієї області вважаємо [28]:

$$\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right|_{BC} = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right|_{AD} = 0, \qquad (11)$$
$$\left.\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right|_{CD} = 0.$$

Границя тіла L моделюється неперервним вихровим шаром. Для знаходження його інтенсивності γ використовується метод граничних інтегральних рівнянь. З умови непротікання (4) одержуємо наступне рівняння:

$$\int_L \gamma(\overrightarrow{r}', t)\,\frac{\partial G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}')}{\partial n}\,dl(\overrightarrow{r}') + \int_S \omega(\overrightarrow{r}', t)\,\frac{\partial G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}')}{\partial n}\,ds(\overrightarrow{r}') = V_{n\,body}, \qquad (12)$$

де $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{r}' = \overrightarrow{r}'(t)$ – радіус-вектори точок; $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}')$ – функція Гріна, яка для плоскої задачі у випадку безграничної рідини має вигляд:

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}') = \frac{1}{2\pi i}\ln(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}').$$

Крім того, повинна виконуватись теорема про постійність циркуляції в області:

$$\int_L \gamma(\overrightarrow{r}', t)\,dl(\overrightarrow{r}') + \int_S \omega(\overrightarrow{r}', t)\,ds(\overrightarrow{r}') = 0. \qquad (13)$$

Поле швидкості в області визначається на основі теореми Біо-Савара:

$$V(\overrightarrow{r}, t) = U_\infty + \int_L \gamma(\overrightarrow{r}', t)\,\frac{\partial G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}')}{\partial n}\,dl(\overrightarrow{r}') + \int_S \omega(\overrightarrow{r}', t)\,\frac{\partial G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}')}{\partial n}\,ds(\overrightarrow{r}'). \qquad (14)$$

Поле завихреності апроксимується системою Лагранжових вихрових елементів, тобто таких частинок, що рухаються разом з рідиною та мають циркуляцію:

$$\omega(\overrightarrow{r}, t) \approx \sum_k \Gamma_k f_\delta(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_k), \qquad (15)$$

де Γ_k, $\overrightarrow{r}_k$ – циркуляція і положення $k-$го вихора; $f(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_k)$ – функція вихора, яка в ідеальній рідини дорівнює функції Дірака; δ – радіус ядра вихора (вважається, що в ядрі вихора в'язкі ефекти є істотними, а поза ним поле швидкості потенційне).

Якщо на поле течії накласти сітку таким чином, що в кожній її клітинці з номером k рівномірно розподілена завихреність $\omega(x_k, y_k, t)$, то циркуляція вихрової частинки, яка відповідає цій клітинці, дорівнює:

$$\Gamma_k(t) = \omega(x_k, y_k, t)\triangle s_k, \qquad (16)$$

де $\triangle s_k$ – площа елемента сітки.

Введення ядра вихора та функції f_δ є одним із способів регуляризації руху вихорів, що широко використовується в сучасних вихрових методах [29 – 31]. Такий підхід дозволяє позбутися сингулярності в точці розташування вихора, яка призводить до виникнення неправдиво великих швидкостей, викликаних (індукованих) сусідніми вихорами. Замість точкових вихорів розглядаються так звані вихрові каплі ("vortex blobs") з радіусом ядра δ. Докладна дискусія, що стосується вибору функції f_δ і радіусу δ, наведена в монографії [31]. У даній роботі використовувалась функція Гауса другого порядку [30]:

$$f_\delta(\overline{r} - \overline{r}_k) = \frac{\exp\left(-(\overline{r} - \overline{r}_k)^2\right)/\delta^2}{\pi\delta^2}.$$

Величина ядра вихора пов'язана з розміром h елемента рівномірної ортогональної сітки співвідношенням:

$$\delta = h^{0.9}.$$

Процес дискретизується по часові з кроком $\triangle t$. На кожному часовому кроці нелінійне рівняння (3)

розщеплюється на два, перше з яких описує поширення завихреності шляхом в'язкої дифузії, а друге – шляхом конвекції:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\triangle\omega, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\,(V\cdot\nabla)\,\omega. \tag{18}$$

Зазначимо, що для чисельного інтегрування системи рівнянь (17), (18) використовується явна схема по часові.

На поле течії накладається рівномірна ортогональна сітка з розмірами клітинки $\triangle x$, $\triangle y$. Тоді кожному елементу сітки відповідає вихор інтенсивності $\Gamma_{ij} = \omega_{ij}\triangle x\triangle y$.

Як вже відзначалося, поверхня тіла моделюється вихровою пеленою. В розрахунковій схемі для знаходження її інтенсивності використовується метод дискретних вихорів [5]. Згідно з ним, сторони квадрата діляться на вихрові відрізки рівної довжини, і кожен з них замінюється дискретним вихором циркуляції Γ_l^*, яка дорівнює інтенсивності пелени вздовж відрізку:

$$\Gamma_l^* = \gamma^*(l)\triangle l, \quad l = 1, 2, ..., N,$$

де $\triangle l$ – довжина відрізку; N – кількість вихорів, розташованих вздовж границі (приєднаних).

Контрольні точки, в яких виконуються інтегральні рівняння (12), (13), розташовуються посередені між сусідніми вихорами. Тоді знаходження інтенсивності вихрової пелени, що моделює границю тіла, зводиться до розв'язання (на кожному кроці по часові) N лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих циркуляцій приєднаних вихорів:

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{N}\Gamma_l^*(v_n^*)_{ml} = -\,2\pi U_\infty - \\
&-\sum_i\sum_j\Gamma_{ij}(v_n)_{mij},\ m = 1, 2, ..., N-1, \\
&\sum_{l=1}^{N}\Gamma_l^* = -\sum_i\sum_j\Gamma_{ij},
\end{aligned} \tag{19}$$

де $(v_n^*)_{ml}$ – нормальна швидкість, що індукується в m-ній контрольній точці l-тим приєднаним вихором; $(v_n)_{mij}$ – нормальна швидкість в m-ній контрольній точці від вихорів, розташованих у вузлах сітки поза границею тіла.

Розв'язавши систему (19) і застосувавши формулу (6), знаходимо завихреність ω на стінках тіла. Щоб забезпечити виконання умови Куття-Жуковського в гострих кромках квадрата, сітка вздовж його поверхні накладається таким чином, що в кутових точках знаходяться вихори. Ці вихори вважаються вільними, тобто рухаються з місцевою швидкістю рідини. Такий підхід був запропонований С.М. Білоцерківським і успішно використовувався для розрахунку обтікання крил та тіл необтічної форми дискретно-вихровим методом [5].

З урахуванням дискретизації поля течії і поверхні тіла формула (14) для обчислення компонент швидкості u, v в області приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= U_\infty - \sum_{l=1}^{N}\frac{\Gamma_l^*}{2\pi}\,\frac{y-y_l}{(x-x_l)^2+(y-y_l)^2}\times \\
&\times\left(1-\exp\left[(x-x_l)^2+(y-y_l)^2\right]/\delta^2\right) - \\
&-\sum_i\sum_j\frac{\Gamma_{ij}^*}{2\pi}\,\frac{y-y_{ij}}{(x-x_{ij})^2+(y-y_{ij})^2}\times \\
&\times\left(1-\exp\left[(x-x_{ij})^2+(y-y_{ij})^2\right]/\delta^2\right), \\
v(x,y) &= \sum_{l=1}^{N}\frac{\Gamma_l^*}{2\pi}\,\frac{x-x_l}{(x-x_l)^2+(y-y_l)^2}\times \\
&\times\left(1-\exp\left[(x-x_l)^2+(y-y_l)^2\right]/\delta^2\right) + \\
&+\sum_i\sum_j\frac{\Gamma_{ij}^*}{2\pi}\,\frac{x-x_{ij}}{(x-x_{ij})^2+(y-y_{ij})^2}\times \\
&\times\left(1-\exp\left[(x-x_{ij})^2+(y-y_{ij})^2\right]/\delta^2\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Для розв'язання рівняння в'язкої дифузії (17) похідні другого порядку по просторових змінних апроксимуються на рівномірній сітці центральними різницями. Похідна по часові апроксимується за явною схемою першого порядку. Тоді, якщо відомі значення завихреності у вузлах сітки в момент часу t, її нові значення $\omega^{t+\triangle t}$ знаходяться за формулою:

$$\begin{aligned}
\omega_{ij}^{t+\triangle t} = \omega_{ij}^t + \frac{\triangle t}{\mathrm{Re}}\Bigg(&\frac{\omega_{i+1\,j}^t - 2\omega_{i\,j}^t - \omega_{i-1\,j}^t}{\triangle x^2} + \\
&+\frac{\omega_{i\,j+1}^t - 2\omega_{i\,j}^t - \omega_{i\,j-1}^t}{\triangle y^2}\Bigg).
\end{aligned} \tag{21}$$

Зазначимо, що застосування формули (21) вносить похибки в розрахунки, які є джерелом штучної в'язкості. Ця схемна в'язкість залежить від

кроків дискретизації як по часові, так і по простору. Вона пов'язана, зокрема, з неврахуванням дифузії на першому прилеглому до стінки шарові сітки у напрямку нормалі до поверхні тіла. Для зменшення похибки та штучної в'язкості можна використати точний розв'язок рівняння (17), який має вигляд [32]:

$$\omega^{t+\triangle t}(r) = \int_S \omega^t(\overrightarrow{r}')\, G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}')\, d\overrightarrow{r}', \qquad (22)$$

де $G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}')$ – функція Гріна,

$$G(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r}') = \frac{\mathrm{Re}}{4\pi\triangle t}\, \exp\left[-\frac{1}{4\triangle t}\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'\right)^2\right].$$

Математичні аспекти застосування цієї схеми та проблеми, пов'язані з врахуванням впливу границь на процес дифузії, розлянуті в роботі [33].

