УДК 539.4

Метод расчета регулярных составляющих поля напряжений в пластической зоне у вершины трещины отрыва

В. Н. Шлянников

Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия

Разработан метод расчета амплитуды сингулярности и безразмерных угловых распределений вторых членов разложений напряжений, деформаций и перемещений в пластической области вершины трещины. Метод построен на сочетании аналитического решения типа Хатчинсона–Райса–Розенгрена и численного решения на основе модифицированного метода граничного слоя. Представленные результаты позволяют проанализировать эффекты стеснения в широком диапазоне условий двухосного нагружения.

Ключевые слова: эффект стеснения, двухосное нагружение, полярные и радиальные распределения, второй член разложения, амплитуда сингулярности, параметр стеснения.

Введение. В последнее время интенсивно обсуждается проблема эффектов стеснения, которая актуальна для условий маломасштабной и развитой пластичности. Особая ее значимость обусловлена практическими приложениями, связанными с интерпретацией упругопластических характеристик сопротивления конструкционных материалов разрушению при статическом деформировании. Многочисленные исследования эффектов стеснения показали, что, например, J-интеграл, который рассматривался как объединяющая идея нелинейной механики разрушения, зависит от геометрии и условий нагружения тела с трещиной.

Суть эффектов стеснения при разрушении прежде всего связана с обоснованием ограничений, накладываемых на пластические поля Хатчинсона–Райса–Розенгрена (ХРР) [1–3]. Характеристический размер зоны доминирования сингулярных ХРР-полей существенно зависит от геометрии и пластических свойств тела с трещиной. К настоящему времени уже ясно, что воздействие геометрии и условий нагружения реализуется также через второй, несингулярный член (так называемое T-напряжение), действующий параллельно плоскости трещины. Этот T-член рассматривается как внутреннее свойство образцов различных геометрий или элементов конструкций. Само понятие T-члена введено Райсом [4] как частный случай упругого разложения напряжений по собственным функциям Вильямса [5]. В [6] величина T-члена определена через коэффициент двухосности, там же представлены табулированные зависимости этого параметра от длины трещины для шести геометрий образцов, наиболее популярных в экспериментальной механике трещин. Данная работа является продолжением исследований Ларссона и Карлссона [7], которые представили подобные результаты только для одной длины трещины в каждом образце.

Теоретической основой описания полей параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) в пластической области вершины трещины с учетом членов высоких порядков можно считать исследования [8, 9]. Авторы этих работ на основе двухчленного представления параметров НДС в зоне пластичности впервые установили тип сингулярности, амплитуду сингулярности и безразмерные угловые функции для второго члена разложения. Дальнейшее развитие исследований в этом направлении путем удержания членов более высоких порядков имело место в работах [10–14]. Общим результатом работ данного направления является установленная структура полей параметров НДС в пластической области с учетом членов высоких порядков.

Работа [15] положила начало обоснованию двухпараметрического подхода в рамках количественной оценки эффектов стеснения или оценки влияния несингулярного члена. Практически одновременно в [16] было выполнено наиболее обстоятельное исследование, дополненное и обобщенное в [17]. Общим для указанных работ является вывод о том, что постепенный переход в область отрицательных значений T-члена сопровождается все возрастающим отличием от ХРР-полей. При этом найдены области приемлемого описания поведения тела с трещиной на основе двухпараметрического подхода, в котором сочетаются J-интеграл и T-член или J-интеграл и параметр трехосности нормальных напряжений Q. В качестве объекта исследований использовали тела бесконечных размеров и образцы различных конфигураций. В отношении количественной оценки эффектов стеснения в образцах различных геометрий, размеров и схем нагружения впоследствии проведены детальные исследования [18–21] и др. На основании аналогичных результатов в [16] предложена упрощенная схема определения амплитуды сингулярности второго члена или параметра стеснения. Авторы работ [22–25] распространили методологию двухпараметрического подхода на случай смешанных мод деформирования и чистого сдвига соответственно. Обнаружены качественные эффекты стеснения, не выявленные в чистой форме нормального отрыва.

Подавляющее большинство работ по исследованию эффектов стеснения построено на методологии модифицированного метода граничного слоя (ММГС), впервые использованного в [7]. Суть этого метода, основанного на методе конечных элементов (МКЭ), состоит в выделении круговой области, внешний контур которой находится в упругой области, а внутренний воспроизводит трещину с конечным радиусом кривизны. Область вершины трещины находится в пластическом состоянии. Соотношение между радиусом кривизны вершины трещины и радиусом внешней круговой области выдерживается в пределах 3...5 порядков. Несомненное удобство такого подхода в вычислительном плане – возможность исследования эффектов стеснения на одной и той же расчетной схеме МКЭ. При этом условия удаленного нагружения воспроизводятся через граничные перемещения на внешнем контуре выделенной круговой области. В свою очередь, эти перемещения являются непосредственными функциями упругих коэффициентов интенсивности напряжений и несингулярного T-члена. Через K-тарировки осуществляется учет конкретной геометрии образца с трещиной и схемы его нагружения. Благодаря введению в расчетную схему конечного радиуса кривизны представляется возможным учитывать затупление вершины трещины при пластическом деформировании.

Существующие методы исследования эффектов стеснения не учитывают различия между *внутренней двухосностью*, обусловленной схемой одноосного нагружения образца конкретной геометрии с заданным положением исходного надреза, и *наведенной двухосностью* вследствие приложения растягивающей или сжимающей нагрузки по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Неявно подразумевается, что те или иные условия нагружения описываются несингулярным T-членом. Однако совершенно очевидно, что одно и то же значение T-члена может быть достигнуто благодаря различному сочетанию уровня номинальных напряжений, угла ориентации трещины и коэффициента двухосности номинальных напряжений. Следовательно, T-член не является однозначной функцией геометрии и условий нагружения тела с трещиной, что, в свою очередь, обусловливает неопределенность в оценке эффектов стеснения.