Підхід на основі функції Гріна (22) є більш точним, але вимагає значних ресурсів комп'ютера. Ефективність використання формул (21), (22) залежить від числа Рейнольдса. Формула (21) є ефективнішою при невеликих числах Рейнольдса, переваги другої схеми зростають із його збільшенням.

Рівняння (18) співпадає з відповідним рівнянням, яке описує рух завихреності в ідеальній нестисливій рідині, де вихори рухаються разом із частинками рідини, а їхня інтенсивність не змінюється з часом. Тому замість нього можна розглядати рівняння руху вихрових частинок x_v, y_v:

$$\begin{aligned} \frac{dx_v}{dt} &= u_v, \\ \frac{dy_v}{dt} &= v_v. \end{aligned} \qquad (23)$$

Такий підхід використовується в традиційних вихрових алгоритмах [31], які потребують проведення складної процедури перерозподілу циркуляції вільного вихора на вузли сітки (regridding). Зазначимо, що чисельне інтегрування рівнянь (23) та застосування наближених (regridding) алгоритмів, істотно підвищують штучну в'язкість розрахункової схеми.

У цій роботі для інтегрування рівняння (18) пропонується розглядати поле течії як сукупність дискретних об'ємів, для кожного з яких виконується закон збереження завихреності:

$$\int_{\triangle Q} \frac{\partial \omega}{\partial t} dq = -\int_{\triangle S} \omega \left(\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n}\right) dS, \qquad (24)$$

де $\triangle Q$ – дискретний об'єм, на які поділена область течії; $\triangle S$, $\overrightarrow{n}$ – поверхня цього об'єму та зовнішня

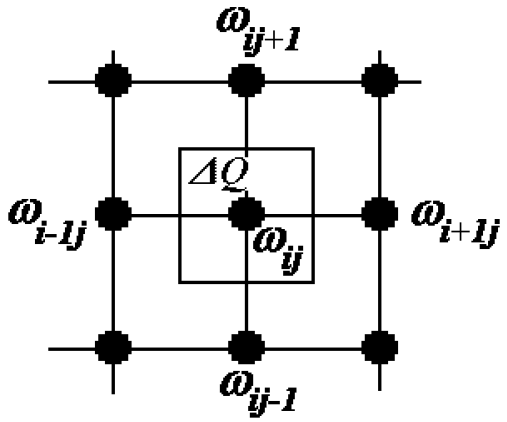

Рис. 2. Схема елемента сітки

нормаль до неї. З кожним дискретним об'ємом пов'язаний вузол сітки (x_{ij}, y_{ij}) із завихреністю ω_{ij} (рис. 2). Виходячи з (24), конвекція завихреності для цього елемента сітки в заданий момент часу t описується наступним виразом:

$$\frac{\triangle \omega_{ij}^t}{\triangle t}\triangle x \triangle y \approx \omega_{i-1j}^t u_{i-1j}^t \triangle y + \omega_{ij-1}^t v_{ij-1}^t \triangle x - $$
$$-\omega_{i+1j}^t u_{i+1j}^t \triangle y - \omega_{ij+1}^t v_{ij+1}^t \triangle x - $$
$$-\omega_{ij}^t u_{ij}^t \triangle y - \omega_{ij}^t v_{ij}^t \triangle x.$$

Звідси одержуємо циркуляцію вихрового елемента, що розглядається, в наступний момент часу $t + \triangle t$:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ij}^{t+\triangle t} = \Gamma_{ij}^t + \\ &+ \left(\omega_{i-1j}^t u_{i-1j}^t \triangle y + \omega_{ij-1}^t v_{ij-1}^t \triangle x - \right. \\ &-\omega_{i+1j}^t u_{i-+1j}^t \triangle y - \omega_{ij+1}^t v_{ij+1}^t \triangle x - \\ &\left. -\omega_{ij}^t u_{ij}^t \triangle y - \omega_{ij}^t v_{ij}^t \triangle x\right) \triangle t. \end{aligned} \qquad (25)$$

Компоненти швидкості вихорів u, v знаходяться за виразами (20). Треба відзначити, що сітка, яка накладається на поле течії, є адаптивною, в тому сенсі, що в кожний момент часу розглядаються лише ті її вузли, в яких завихреність не дорівнює нулю. Ця особливість дозволяє значно оптимізувати розрахунки поля швидкості.

В цілому алгоритм обчислень на кожному кроці по часові виглядає наступним чином:

1. По відомим з попереднього кроку значенням завихреності в області із системи алгебраїчних рівнянь (19) визначається інтенсивність приєднаного вихрового шару та вихорів, розташованих у гострих кромках границі.

2. Із граничної умови (6) знаходиться завихреність, що генерується поверхнею тіла.

3. Використовуючи граничні умови (10), (11), обчислюються значення завихреності на границях розрахункової області.

4. Чисельним інтегруванням рівняння дифузії за формулою (21) розраховуються проміжні значення завихреності ω_{ij}^{*} у внутрішніх точках області течії.

5. З урахуванням одержаного розподілу завихреності коректується інтенсивність приєднаного вихрового шару так, щоб задовільнялася умова непротікання через поверхню.

6. По отриманому полю завихреності за формулами (20) визначається поле швидкості в області.

7. На основі формули (25) розраховується конвекція вихрових елементів. За одержаними величинами $\Gamma_{ij}^{t+\triangle t}$ визначаються нові значення завихреності $\omega_{ij}^{t+\triangle t}$.

3. РОЗРАХУНОК ГІДРОДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Для обчислення гідродинамічної сили, яка діє на тіло, що рухається в однорідній рідині, може бути використана теорема імпульсів:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{V}\, dr, \tag{26}$$

де $\overrightarrow{F} = (F_x,\, F_y)$; S – область, заповнена рідиною; $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{r}(x, y)$ – швидкість і радіус-вектор частинок рідини відповідно.

Із рівняння нерозривності та з визначення завихреності ω випливає наступна формула для швидкості рідини:

$$\overrightarrow{V} = (\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{\omega}) + \nabla \cdot (\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{V}) - \nabla(\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{V}), \tag{27}$$

підставивши яку в (26) і перетворюючи інтеграли, можно одержати вираз для сили, який буде залежати лише від характеристик поля завихреності [34 – 35]:

$$\overrightarrow{F} = -\frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}\, d\overrightarrow{r}. \tag{28}$$

Звідси випливають формули для розрахунку опору і під'ємної сили:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{d}{dt}\int_S \omega y ds, \\ F_y &= \frac{d}{dt}\int_S \omega x ds. \end{aligned} \tag{29}$$

Зазначимо, що складова сили F_x в (29) включає в себе як опір форми, так і опір тертя.

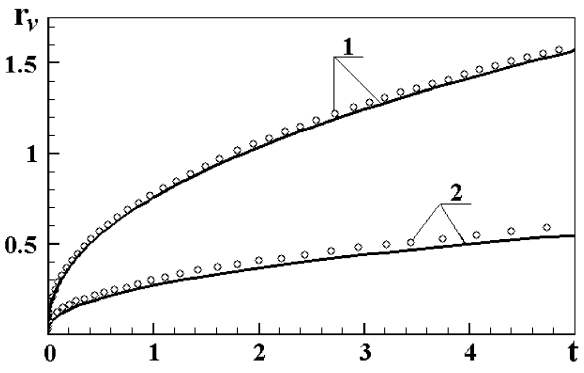

Рис. 3. Залежність радіуса вихора від часу у випадку дифузії вихора в необмеженій області. Порівняння результатів розрахунку (∘ ∘ ∘) для радіуса вихора r_v із точним розв'язком (——): **1** – $\mathrm{Re} = 10^2$, **2** – $\mathrm{Re} = 10^3$

Оскільки поле завихреності розглядається як суперпозиція вихрових частинок з інтенсивностями Γ_{ij} і координатами $(x_{ij},\, y_{ij})$, маємо дискретний вигляд формул (29):

$$\begin{aligned} F_x &= -\sum_i \sum_j \left(\frac{d\Gamma_{ij}}{dt}\, y_{ij} + \Gamma_{ij} v_{ij}\right), \\ F_y &= \sum_i \sum_j \left(\frac{d\Gamma_{ij}}{dt}\, x_{ij} + \Gamma_{ij} u_{ij}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Безрозмірні коефіцієнти гідродинамічних сил визначаються наступним чином:

$$C_x = \frac{2F_x}{U_\infty^2 a}, \quad C_y = \frac{2F_y}{U_\infty^2 a}. \tag{31}$$

4. АПРОБАЦІЯ ЧИСЕЛЬНОЇ СХЕМИ

Тестування розробленого алгоритму проводилось у декількох напрямках: аналіз чисельної дифузії розрахункової схеми; оцінка точності алгоритму щодо описання генерації завихреності поверхнею тіла, аналіз похибки при визначенні гідродинамічних сил, які діють на тіло, що обтікається.

4.1. Еволюція точкового вихора в необмеженій рідині

У необмежній області задавався точковий вихор інтенсивності Γ_0. Поширення завихреності від нього розраховувалося за формулами (21), (23). Одержаний розподіл завихреності порівнювався з відомим точним розв'язком рівняння Нав'є-Стокса,

що описує розвиток двовимірного вихора з початковою циркуляцією Γ_0 у в'язкій рідині [35]:

$$\omega(x,y,t) = \frac{Re}{4\pi t}\exp\left(-\frac{r^2\mathrm{Re}}{4t}\right), \qquad (32)$$

де $\mathrm{Re} = \Gamma_0/\nu$; $r = \sqrt{x^2, y^2}$; ν – в'язкість рідини.

На рис. 3 наведені залежності радіусу r_v вихора від часу, розраховані на рівномірній сітці $\triangle x = \triangle y = 0.01$ з кроком по часові $\triangle t = 0.0025$ (маркери), та точні значення r_v, одержані з використанням формули (32) (суцільна лінія). Радіус вихора визначався із співвідношення:

$$\omega|_{r>r_v} < 10^{-5}.$$

Із рис. 3 випливає, що у випадку $\mathrm{Re} = 10^2$ чисельна дифузія є незначною, а для $\mathrm{Re} = 10^3$ вона не перевищує 10%. Збільшення чисельної дифузії при великих числах Рейнольдса пов'язане з невідповідністю параметрів дискретизації: кроки $\triangle x$, $\triangle y$ занадто великі для такого числа Рейнольдса. Кращий результат досягається, якщо $\triangle x$, $\triangle y \approx 1/\mathrm{Re}$. Порівняння кривих на рис. 3 свідчить про збіжність чисельного алгоритму при помірних числах Рейнольдса.

Вибір величини параметра $\triangle t$ пов'язаний із розмірами елементів сітки і локальною швидкістю течії. Для забезпечення стійкості алгоритму необхідно, щоб переміщення вихорів за один крок по часові не перевищували мінімального розміру елементів сітки $\triangle x$, $\triangle y$. У більшості випадків для цього достатньо, щоб крок $\triangle t$ був на порядок меншим за розмір елементів сітки.

4.2. Обтікання пластини

Для оцінки точності розробленого чисельного алгоритму щодо описання процесів генерації завихреності поверхнею тіла розв'язувалась задача про поздовжнє обтікання пластини. Характерними параметрами задачі є швидкість потоку U_∞ і довжина пластини L, так що: $Re_L = U_\infty L/\nu$, $\overline{x} = x/l$, $\overline{y} = y/l$. Генерація завихреності розраховувалась на основі граничної умови (6). Для моделювання поширення завихреності використовувались формули (21), (23). Результати розрахунків порівнювались із розв'язком Блазіуса, відомим з теорії пограничного шару [36]. На рис. 4, 5 представлені стаціонарний профіль поздовжньої швидкості $\overline{u} = u/U_\infty$ для середини пластини та безрозмірний коефіцієнт тертя

$$\overline{C}_f = \frac{2}{\mathrm{Re}_L}\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{wall} = -\frac{2}{\mathrm{Re}_L}\,\omega\,|_{wall} \qquad (33)$$

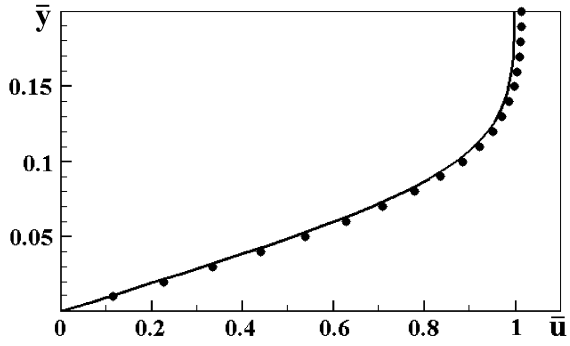

Рис. 4. Профіль поздовжньої швидкості в пограничному шарі для середини пластинки при $\mathrm{Re}_L = 10^3$: —— розв'язок Блазіуса, • розрахунок

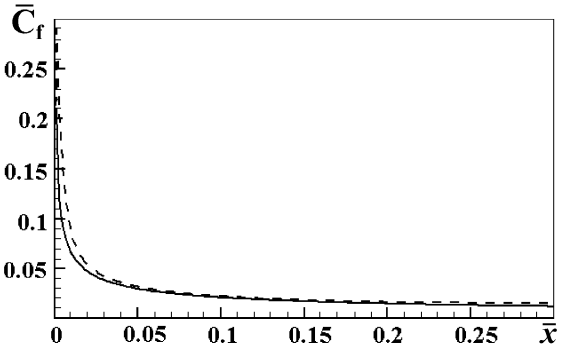

Рис. 5. Залежність коефіцієнту тертя від поздовжньої координати пластини при $\mathrm{Re}_L = 10^3$: —— розв'язок Блазіуса, - - - розрахунок

на пластині, отримані чисельно та за розв'язком Блазіуса при $\mathrm{Re}_L = 10^3$. Порівняння цих результатів свідчить про високу точність прийнятої схеми при моделюванні полів швидкості і завихреності та при визначенні гідродинамічної сили опору тертя пластини.

4.3. Обтікання квадратної призми

Розроблений чисельний алгоритм використано для моделювання ламінарної двовимірної течії за квадратною призмою при помірних числах Рейнольдса. Проведені розрахунки, з одного боку, дозволили виявити деякі закономірності формування відривних течій, а з іншого – доповнити апробацію чисельної схеми порівнянням одержаних характеристик з відомими експериментальними даними та аналогічними числовими результатами інших дослідників.

Розрахунки проводились у діапазоні чисел Рейнольдса Re від 70 до $5 \cdot 10^3$. Подальше збільше-

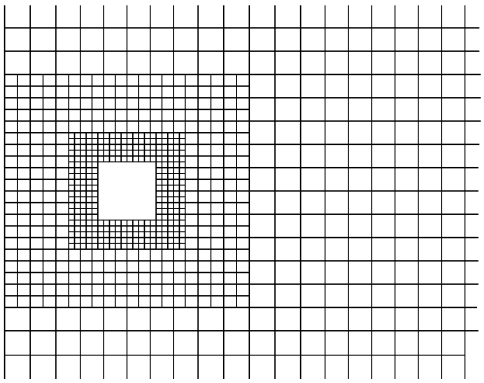

Рис. 6. Конфігурація сітки

ння числа Рейнольдса потребує як значних розрахункових зусиль, пов'язаних зі зменшенням розмірів елементів сітки, так і залучення моделей турбулентності. Сітка, що використовувалась у розрахунках, мала квадратні елементи і складалася з трьох рівнів (рис. 6), що відрізняються густиною. На першому рівні, який межує з тілом, розміри елементів сітки пов'язуються із кількістю приєднаних вихорів N, розташованих вздовж стінок призми (на стороні квадрата). На наступних рівнях розміри елементів сітки збільшуються (подвоюються). Більшість розрахунків виконано при $N = 100$.

На рис. 7 показані одержані в розрахунках миттєві розподіли завихреності в сліді квадратного циліндра для різних чисел Рейнольдса при $\tau = 25$ ($\tau = tU_\infty/a$). Ці результати вказують на те, що картина течії за квадратним циліндром істотно залежить від Re. При $\mathrm{Re} \le 100$ циркуляційні зони, що безпосередньо прилягають до тіла, мають видовжену форму (рис. 7, *a*). Інтенсивність вихрових структур, що відриваються від цих зон, є порівняно невеликою. Взаємодія між структурами в сліді призводить до формування регулярної доріжки вихорів. При збільшенні числа Рейнольдса довжина циркуляційних зон за тілом зменшується, а інтенсивність вихрових згустків, що відриваються, пропорційно зростає. Відповідно посилюється взаємодія вихорів у сліді, помітно збільшується його ширина. Оскільки в слід надходить більша кількість завихреності, зростає і опір циліндра. При $\mathrm{Re} \ge 1000$ початок вихрової доріжки наближається до тіла (рис. 7, *d, e*). Зростання циркуляції вихорів призводить до інтенсифікації їх взаємодії, внаслідок чого зростає ширина доріжки та відбуваються значні деформації окремих вихрових

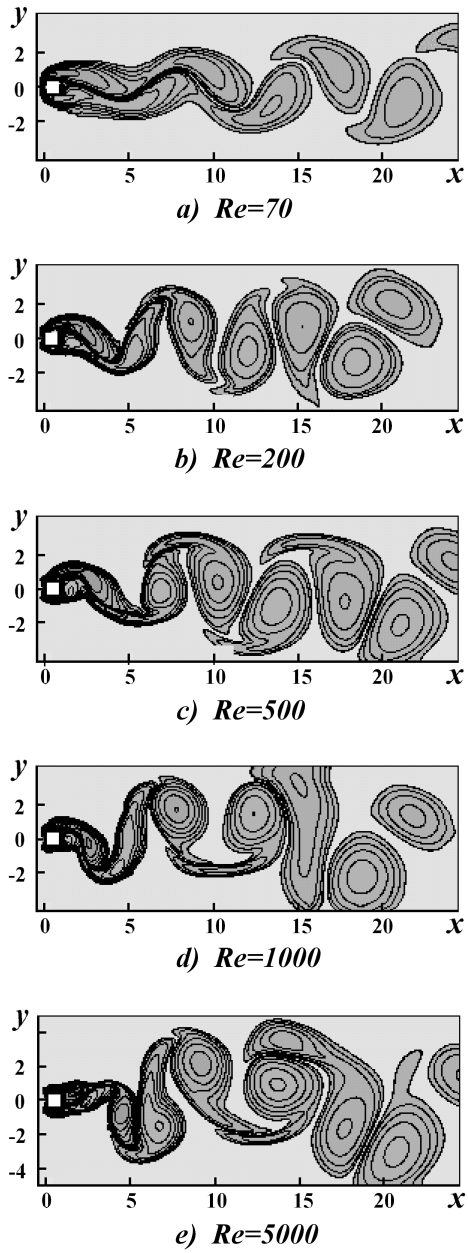

Рис. 7. Розподіл завихреності в сліді квадратного циліндра при різних числах Рейнольдса, $\tau = 25$

структур (навіть до їх розпаду).