Предлагаемый в настоящей работе метод исследования эффектов стеснения при разрушении весьма актуален для экспериментальной механики трещин в порядке интерпретации характеристик сопротивления разрушению конструкционных материалов, полученных на образцах различных геометрий. Основное его преимущество состоит в четкой идентификации влияния условий двухосного нагружения в сочетании с произвольной ориентацией исходной трещины, что на практике является, скорее, правилом, чем исключением. Метод полезен в общем комплексе оценки несущей способности элементов конструкций при сложном напряженном состоянии в условиях пластичности и ползучести.

Цель работы – разработать метод расчета амплитуды сингулярности и угловых распределений членов высоких порядков через непосредственный учет наведенной двухосности внешнего нагружения при фиксированном угле исходной ориентации трещины. Для определенности ограничимся анализом поведения деформационно-упрочняющегося материала для формы нормального отрыва (мода I) при плоской деформации.

Поля упругих напряжений и перемещений. Рассмотрим пластину бесконечных размеров, которая нагружена системой взаимно перпендикулярных нормальных напряжений и ослаблена внутренней сквозной центральной прямолинейной трещиной, расположенной вдоль оси OX (рис. 1). Вершина трещины имеет достаточно малый, но конечный радиус кривизны. Коэффициент двухосности приложенных номинальных напряжений определяется как отношение $\eta = \sigma_{xx}^{\infty} / \sigma_{yy}^{\infty}$. На удалении от вершины трещины в упругой области пластины проведем окружность, центрированную на вершину трещины, которая будет служить внешним контуром исследуемой области. В силу симметрии геометрии и условий нагружения достаточно рассмотреть только одну четверть пластины.

Согласно решению Вильямса [5], упругие напряжения в окрестности вершины трещины можно представить в виде разложения в ряд по степеням r:

$$\sigma_{ij} = A_{ij}(\theta) r^{-1/2} + B_{ij}(\theta) + C_{ij}(\theta) r^{1/2}, \tag{1}$$

где первый член этого асимптотического решения является сингулярным, тогда как члены более высоких порядков конечны и ограничены; второй член назван в [4] как T-напряжение, или несингулярный T-член.

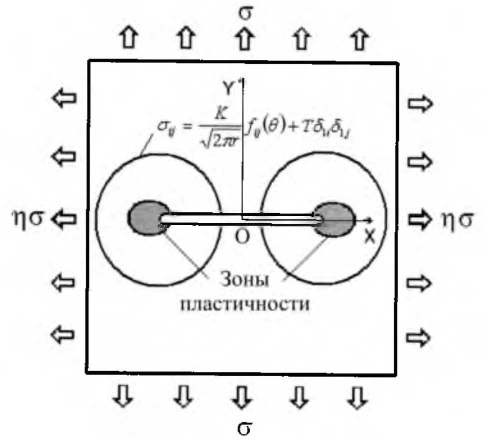


Рис. 1. Пластина с трещиной нормального отрыва при двухосном нагружении.

При удержании первых двух членов разложения (1) компоненты упругих напряжений могут быть выражены через коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + T\delta_{1i}\delta_{1j}. \tag{2}$$

Обобщение упругого решения для плоской задачи в двухчленном представлении для произвольного двухосного нагружения в условиях смешанных форм разрушения приведено в [26–28] и для компонент напряжений и перемещений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] - \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] + T; \\ \sigma_{yy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right] + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}; \\ \sigma_{xy} = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{K_2}{\sqrt{2\pi r}} s\cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]; \end{cases} \tag{3}$$

$$T = \sigma(1-\eta)\cos 2\beta; \tag{4}$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{K_1}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\frac{\theta}{2}\left[(1-2\nu) + \sin^2\frac{\theta}{2}\right] - \frac{(1-\eta)\sigma}{E}(1-\nu^2)[r\cos\theta + a]; \\ u_y = \frac{K_1}{G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2(1-\nu) - \cos^2\frac{\theta}{2}\right] + \frac{(1-\eta)\sigma}{E}\nu(1+\nu)[r\sin\theta]; \end{cases} \tag{5}$$

$$K_1 = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2}[(1+\eta)-(1-\eta)\cos 2\beta]; \qquad K_2 = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{2}[(1-\eta)\sin 2\beta], \tag{6}$$

где T – несингулярный второй член, или T-напряжение; σ – номинальное напряжение, приложенное вдоль оси OY; β – угол ориентации трещины относительно оси OY; η – коэффициент двухосности; G – модуль сдвига; r и θ – полярные координаты с центром в вершине трещины; ν – коэффициент Пуассона; K_1 и K_2 – упругие КИН для случаев нормального отрыва и поперечного сдвига; a – длина трещины. Перемещения, определяемые формулами (5), воспроизводят условия внешнего двухосного нагружения на контуре выделенной круговой области в пластине (рис. 1) и включают в себя несингулярный T-член.