Перелічені особливості течії корелюють із залежностями миттєвих коефіцієнтів опору C_x та під'ємної сили C_y від числа Рейнольдса (рис. 8). Приведені графіки свідчать, що після короткої перехідної фази по часові в сліді за тілом при $\tau > 10$ структура течії наближається до періодичної, яка характеризується числом Струхаля $\mathrm{St} = fa/U_\infty$,

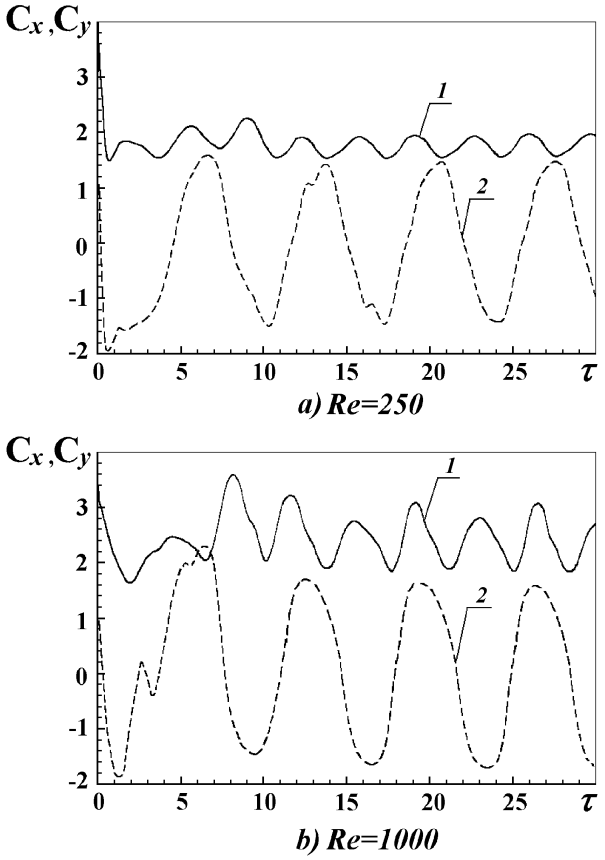

Рис. 8. Залежність від часу коефіцієнтів опору C_x (крива *1*) та під'ємної сили C_y (крива *2*) квадратної призми при різних числах Рейнольдса

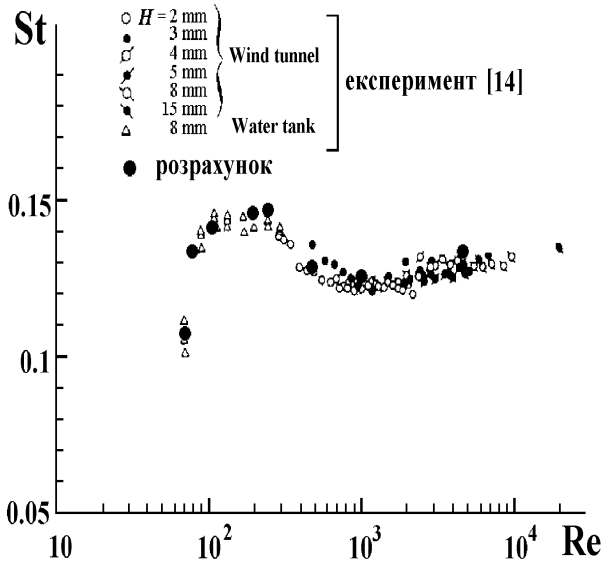

Рис. 9. Залежність числа Струхаля від числа Рейнольдса для течії за квадратною призмою та порівняння одержаних результатів з експериментальними даними [14]

де f – частота відриву вихорів. При $\mathrm{Re} \geq 1000$ з'являється додаткова мода. Це підтверджується результатами розрахунків розподілу завихреності в сліді (рис. 7, *е*).

На рис. 9 результати розрахунків чисел Струхаля порівнюються з даними роботи [14], яка вирізняється широтою експериментальних досліджень течії навколо квадратної призми при помірних числах Рейнольдса. Цей порівняльний графік свідчить про те, що представлена чисельна схема з високою точністю описує процес формування вихрової доріжки за тілом у діапазоні помірних чисел Рейнольдса.

На рис. 10 показані залежності середнього за період коефіцієнту опору $\overline{C}_x$ та амплітуди коливань під'ємної сили C_y^{max} квадратної призми, розраховані за формулами (31), від числа Рейнольдса. Зазначимо, що залежності коефіцієнту опору $\overline{C}_x$ та частоти зриву вихорів (або числа St) від числа Рейнольдса корелюють між собою: збільшення числа Струхаля до $\mathrm{St} = 1.45$ при $\mathrm{Re} = 250$ пов'язане зі зменшенням ширини сліду безпосередньо за квадратом. Це призводить до відповідного зменшення опору (рис. 10, *а*). Звуження сліду пов'язане зі зміною картини обтікання призми. При $\mathrm{Re} > 200$ вихрова циркуляційна зона, що утворюється біля бічної грані призми, зменшується як у поперечному, так і в поздовжньому напрямках (хоча, як свідчать експерименти, приєднання циркуляційної течії до стінки у випадку квадратної призми не відбувається). Подальше збільшення $\overline{C}_x$ пов'язане із розширенням сліду за рахунок зменшення в'язкої дифузії та ростом циркуляції вихорів у сліді. Одержані дані (рис. 10) для величин $\overline{C}_x$, C_y^{max} є близькими до відповідних результатів, представлених у роботах [18 – 19], де розрахунки проводились з використанням методу скінченних об'ємів. Експериментальні дослідження нестаціонарних навантажень на квадратний циліндр стосуються, в основному, великих чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \geq 5 \cdot 10^3$. У цьому випадку течія є істотно тривимірною, а її характеристики залежать від рівня турбулентності в потоці, профілю швидкості, а також параметрів експериментальної установки. Цим пояснюється значна різниця в значеннях $\overline{C}_x$, одержаних у різних експериментах.

У цілому отримані результати підтверджують, що представлена чисельна модель є ефективним інструментом моделювання в'язкої течії і може бути використана для розрахунку потоків за тілами складної конфігурації.

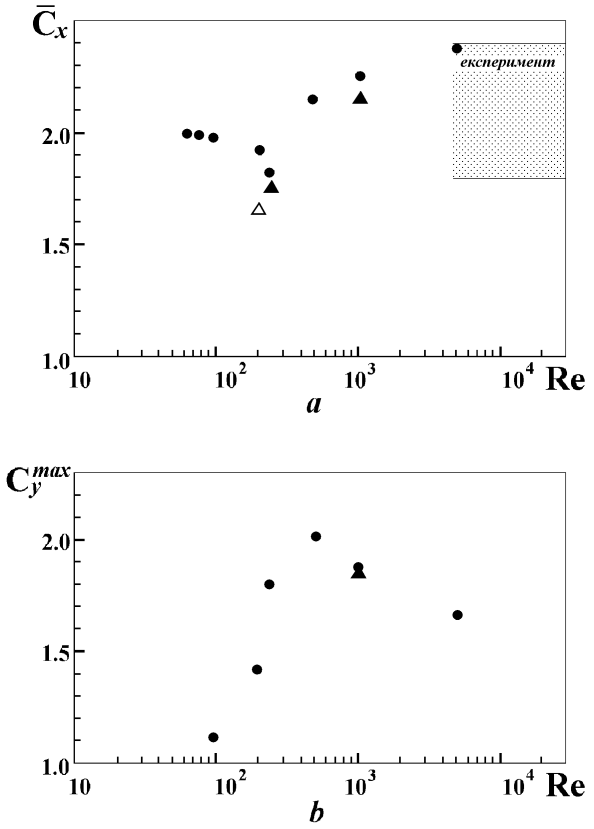

Рис. 10. Залежності середнього за період коефіцієнта опору $\overline{C}_x$ (a) та амплітуди коливань коефіцієнта під'ємної сили C_y^{max} (b) квадратної призми від числа Рейнольдса

5. АЛГОРИТМИ УПРАВЛІННЯ СТРУКТУРОЮ ТЕЧІЇ ПОБЛИЗУ КВАДРАТНОГО ЦИЛІНДРА

Теоретичні і експериментальні дослідження течії навколо прямокутника (двовимірний випадок обтікання прямокутної призми) при помірних числах Рейнольдса показали, що структура сліду і гідродинамічні коефіцієнти опору C_x та під'ємної сили C_y істотно залежать від розмірів та характеру взаємодії між відривними циркуляційними зонами, що формуються за тілом.

Якісно відрізняються два випадки: коли відривна зона над бічною стінкою є локальною (обмеженою); коли відривна циркуляційна зона, що генерується на передньому ребрі призми, є незамкненою, а заднє ребро розташоване всередині цієї зони. В першому випадку взаємодія первинної і кормової відривних зон є слабкою, а розвиток сліду визначається, головним чином, відривом на задньому ребрі. В другому випадку головну роль у формуванні сліду грає відрив на передньому ребрі призми. На фізичних властивостях взаємодії відривних зон, генерованих на передніх та задніх ребрах, грунтується алгоритм управління структурою течії навколо квадратної призми, який розглядається далі.

Метою управління є зменшення опору та нестаціонарних бокових сил, що викликають гідропружні коливання конструкції в потоці. Стратегією такого управління є зниження сумарної інтенсивності вихрових утворень, зменшення потоку завихреності за тілом та мінімізація розмірів сліду. Поліпшення структури течії навколо призми пропонується досягнути за рахунок штучного утворення поблизу неї спеціальних локальних відривних циркуляційних зон (стоячих вихорів). Фізичні експерименти, виконані, зокрема, і в Інституті гідромеханіки НАН України з різноманітними необтічними тілами, продемонстрували ефективність цього підходу для зміни структури обтікання і покращення гідродинамічних характеристик [39 – 40]. Для досягнення необхідного позитивного ефекту штучна відривна зона повинна бути стійкою до зовнішних збурень. В іншому випадку ці збурення будуть викликати викиди завихреності в потік. Крім того, відривна зона повинна бути керованою (коли її розміри змінюються відповідно до зміни умов обтікання). В оптимальному випадку система управління течією повинна мати зворотній зв'язок.

5.1. Дві симетричні пластини на лобовій частині тіла

Розглядається управління течією навколо квадратної призми, яке реалізується за допомогою спеціальних пластин, що встановлюються на передній (лобовій) стінці (рис. 11). В області між такою пластиною і ребром призми формується локальна відривна зона. Експерименти свідчать, що мети управління буде досягнуто, якщо лінія течії, яка відірвалася з краю пластини A, плавно приєднується до кута B.

Для вивчення обтікання тіла з управляючими пластинами (рис. 11) тут пропонується декілька теоретичних моделей. Певні загальні властивості відривного обтікання тіла описує спрощена модель, в якій рідина вважається ідеальною, а циркуляційна зона моделюється одним точковим вихором. Щодо правомірності такої моделі, то вона пов'язана з наявністю загальних динамічних характеристик відривних зон, спільних як для ламі-

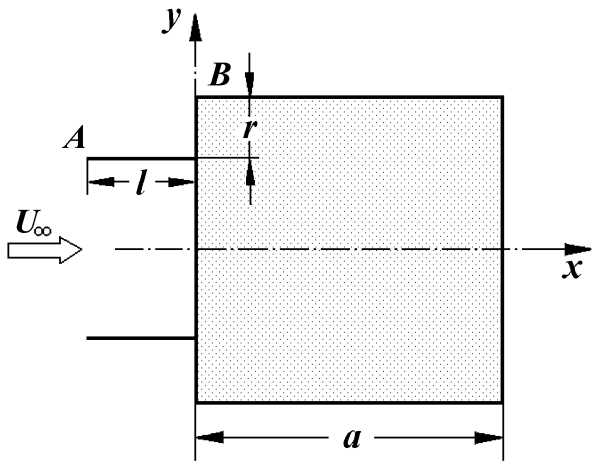

Рис. 11. Конфігурація тіла з управляючими пластинами

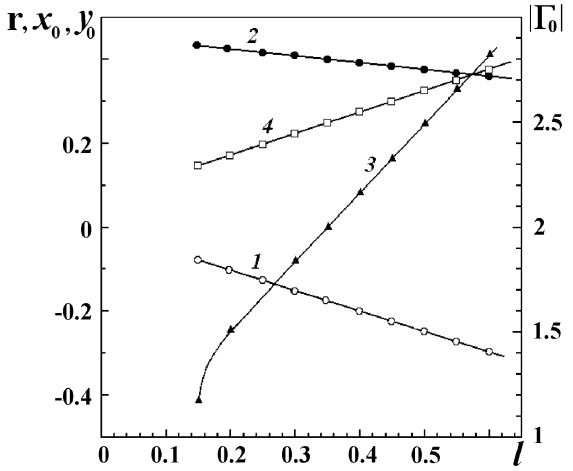

Рис. 12. Залежності циркуляції стоячого вихора, його розташування і величини r від довжини пластини l: $1 - x_0(l)$, $2 - y_0(l)$, $3 - \Gamma_0(l)$, $4 - r(l)$

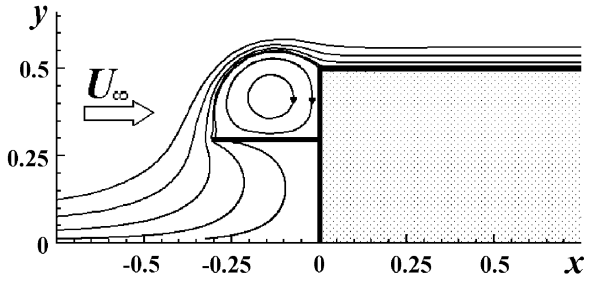

Рис. 13. Картина ліній течії з формуванням стоячого вихора перед довгим тілом з управляючими пластинами на лобовій частині

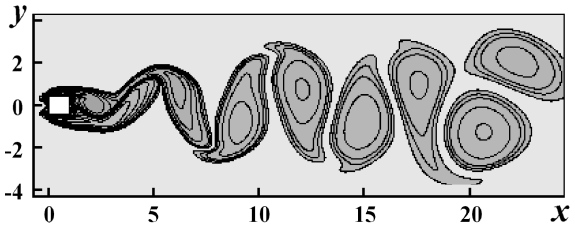

Рис. 14. Розподіл завихреності в сліді квадратного циліндра з управляючими пластинами в оптимальному режимі ($l = 0.2$, $r = 0.16$) при $\mathrm{Re} = 500$, $\tau = 25$

нарних чи турбулентних, так і для потенціальних течій (де в'язкі ефекти незначні). Аналіз динаміки точкового вихора, який описує відривну циркуляційну течію, дає інформацію про топологічні характеристики потоку: наявність, розташування і тип критичних точок, їх стійкість та реакції на зовнішні збурення [9, 41].

Враховуючи симетрію і стійкість течії перед тілом, будемо розглядати лише верхню її частину $y > 0$ (рис. 11). Границя тіла, як і раніше, моделюється неперервним вихровим шаром, який в чисельній схемі замінюється системою дискретних вихорів. Тоді комплексний потенціал течії має вигляд:

$$\Phi(z) = U_\infty z + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k \ln\frac{z-z_k}{z-\overline{z}_k} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\,\Gamma_0\,\ln\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}, \tag{34}$$

де Γ_k і $z_k = x_k + iy_k$ – циркуляція та комплексна координата k-го приєднаного (розташованого на границі) дискретного вихора; Γ_0, $z_0 = x_0 + iy_0$ – параметри стоячого (нерухомого) вихора, який описує циркуляційну течію; N – кількість приєднаних вихорів.

Задача полягає в знаходженні параметрів стоячого вихора $\overline{\Gamma}_0 = \Gamma_0/U_\infty a$, $\overline{x}_0 = x_0/a$, $\overline{y}_0 = y_0/a$ і управляючої пластини $\overline{r} = r/a$ $\overline{l} = l/a$ (див. рис. 11), при яких відсутня генерація завихреності в точках A і B (далі риску, яка вказує на те, що величина є безрозмірною, будемо пропускати).

Для розв'язання такої задачі маємо чотири нелінійних рівняння. Перші два з них випливають з умови нерухомості вихора:

$$\left.\frac{d\Phi}{dz}\right|_{z=z_0} = 0 \tag{35}$$

або

$$v_x(z_0) = 0, \quad v_y(z_0) = 0.$$

Два інші рівняння описують умову Куття-Жуковського про обмеженість швидкості в кутo-

вих точках A і B. Течія буде оптимальною, коли

$$\Gamma_k\,|_A = 0\ ,\ \ \Gamma_k\,|_B = 0, \tag{36}$$

де $\Gamma_k\,|_A$ і $\Gamma_k\,|_B$ – циркуляції дискретних вихорів, розташованих у кутових точках A і B.

Враховуючи вираз для потенціалу (34), умови (36) можна привести до вигляду:

$$v_x(z_0) - iv_y(z_0) = U_\infty + \frac{\Gamma_0}{4\pi y_0} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N}\Gamma_k\left(\frac{1}{z_0 - z_k} - \frac{1}{z_0 - \overline{z}_k}\right) = 0. \tag{37}$$

Невідомі циркуляції приєднаних вихорів Γ_k визначаються із системи лінійних рівнянь, яка випливає з умови непротікання на поверхні тіла і є аналогічною до системи (19), де замість множини вихорів в області течії розглядається лише один вихор циркуляції Γ_0.