Поля параметров НДС в пластической области. Подход с использованием многочленного разложения, аналогичного (1), был использован для построения решений в диапазоне от маломасштабной текучести до развитой (полной) пластичности. В [8, 9] решение плоской задачи для деформационно-упрочняющегося материала на основе двухчленного разложения предложено в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(r,\theta) = \left(\frac{J}{\alpha\sigma_0\varepsilon_0 I_n r}\right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta) + Q\left(\frac{r\sigma_0}{J}\right)^t \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta). \tag{7}$$

Здесь первое слагаемое представляет собой известное сингулярное решение ХРР [1–3], где J – интеграл Райса; α, n – константы упрочнения; σ_0 и ε_0 – напряжения и деформации текучести; r, θ – полярные координаты; Q и t – амплитуда и тип сингулярности второго члена; $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$ и $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$ – безразмерные угловые функции компонент напряжений первого и второго членов; I_n – константа интегрирования Хатчинсона [1].

Альтернативная форма двухчленного пластического решения предложена в работе [16], в котором первый сингулярный член относится к условиям маломасштабной текучести при отсутствии учета эффектов стеснения, что эквивалентно равенству нулю упругого несингулярного члена $(T=0)$ или его определению как доминирующего ХРР-члена:

$$\sigma_{ij} = \left[\sigma_{ij}\left(\frac{r\sigma_0}{J},\theta\right)\right]^{-SSY,\,T=0} + Q\sigma_0\hat{\sigma}_{ij}(r,\theta). \tag{8}$$

Второй член (8), собственно, и определяет эффект стеснения, т.е. степень отклонения от ХРР-поля. Авторы [16] ввели достаточно упрощенную схему определения амплитуды сингулярности второго члена, или так называемого параметра стеснения Q:

$$Q = \frac{\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta\theta}^{REF}}{\sigma_0} \qquad \text{при} \qquad \frac{r\sigma_0}{J} = 2, \;\; \theta = 0. \tag{9}$$

Из (9) следует, что параметр стеснения Q определяется как разница между истинным пластическим решением и ХХР-решением на продолжении трещины ($\theta = 0$) на удалении от ее вершины $(r\sigma_0)/J = 2$. Именно это расстояние от вершины трещины выбрано потому, что оно больше области эффекта затупления, за пределами которого каждое из полученных решений носит характер эквидистантного смещения по отношению к ХРР-полю, пропорционального величине упругого несингулярного члена T. Однако подобные упрощения не вполне согласуются с результатами работ [8, 9], что было доказано позже [29]. Кроме того, было установлено [10, 11], что удержание в пластическом решении трех и более членов не повышает точность аппроксимации по отношению к двухчленному приближению. Поэтому в структуре используемого здесь пластического решения ограничимся двумя первыми членами разложения.

В настоящей работе полное решение будет получено путем численного решения по модифицированному методу граничного слоя на основе МКЭ. Представим нормированные на предел текучести поля параметров НДС в пластической области вершины трещины аналогично [29]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}(r,\theta)}{\sigma_0} = Kr^{-1/(n+1)}\hat{\sigma}_{ij}(\theta) = \left(\frac{1}{\bar{\alpha} I_n \bar{r}}\right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{ij}^{(0)} + Q\bar{r}^{\,t}\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} + \ldots; \quad (10)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{E\varepsilon_{ij}(r,\theta)}{\alpha\sigma_0} = \frac{\varepsilon_{ij}(r,\theta)}{\bar{\alpha}} = \alpha K^n r^{-n/(n+1)}\hat{\varepsilon}_{ij}(\theta) =$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{\alpha} I_n \bar{r}}\right)^{n/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)} + Q\bar{r}^{\,t}\left(\frac{1}{\bar{\alpha} I_n \bar{r}}\right)^{(n-1)/(n+1)} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + \ldots; \quad (11)$$

$$\bar{u}_i = \frac{Eu_i(r,\theta)}{\alpha\sigma_0 r} = \frac{\bar{u}_i(r,\theta)}{\bar{\alpha} r} = \alpha K^n r^{1/(n+1)}\hat{u}_i(\theta) =$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{\alpha} I_n \bar{r}}\right)^{n/(n+1)} \tilde{u}_i^{(0)} + Q\bar{r}^{\,t}\left(\frac{1}{\bar{\alpha} I_n \bar{r}}\right)^{(n-1)/(n+1)} \tilde{u}_i^{(1)} + \ldots, \quad (12)$$

где $\bar{r} = (\sigma_0 r / J) = (r/a)(\sigma_0 E/\sigma^2\pi)$; $\bar{\alpha} = \alpha\varepsilon_0$; в левой части каждого из уравнений записано полное МКЭ-решение для напряжений $\bar{\sigma}_{ij}$, деформаций $\bar{\varepsilon}_{ij}$ и перемещений $\bar{u}_i$ соответственно. Константа интегрирования I_n, которая является функцией полярного угла θ, показателя упрочнения n и в общем случае параметра смешанности Ши M_p [30], имеет вид

$$I_n(\theta, M_p, n) = \int_{-\pi}^{\pi} \Omega(n,\theta)d\theta, \quad (13)$$

где

$$\Omega(n,\theta)=\frac{n}{n+1}\tilde{\sigma}_e^{n+1}\cos\theta-\left[\tilde{\sigma}_{rr}\left(\tilde{u}_\theta-\frac{d\tilde{u}_r}{d\theta}\right)-\tilde{\sigma}_{r\theta}\left(\tilde{u}_r+\frac{d\tilde{u}_\theta}{d\theta}\right)\right]\sin\theta-$$

$$-\frac{1}{n+1}(\tilde{\sigma}_{rr}\tilde{u}_r+\tilde{\sigma}_{r\theta}\tilde{u}_\theta)\cos\theta.$$

Первые члены разложений (10)–(12) являются ХРР-решениями, в которых безразмерные угловые функции получены в результате нелинейного дифференциального уравнения совместности деформации четвертого порядка по методу Рунге-Кутта. Для условий плоской деформации и плоского напряженного состояния при вариации показателя упрочнения от $n=2$ до $n=13$ в полном диапазоне смешанных форм деформирования от нормального отрыва до чистого сдвига ранее [31] приведены значения константы интегрирования I_n и угловые функции всех параметров НДС для ХРР-решения: $\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)}$ и $\tilde{u}_i^{(0)}$.