Рівняння для Γ_0, x_0, y_0, r є істотно нелінійними. Для їхнього розв'язання використовувався чисельний алгоритм Бройдена. Проведені розрахунки показали, що у випадку, коли одна з характеристик управляючих пластин задана, наприклад довжина пластини l, задача (35)–(36) має єдиний розв'язок; в області між пластиною і стінкою призми при $0.15 \le l \le 0.65$ існує точка з координатами x_0, y_0, в якій вихор із циркуляцією Γ_0 знаходиться в рівновазі (тобто є нерухомим або стоячим); при цьому такий вихор забезпечує нульову генерацію завихреності в кутових точках A і B. Чисельний аналіз поведінки цього вихора в околі положення рівноваги виявив, що малі збурення потоку призводять до прецесійних рухів вихора навколо точки x_0, y_0. З точки зору теорії динамічних систем це означає, що така критична точка є еліптичною, а вихор – стійким.

Рис. 12 ілюструє залежності координат стоячого вихора x_0, y_0, циркуляції Γ_0 та параметра r від довжини пластини l. Ці залежності є близькими до лінійних. Із графіка $r(l)$ можна визначити оптимальні конфігурації управляючих пластин. Картину ліній течії перед довгим тілом для випадку $l = 0.3$, $r = 0.22$ показано на рис. 13.

Розрахунки, проведені за спрощеною моделлю, коли відривна циркуляційна течія описується одним точковим вихором, продемонстрували принципову можливість існування нерухомого (стоячого) вихора перед тілом зі спеціальними (управляючими) пластинами на лобовій частині тіла, а також дають можливість визначити оптимальні параметри пластин. Для одержаної таким чином оптимальної конфігурації квадратної призми з управляючими пластинами було виконане чисельне моделювання течії на основі повної системи рівнянь Нав'є-Стокса за схемою, описаною в частині **2**. Рис. 14 ілюструє миттєвий розподіл завихреності в сліді за квадратним циліндром з управляючими пластинами при $\mathrm{Re} = 500$, коли характеристики пластин близькі до оптимальних: $l = 0.2$, $r = 0.16$.

Порівняння результатів розрахунків, приведених на рис. 14 та 7, свідчить про зміну структури сліду за призмою при установці пластин. Це виражається в:

- зменшенні ширини завихреної області як поблизу тіла, так і в сліді;
- збільшенні частоти сходу вихорів у слід; число Струхаля, що характеризує цей процес, збільшується від $\mathrm{St} = 0.125$ для звичайної квадратної призми до $\mathrm{St} = 0.143$ для призми з управляючими пластинами;
- зменшенні інтенсивності вихорів у сліді.

Перелічені зміни позитивно впливають на гідродинамічні характеристики призми (рис. 15, Re=500). Величина середнього за період коефіцієнту опору $\overline{C}_x$ при помірних числах Рейнольдса зменшується від 2.15 (для "звичайної" квадратної призми) до $\overline{C}_x \approx 1.2$, що складає близько 55% від попереднього значення (рис. 15, *a*). Амплітуда коливань під'ємної (чи бокової) сили C_y^{max} відповідно спадає від 2 до 0.8 (рис. 15, *b*). Якщо тіло пружно закріплене у потоці, це приводить до істотного зниження амплітуд коливань тіла, викликаних зривом вихорів.

Важливість вибору параметрів управляючих пластин демонструє рис. 16, де представлено залежності коефіцієнтів $C_x(\tau)$, $C_y(\tau)$ при різних відстанях пластини від кута призми. Графіки $C_x(\tau)$, $C_y(\tau)$, а також розподіл завихреності в сліді (рис. 17) свідчать про виникнення додаткових мод, зумовлених деформаціями вихорів у сліді.

Висновки щодо оптимальної структури течії можна перенести і на діапазон великих чисел Рейнольдса. Це демонструють результати чисельного моделювання відривного обтікання квадратної призми та призми з пластинами із застосуванням методу дискретних вихорів. Вважалося, що з кутових точок у потік сходять вихрові пелени.

Результати розрахунків свідчать про наявність трьох характерних режимів обтікання тіла з управляючими пластинами. Якщо пластину встановлено далеко від кута, то вихрова пелена і відповідна лінія течії, яка зійшла з краю пластини, лягають на передню сторону квадрата (рис. 18, *c*). В

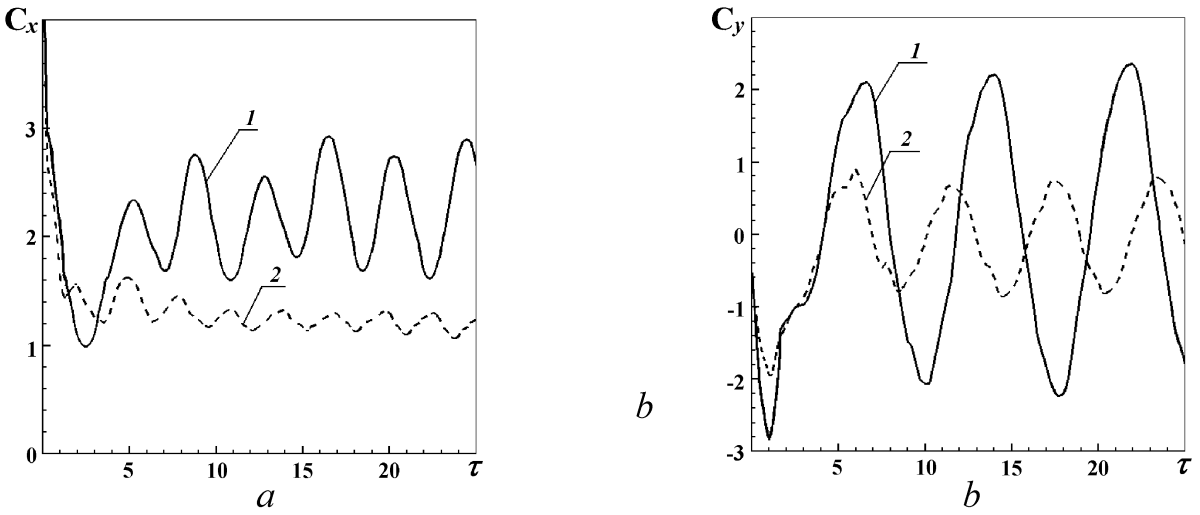

Рис. 15. Залежності від часу коефіцієнтів опору C_x (a) та під'ємної сили C_y (b) квадратного циліндра при $\mathrm{Re} = 500$: *1* – без управління, **2** – з оптимальним управлінням $(l = 0.2,\ r = 0.16)$

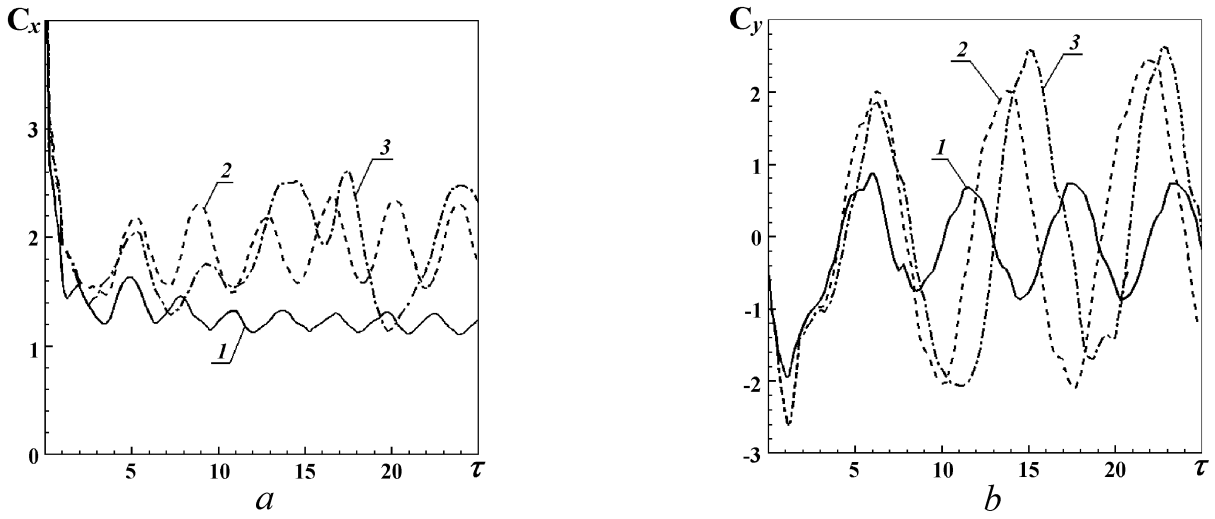

Рис. 16. Залежності від часу коефіцієнтів опору C_x – a та під'ємної сили C_y – b квадратного циліндра при різних параметрах управляючих пластин: *1* – $l = 0.2,\ r = 0.16$, *2* – $l = 0.2,\ r = 0.4$ *3* – $l = 0.2,\ r = 0.075$, $\mathrm{Re} = 500$

цьому випадку сформована в області циркуляційна зона є слабкою і майже не впливає на розвиток течії навколо тіла. Потік приєднується до тіла в точці, що лежить значно нижче кута B. Вихор, який утворюється перед тілом, слабо впливає на процеси генерації завихреності в кутовій точці B (на ребрі тіла), а тому не може завадити глобальному відриву течії в околі кута, що призводить до розвитку інтенсивної вихрової зони над стінкою.