В [9, 29] доказано, что если первый член разложений (10)–(12) имеет сингулярность типа $s=-1/(n+1)$, а сингулярность второго члена подчиняется условию $t<(n-2)/(n+1)$, то возможна декомпозиция структуры второго члена по отношению к переменным r и θ. Тогда, разрешая каждое из уравнений (10)–(12) относительно $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$, $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ и $\tilde{u}_i^{(1)}$, можно найти угловые безразмерные распределения вторых членов как разность между полным МКЭ-решением и ХРР-решением, которое соответствует значению упругого несингулярного члена $\overline{T}=0$:

$$\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}(r,\theta)=\frac{\overline{\sigma}_{ij}^{FEM}(r,\theta)-\left(\dfrac{1}{\overline{\alpha}I_n\overline{r}}\right)^{1/(n+1)}\tilde{\sigma}_{ij}^{(0)}(\theta)}{Q\overline{r}^{\,t}}; \tag{14}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}(r,\theta)=\frac{\overline{\varepsilon}_{ij}^{FEM}(r,\theta)-\left(\dfrac{1}{\overline{\alpha}I_n\overline{r}}\right)^{n/(n+1)}\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(0)}(\theta)}{Q\overline{r}^{\,t}(1/(\overline{\alpha}I_n\overline{r}))^{(n-1)/(n+1)}}; \tag{15}$$

$$\tilde{u}_i^{(1)}(r,\theta)=\frac{\overline{u}_i^{FEM}(r,\theta)-\left(\dfrac{1}{\overline{\alpha}I_n\overline{r}}\right)^{n/(n+1)}\tilde{u}_i^{(0)}(\theta)}{Q\overline{r}^{\,t}(1/(\overline{\alpha}I_n\overline{r}))^{(n-1)/(n+1)}}, \tag{16}$$

где $Q\overline{r}^{\,t}$ – произведение, используемое в качестве масштабного множителя, который нормирует угловые функции так, чтобы безразмерная интенсивность напряжений второго члена $\tilde{\sigma}_e^{(1)}$ имела максимальное значение $\tilde{\sigma}_e^{(1)}=$ $=(3\tilde{S}_{ij}^{(1)}\tilde{S}_{ij}^{(1)}/2)^{1/2}=1$ (S_{ij} – девиатор напряжений) в пределах рассматриваемого диапазона изменения полярного угла θ. Амплитуда сингулярности второго члена Q пока не определена.

После того как определены угловые функции для вторых членов компонент напряжений $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$, деформаций $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ и перемещений $\tilde{u}_i^{(1)}$, можно перейти к нахождению, собственно, амплитуды сингулярности второго члена Q. Для этого достаточно разрешить любое из уравнений (10)–(12) относительно Q, предварительно зафиксировав постоянным какое-либо значение полярного угла θ с целью того, чтобы значения всех угловых функций снимались при одном и том же угле θ. Тем самым амплитуда сингулярности второго члена будет определена в каком-либо направлении по отношению к вершине трещины. Для возможного сравнения полученных результатов с известными параметр Q будем определять через компоненту окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на продолжении трещины, т.е. для $\theta = 0$. Тогда из (10) можно получить

$$Q_{\theta\theta} = \frac{\bar{\sigma}_{\theta\theta}^{FEM}(r, \theta = 0) - \left(\dfrac{1}{\bar{\alpha} I_n \bar{r}}\right)^{1/(n+1)} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}(\theta = 0)}{\bar{r}^{\,t} \tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}(\theta = 0)}. \tag{17}$$

Заметим, что угловые функции ХРР-решения $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(0)}$ известны [1, 2, 30, 31], а $\tilde{\sigma}_{\theta\theta}^{(1)}$ рассчитывается по уравнению (14). Кроме того, аналитическими результатами [9] и [29] установлены зависимости типа сингулярности второго члена t, входящего в (17), от показателя деформационного упрочнения n для условий плоского напряженного состояния и плоской деформации. Строго говоря, формула (17) применима для любого θ, тогда как $\theta = 0$ – частный случай.

Расчетная схема и модель материала. Выделение ряда областей в геометрии тела с рассматриваемой трещиной является традиционным для модифицированного метода граничного слоя (рис. 1). Внутри области, ограниченной поверхностями трещины и внешней круговой областью, использовалось конечноэлементное разбиение. Расчетная схема включала 49 концентрических окружностей, центрированных на вершину трещины и содержащих по 80 промежуточных узлов каждая с шагом по углу 4,5°. Радиусы кривизны вершины трещины и внешней окружности отличались на три порядка. При формировании расчетной схемы использовались плоские восьмиузловые изопараметрические элементы. Угол ориентации трещины выбран $\beta = \pi/2$ (чистая мода нормального отрыва), т.е. трещина расположена вдоль оси OX. В этом случае упругий несингулярный член записывался как $T = -\sigma(1 - \eta)$.

Относительная величина приложенных номинальных напряжений $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_0 = 0{,}53$, где σ_0 – предел текучести, принята постоянной для всех вариантов расчетов. Коэффициент двухосности номинальных напряжений η варьировался так, чтобы несингулярный член T, нормированный на предел текучести σ_0, изменялся в указанных ниже пределах при $\beta = \pi/2$ и $\sigma = 0{,}53$:

η	2,00	1,75	1,50	1,25	1,00	0,75	0,50	0,25	0	−0,25	−0,50	−0,66	−0,90
$\bar{T}$	0,53	0,39	0,26	0,13	0	−0,13	−0,26	−0,39	−0,53	−0,66	−0,79	−0,87	−1,00

Конечноэлементный комплекс ANSYS [32] использовался для реализации модифицированного метода граничного слоя. Сетка конечных элементов включала 1905 узлов и 1849 восьмиузловых квадратичных элементов. Пластина рассматривалась в состоянии плоской деформации. Поведение материала описывалось по модели Рамберга–Осгуда с показателем деформационного упрочнения $n = 5$, пределом текучести $\sigma_0 = 380$ МПа, модулем упругости $E = 205$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0{,}3$. После численного решения упругопластической задачи выходные файлы ANSYS использовались в качестве входной информации к разработанному и реализованному комплексу программ по интерпретации результатов в порядке определения безразмерных полей параметров НДС и амплитуды сингулярности второго члена.

Результаты и их обсуждение. Исследовалось распределение напряжений на продолжении трещины ($\theta = 0$). На рис. 2 показаны распределения нормированных на предел текучести компонент нормальных напряжений, относящихся к общему МКЭ-решению (без декомпозиции на структуру первого и второго членов). Там же для сравнения нанесено ХРР-решение. Четко прослеживается проявление эффектов конечных деформаций и разгрузки вследствие затупления вершины трещины для $(r\sigma_0/J) < 3$. При больших расстояниях от вершины трещины влияние упругого несингулярного члена и двухосности нагружения имеет достаточно упорядоченный характер. Положительные значения $\overline{T}$ и двухосности напряжений η в диапазоне $\eta \in (+1{,}0\ldots2{,}0)$ не оказывают существенного влияния на распределение напряжений. Напротив, монотонное увеличение отрицательных значений $\overline{T}$ или переход от равнодвухосного растяжения ($\eta = +1$) к двухосному растяжению–сжатию ($\eta = -0{,}9$) приводит к значительному отклонению полученных распределений напряжений от ХРР-решения. Заметим, что случай равнодвухосного растяжения при $\overline{T} = 0$ наиболее близок к ХРР-решению и соответствует области определения этого асимптотического упругопластического решения. Представленные на рис. 2 данные коррелируют с численными результатами в отношении характера и степени влияния несингулярного члена.

На рис. 3 представлены полярные распределения безразмерных функций компонент напряжений ($\hat{\sigma}_{ij}$ в уравнении (10)) для общего МКЭ-решения в исследованном диапазоне условий двухосного нагружения. Для каждой из компонент напряжений степень ее отличия от ХРР-решения зависит от величины несингулярного члена $\overline{T}$ и коэффициента двухосности нагружения η и имеет возрастающий характер по мере перехода к отрицательным значениям этих параметров. Подобный характер влияния несингулярного члена на полярные распределения напряжений отмечен в [16].

Полярные распределения компонент напряжений для второго члена разложения (10), определенные по уравнению (14) как разность между общим МКЭ-решением и ХРР-решением, показаны на рис. 4. Частный случай из исследованного нами диапазона двухосного нагружения, относящийся к одноосному растяжению ($\eta = 0$, $\overline{T} = -0{,}53$), достаточно хорошо согласуется с результатами [8, 9, 12]. Отметим, что значения безразмерных функций для напряжений второго члена имеют тот же порядок величины, что и функции доминирующего первого ХРР-члена.

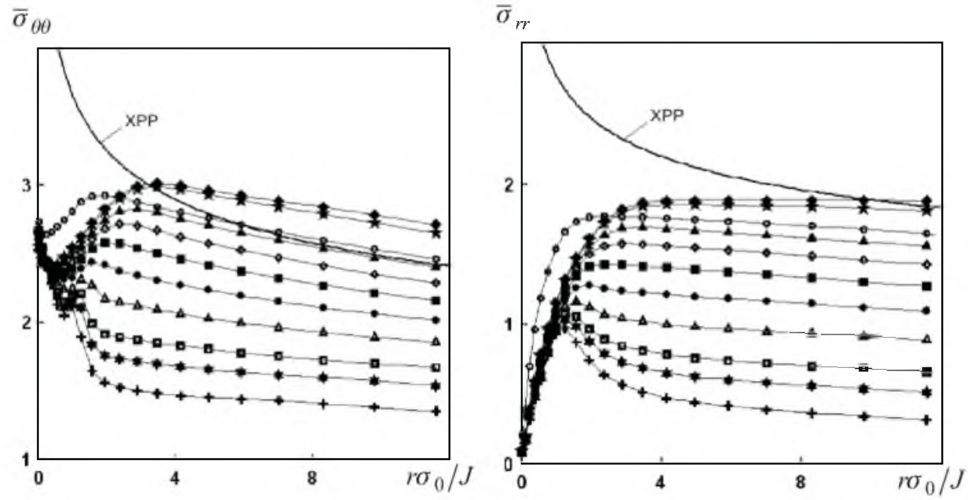


Рис. 2. Радиальные распределения полных напряжений на продолжении трещины, $\beta = 90°$: ◆ – $\bar{T} = 0{,}53$, $\eta = 2{,}0$; ★ – $\bar{T} = 0{,}26$, $\eta = 1{,}50$; ○ – $\bar{T} = 0$, $\eta = 1{,}0$; ▲ – $\bar{T} = -0{,}13$, $\eta = 0{,}75$; ◇ – $\bar{T} = -0{,}26$, $\eta = 0{,}5$; ■ – $\bar{T} = -0{,}39$, $\eta = 0{,}25$; ● – $\bar{T} = -0{,}53$, $\eta = 0$; △ – $\bar{T} = -0{,}66$, $\eta = -0{,}2$; □ – $\bar{T} = -0{,}79$, $\eta = -0{,}5$; ✶ – $\bar{T} = -0{,}87$, $\eta = -0{,}7$; ✚ – $\bar{T} = -1{,}0$, $\eta = -0{,}9$.