Другий тип течії виникає, коли управляюча пластина знаходиться дуже близько до кута (рис. 18, *b*). У цьому випадку потік не приєднується до поверхні тіла, циркуляційна відривна зона не локалізується. Навпаки, розвивається інтенсивна відривна зона, як це спостерігалося і для випадку тіла без пластин. Відзначимо також, що наближена одновихрова модель, що описує циркуляційну течію дією одного вихора, в цьому випадку не виявляла стоячих вихорів в області між пластиною і кутом. Коли пластина знаходиться дуже близько до кута B, відривна зона, що сходить з кромки пластини A, накладається на відривну циркуля-

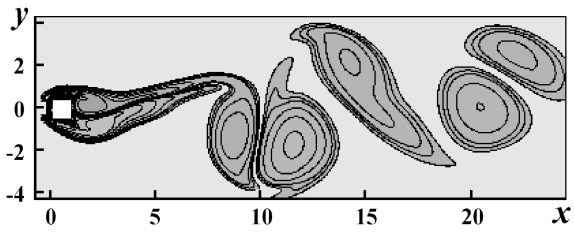

Рис. 17. Розподіл завихреності в сліді квадратного циліндра з управляючими пластинами в неоптимальному режимі ($l = 0.2$, $r = 0.075$) при $\mathrm{Re} = 500$, $\tau = 25$

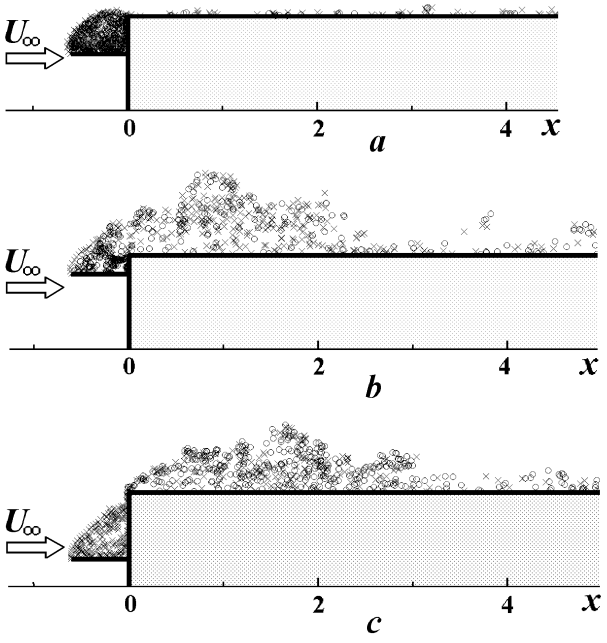

Рис. 18. Дискретно-вихрова модель течії перед тілом необтічної форми з управляючими пластинами на передній грані: оптимальні (a) і неоптимальні (b, c) параметри пластин

ційну течію, породжену ребром призми. Течія в околі кута B стає дуже нестабільною. В цій ситуації характеристики тіла навіть погіршуються у порівнянні з випадком, коли управління відсутнє.

В оптимальному випадку лінія течії, яка сходить з краю пластини, плавно приєднується до поверхні тіла поблизу кута B (рис. 18,a). Далі цей приєднаний потік без істотних збурень рухається вздовж поверхні. Генерація завихреності на куті B подавляється впливом циркуляційної зони перед тілом. У цьому випадку відбувається спад інтенсивності завихреності в потоці за кутом B, що зумовлює значне зменшення опору. Слід зазначити, що оптимальні параметри управляючої пластини, отримані на основі розрахунків із застосуванням

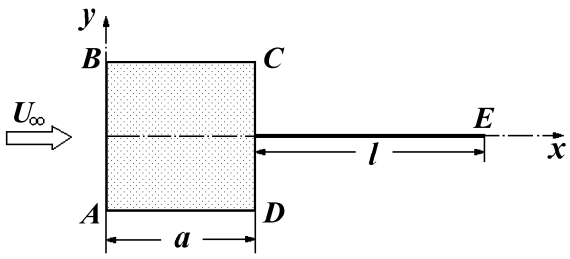

Рис. 19. Схема обтікання квадратної призми з розділяючою пластиною

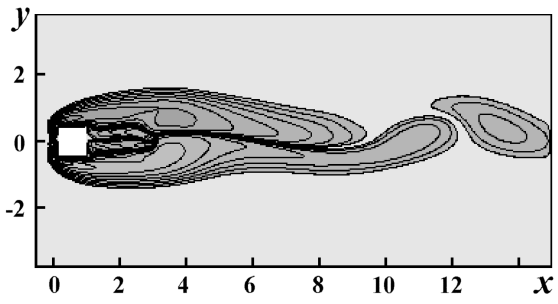

Рис. 20. Картина ізоліній завихреності при обтіканні квадратної призми з розділяючою пластиною

"в'язкої" моделі, методу дискретних вихорів та моделі стоячого вихора, майже співпадають.

5.2. Стабілізація вихрового потоку за тілом з розділяючою пластиною

Значний вплив на опір тіла має структура потоку в ближньому сліді. Вона зв'язана з інтенсивністю вихроутворення та з характером течії в сліді. Зупинимося на двох можливих ситуаціях:

- течія за тілом є стійкою; тут формуються дві симетричні циркуляційні зони; процеси винесення завихреної рідини в оточуючий потік є незначними, а тому відносно невеликим є і опір тіла;

- циркуляційні зони за тілом є нестійкими до малих збурень; із області їх взаємодії, яка безпосередньо прилягає до кормової частини тіла, в потік періодично поступають великі згустки завихреної рідини; гідродинамічні сили в цьому випадку значно більші, ніж у попередньому.

Стійкий симетричний режим течії в сліді спостерігається в експериментах лише при незначних

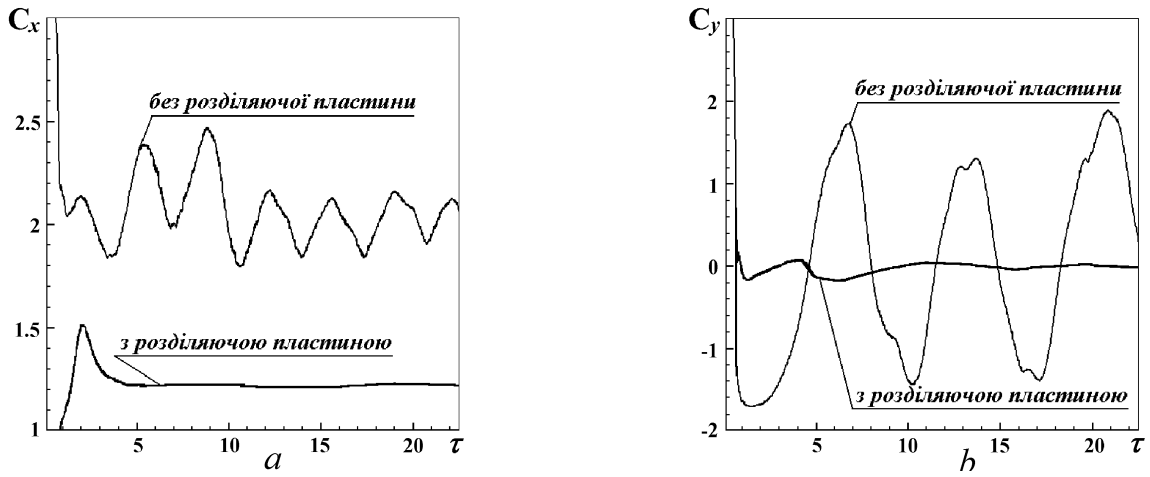

Рис. 21. Вплив розділяючої пластини за квадратним циліндром на коефіцієнти гідродинамічних сил $C_x(a)$, $C_y(b)$: $l = 2$, $\mathrm{Re} = 200$

числах Рейнольдса $\mathrm{Re} < 50$, коли збурення подавляються дією сил в'язкості. Аналіз стійкості течії в сліді показав, що особливо небезпечними (дестабілізуючими) є несиметричні збурення (в нашому випадку – несиметричні відносно осі Ox – рис. 1). Подавити такі збурення і стабілізувати потік можна за допомогою розділяючої пластини, розташованої за тілом (рис. 19). Для з'ясування закономірностей формування вихрової структури потоку при обтіканні квадратної призми з пластиною було проведено чисельне моделювання течії за схемою, описаною в п. **2**. Розглядався ламінарний режим течії при $l = 2$. Одержані картини розподілу завихреності (рис. 20) свідчать про істотне зменшення коливальних рухів циркуляційних зон у сліді. Установка пластини викликає зменшення ширини сліду та інтенсивності вихрових згустків, що поступають у потік із ближнього сліду. Відповідно зменшуються гідродинамічні навантаження (рис. 21). Експерименти показують, що при зростанні числа Рейнольдса цей позитивний ефект спадає, але і при великих числах Re застосування розділяючої пластини дає помітне зменшення опору (на 10 – 20%).