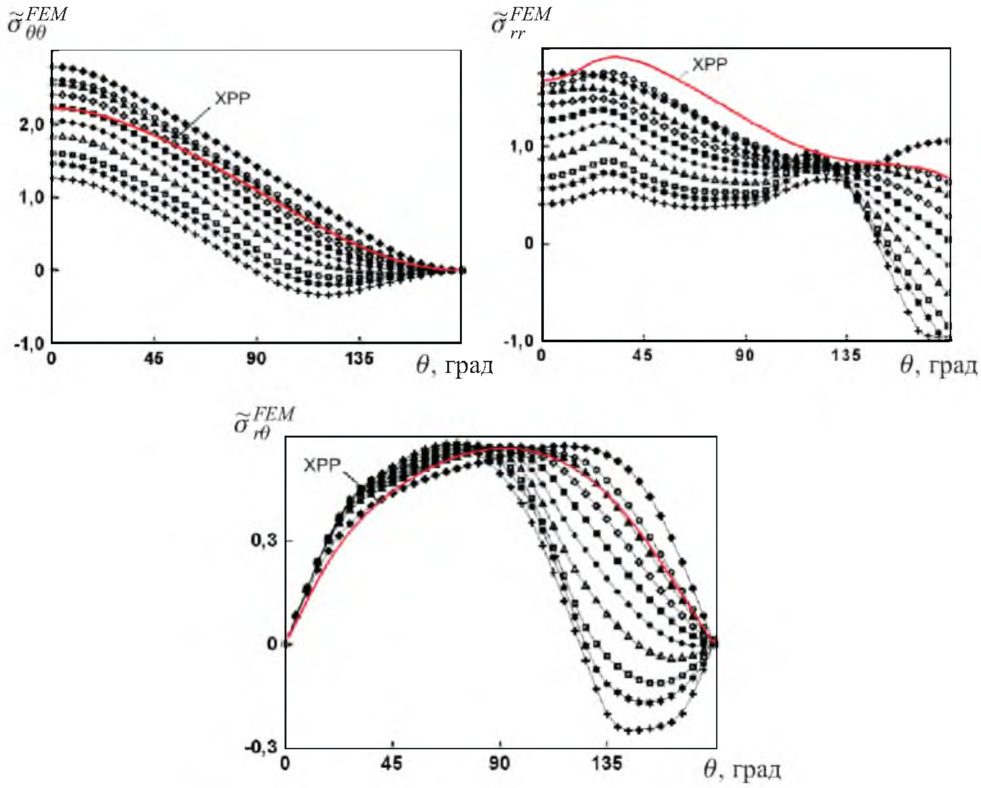


Рис. 3. Полярные распределения компонент напряжений для общего численного решения, $\beta = 90°$: ◆ – $\bar{T} = 0{,}53$, $\eta = 2{,}0$; ○ – $\bar{T} = 0$, $\eta = 1{,}0$; ▲ – $\bar{T} = -0{,}13$, $\eta = 0{,}75$; ◇ – $\bar{T} = -0{,}26$, $\eta = 0{,}50$; ■ – $\bar{T} = -0{,}39$, $\eta = 0{,}25$; ● – $\bar{T} = -0{,}53$, $\eta = 0$; △ – $\bar{T} = -0{,}66$, $\eta = -0{,}25$; □ – $\bar{T} = -0{,}78$, $\eta = -0{,}50$; ✶ – $\bar{T} = -0{,}87$, $\eta = -0{,}66$; ✚ – $\bar{T} = -1{,}0$, $\eta = -0{,}90$.

ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2006, № 3

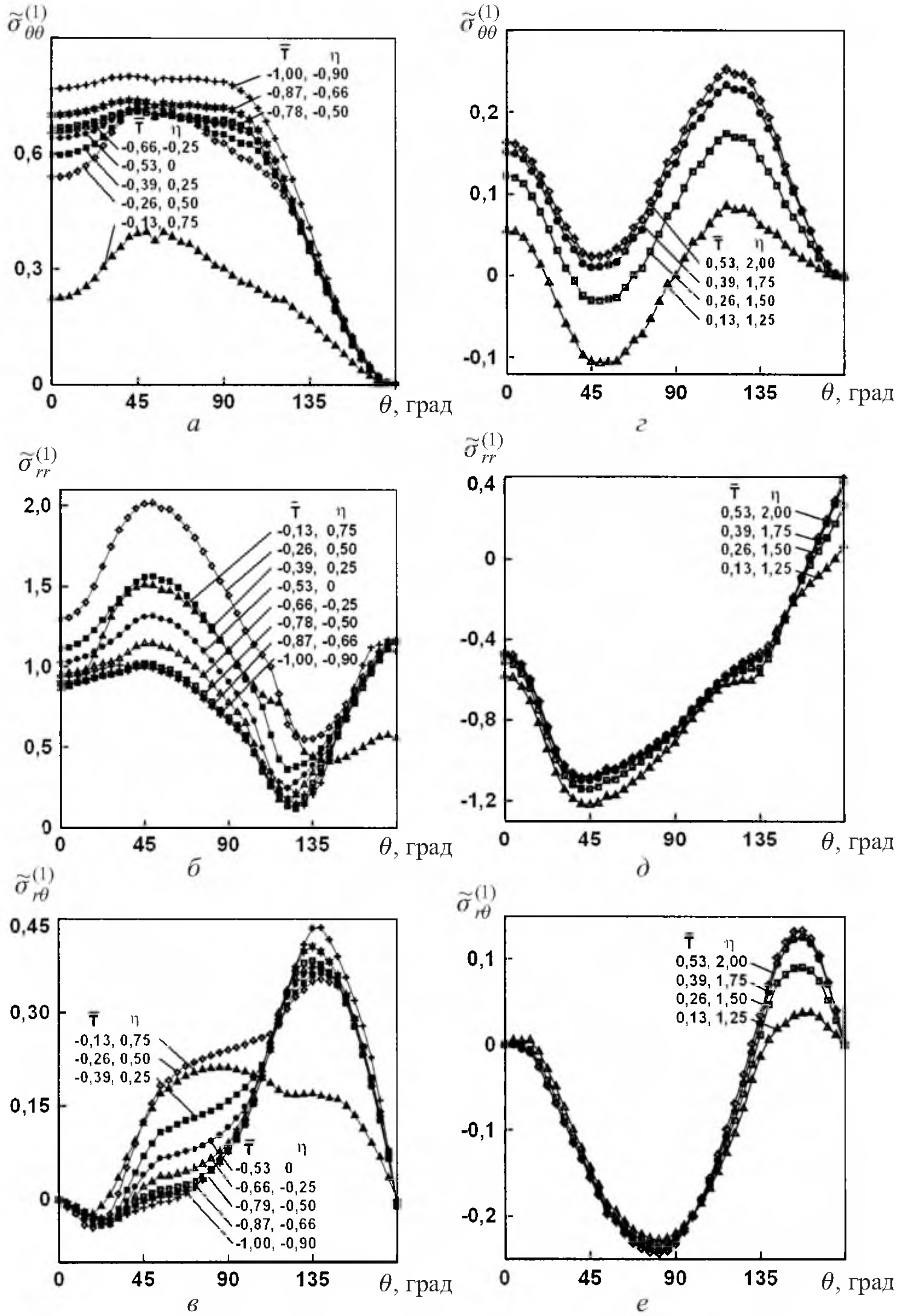


Рис. 4. Полярные распределения компонент напряжений для второго члена разложения (10): *а–в* – отрицательные значения несингулярного члена, $\bar{r} = 4{,}03$; *г–е* – его положительные значения, $\bar{r} = 4{,}05$.

Наибольшие отличия в распределении деформаций при двухосном нагружении наблюдаются для нормальных деформаций (рис. 5,*а*).

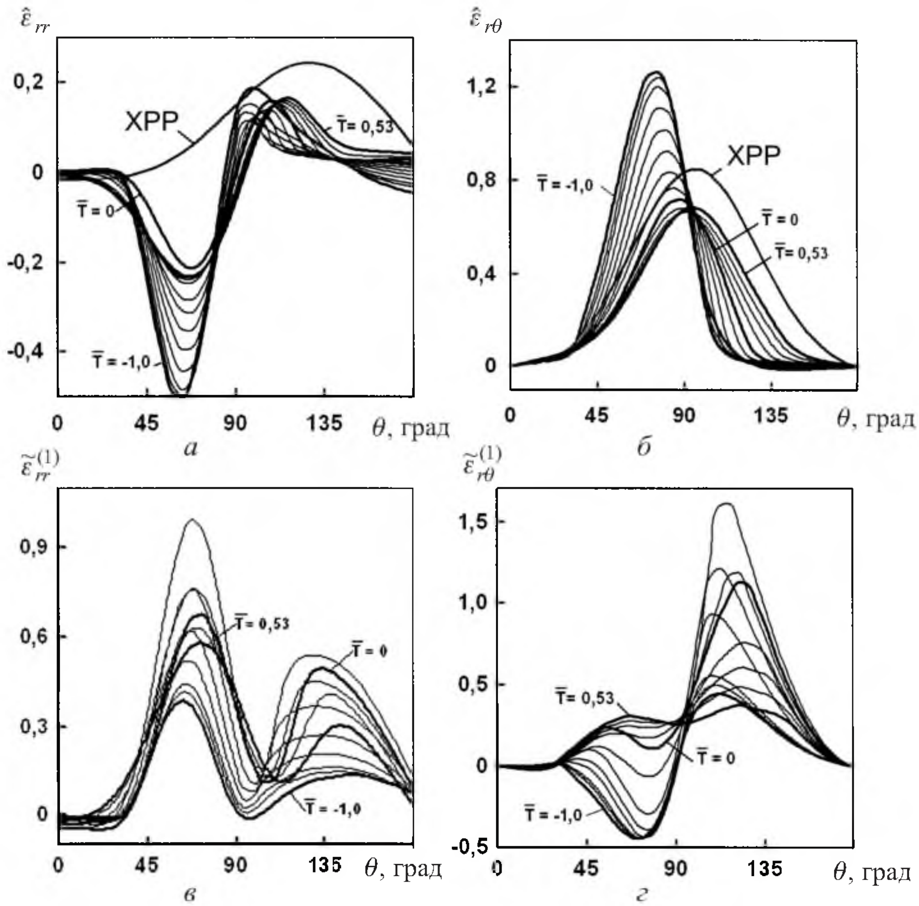


Рис. 5. Полярные распределения компонент деформаций для общего МКЭ-решения (*а*, *б*) и для второго члена разложения (*в*, *г*): жирные линии – значения несингулярного члена $\bar{T}$, соответствующие границам исследованного диапазона и промежуточной ситуации для $\bar{T} = 0$ ($\bar{r} = 4{,}05$).