ВИСНОВКИ

Побудовано чисельний алгоритм для моделювання ламінарних потоків в'язкої нестисливої рідини, зокрема, для нестаціонарних відривних течій при обтіканні тіл необтічної форми. Алгоритм грунтується на використанні системи рівнянь Нав'є-Стокса в змінних "завихреність-швидкість". До переваг цього алгоритму слід віднести можливість істотного зменшення розмірів розрахункової області (обмеживши клітинками сітки з ненульовими значеннями завихреності), високу точність виконання граничних умов у кутових точках поверхні тіла, а також точність визначення завихреності в околі таких точок.

Проведена апробація алгоритму на плоских двовимірних задачах дифузії точкового вихора в в'язкій рідині, поздовжнього обтікання пластини та поперечного обтікання квадратної призми. Результати розрахунків порівнювались з відомими аналітичними розв'язками, результатами чисельного моделювання, виконаного іншими авторами, а також з експериментальними даними. Ці розрахунки показали, що для забезпечення точності чисельного моделювання кроки сітки по просторових координатах $\triangle x$, $\triangle y$ та по часові $\triangle t$ повинні задовільняти певним умовам, наприклад, біля поверхні тіла

$$\triangle x,\ \triangle y \approx (1 \div 10)\frac{1}{\mathrm{Re}}, \quad \frac{\triangle x}{\triangle t} \le V_{max},$$

де V_{max} – максимальна локальна швидкість рідини в області. Аналіз отриманих результатів свідчить про ефективність побудованого чисельного алгоритму для моделювання відривних потоків при помірних числах Рейнольдса, зокрема, нестаціонарних процесів утворення вихрових структур біля поверхні тіла та їх динаміки в сліді за тілом необтічної форми.

Виконані дослідження показали, що на процеси формування сліду за тілом та на його опір істотно впливає взаємодія відривних циркуляційних зон, безпосередньо прилягаючих до поверхні тіла. Зменшення нестаціонарних рухів таких зон су-

проводжується відповідним спадом гідродинамічних навантажень. Грунтуючись на результатах цих досліджень, були розглянуті два алгоритми управління обтіканням квадратної призми. В першому випадку на передній (лобовій) грані призми розташовувались дві симетричні (управляючі) пластини. В другому випадку – на задній (кормовій) грані розташовувалась одна пластина (розділяюча вихрові зони з протилежними циркуляціями). Аналіз результатів розрахунків показав, що при певних (оптимальних) параметрах пластин відривні циркуляційні зони біля поверхні тіла є стійкими. Нестаціонарні рухи таких зон зменшуються, гальмуються процеси породження завихреності на тілі, при цьому падає гідродинамічний опір і бокова сила, діючі на тіло. Отримані результати можуть бути корисними при розробці нових засобів управління обтіканням тіл у потоках.

1. *Мигай В. К.* Аэродинамическая эффективность прерывистой поверхности // Инженерно-физический журнал.– 1962.– 4.– С. 20-23.
2. *Loehrke R.I., Nagib H.M.* Control of free stream turbulence by means of honeycombs: A balance between suppression and generation // Transaction of the ASME, of Fluid Engineering.– 1976.– V. 98, – 3.– P. 342-353.
3. *Гад-эль-хак, Бушнелл.* Управление отрывом пограничного слоя. Обзор // Современное машиностроение.– 1991.– 7.– С. 2-35.
4. *Mochizuki S, Osaka H.* Drag reduction with submerged ribs and its mechanism in a turbulent boundary layer over D-type roughness // Proceedings of the International Simposium on Seawater Drag Reduction. – 1998. – P. 121-126.
5. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью.– М.: Наука, 1978.– 351 с.
6. *Cortelezzi L., Leonard A., Doyle J. C.* An example of active circulation control of the unsteady separated flow past a semi-infinite plate // J. Fluid Mechanics.– 1994.– 260.– P. 127-154.
7. *Cortelezzi L.* Nonlinear feedback control of the wake past a plate with a suction point on the downstream wall // J. Fluid Mechanics.– 1996.– 327.– P. 303-324.
8. *Savchenko Yu. N.* Drag reduction through the near-wall vortex system management // Proceedings of the International Simposium on Seawater Drag Reduction. Newport, USA. – 1998. – P. 249-255.
9. *Gorban V., Gorban I.* Dynamics of vortices in near-wall flows: eigenfrequencies, resonant properties, algorithms of control // AGARD Report.– 1998.– 827.– P. 15-1–15-11.
10. *Vickery B. J.* Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross-section in a smooth and in a turbulent stream // J. Fluid Mechanics.– 1966.– 25.– P. 481-494.
11. *Случановская З. П.* Распределение давления на поверхности прямоугольного, трехгранного и полукруглого цилиндров и их аэродинамические коэффициенты // Сб. научных трудов Института механики МГУ.– 1973.– 24.– С. 127-133.
12. *Bearman P.W., Obasaju E.D.* An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders // J. Fluid Mechanics.– 1982.– 119.– P. 297-321.
13. *Knisely C.W.* Strouhal number of rectangular cylinders at incidence: a review and new data // J. of Fluids and Structures.– 1990.– 4.– P. 371-393.
14. *Okajima A.* Strouhal number of rectangular cylinders // J. Fluid Mechanics.– 1982.– 123.– P. 379-398.
15. *Nagano S., Naito M., Takata H.* A numerical analysis of two-dimensional flow past a rectangular prism by a discrete vortex model // Computers and Fluids.– 1982.– 10.– P. 243-259.
16. *Сарпкайя Т., Ириг А.* Внезапно начинающееся течение около прямоугольной призмы. Эксперимент и модель дискретных вихрей // Теоретические основы инженерных расчетов. Труды Америк. об-ва инж.-мех.– 1986.– 1.– С. 198-213.
17. *Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М.* Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел.– М.: Наука, 1988.– 232 с.
18. *Davis R. W., Moore E. F.* A numerical study of vortex shedding from rectangles // J. Fluid Mechanics.– 1982.– 116.– P. 475-506.
19. *Minewitsch S., Franke R., Rodi W.* Numerical investigation of laminar vortex-shedding flow past a square cylinder oscillating in line with the mean flow // J. of Fluids and Structures.– 1994.– 8.– P. 787-802.
20. *Sohankar A., Norberg C., Davidson L.*Numerical simulation of flow past a square cylinder // Proceedings of FEDSM99 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference. July 18-23. San-Francisco, California, USA. – 1999. – P. 1-6.
21. *Zaki T.G., Sen M., Gad-el-Hak M.* Numerical and experimental investigation of flow past a freely rotatable square cylinder // J. of Fluids and Structures.– 1994.– 8.– P. 555-582.
22. *Lighthill M.J.* Laminar boundary layers. Chap. II.– London: Oxford University Press, 1963.– 355 p.
23. *Wang C.M., Wu J.C.* Numerical solution of steady Navier-Stokes problems using integral representations // AIAA J.– 1986.– 8.– P. 1305-1312.
24. *Кочин Н.Е., Кибель И.А. Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1.– М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.– 583 с.
25. *Wu J.C.* Numerical boundary conditions for viscous flow problems // AIAA J.– 1976.– V.14. – 8.– P. 1042-1049.
26. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
27. *Koumoutsakos P.D.* Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods.– PhD Thesis: California Institute of Technology, 1993.– 140 p.
28. *Марцинковски В., Шкадов В.Я.* Численное исследование двумерного отрыва на основе уравнений Навье-Стокса // Механика жидкости и газа.– 1985.– 1.– С. 26-32.
29. *Белоцерковский С.М., Гиневский А.С.* Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей.– М.: Физико-математическая литература, 1995.– 368 с.
30. *Naim H.N., Milne R.B., Devine K.D., Kmpka S.N.* A coupled Lagrangian-Eulerian scheme for reacting flow modeling// Vortex Flows and Related Numerical Methods III // ESAIM: Proceedings.– 1999.– V. 7.– P. 304-313.

31. *Cottet G.-H., Koumoutsakos P.* Vortex methods: theory and practice.– London: Cambridge University Press, 2000.– 312 p.

32. *Бутковский А.Г.* Характеристики систем с распределенными параметрами.– М.: Наука, 1979.– 224 с.

33. *Benfatto G., Pulvirenti M.* Convergence of Chorin-Mardsen product formula in the half-plane // Communications in mathematical Physics.– 1986.– 106.– P. 427-458.

34. *Wu J.C.* Theory of aerodynamics force and moments in viscous flows // AIAA J.– 1981.– V.19. – 4.– P. 432-441.

35. *Сэффмэн Ф.Дж.* Динамика вихрей.– М.: Научный мир, 2000.– 375 с.

36. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 711 с.

37. *Горлин С. М.* Экспериментальная аэродинамика.– М.: Высшая школа, 1970.– 211 с.

38. *Девнин С.И.* Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций. Справочник.– Л.: Судостроение, 1983.– 333 с.

39. *Белов И. А.* Взаимодействие неравномерных потоков с преградами.– М.: Машиностроение, 1983.– 166 с.

40. *Koenig K., Roshko A.* An experimental study of geometrical effects on the drag and flow field of two bluff bodies separated by a gap // J. Fluid Mechanics.– 1995.– 156.– P. 167-204.

41. *Горбань В. О., Горбань І. М.* Резонансні властивості вихорів за нерівностями границі // Доповіді НАН України.– 1996.– 2.– С. 44-47.