Пластические деформации, соответствующие общему МКЭ-решению, имеют качественно иную картину полярного распределения по отношению к ХРР-решению. Сдвиговые деформации (рис. 5,*б*) в большей степени соответствуют ХРР-модели. На рис. 5,*в*,*г* приведены полярные распределения безразмерных компонент деформаций второго члена разложения, рассчитанные по формуле (15).

Рис. 6 иллюстрирует полярные распределения безразмерных компонент перемещений для общего МКЭ-решения и для второго члена разложения, рассчитанные соответственно по уравнениям (12) и (16). Один из исследованных вариантов распределений полей перемещений второго члена, относящийся к одноосному растяжению, хорошо согласуется с результатами [9]. Видно, что отрицательные значения несингулярного члена $\bar{T}$ приводят к большему эффекту отличия от асимптотического решения ХРР [1–3]. Представленные ниже расчеты посвящены определению амплитуды сингулярности второго члена (в литературных источниках встречается название параметр стеснения). Напомним, что в упругом решении (1) показатель (тип) сингулярности первого доминирующего члена имеет значение $-0{,}5$, для второго члена разложения он равен нулю. В пластическом решении (7) показатель сингулярности первого доминирующего члена имеет явно выраженную зависимость от степени деформационного упрочнения материала $-1/(n+1)$. При этом в отличие от упругого решения тип сингулярности t не равен нулю и имеет неявно выраженную зависимость от показателя деформационного упрочнения n, как это показано в работах [8, 9]. Поэтому второй член разложения в общем случае, строго говоря, нельзя называть несингулярным, поскольку для ряда значений n показатель t имеет отрицательное значение, хотя для большинства величин n из диапазона свойств реальных конструкционных материалов $t > 0$. Для параметра амплитуды t используется также термин – коэффициент интенсивности второго члена. В нашем случае для исследуемого материала с показателем деформационного упрочнения $n = 5$ тип сингулярности второго члена $t = 0{,}055$.

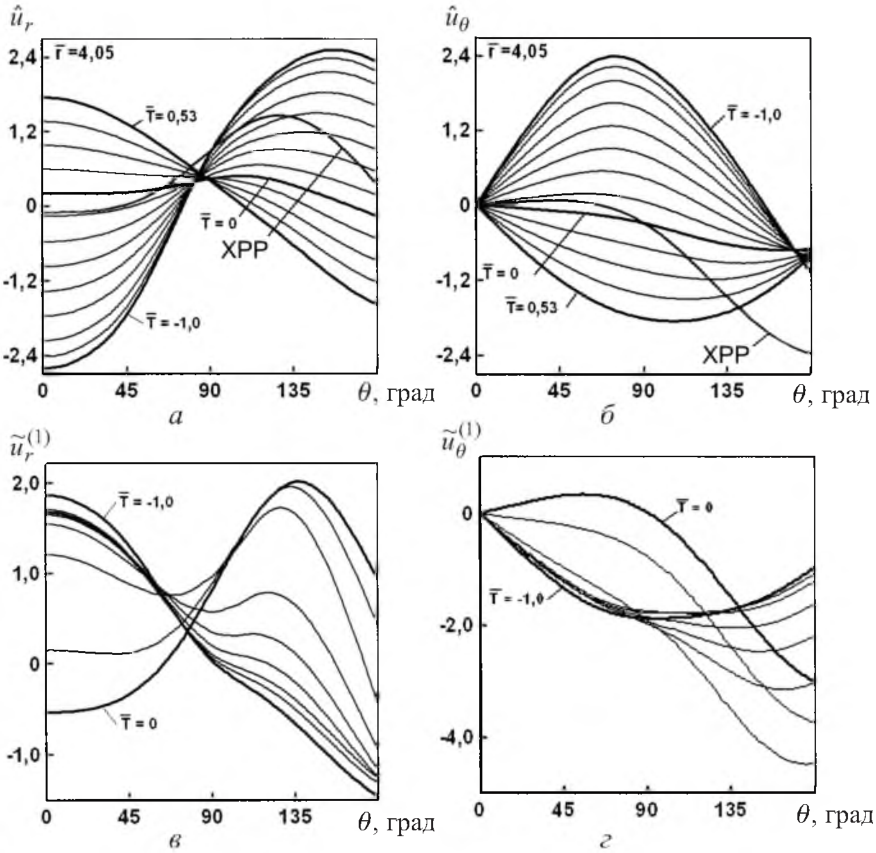
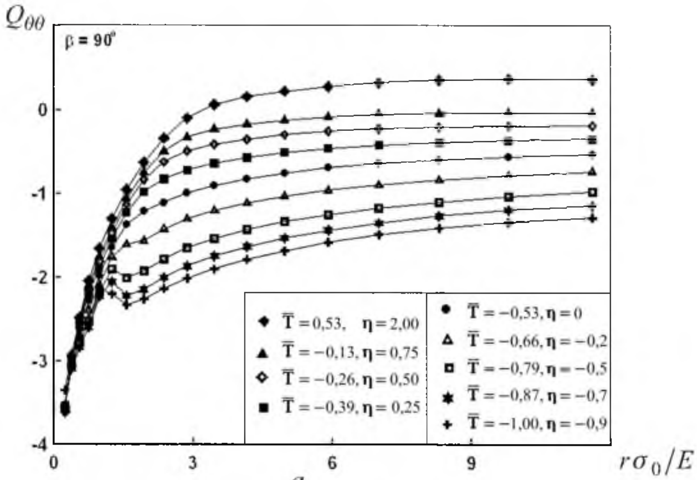
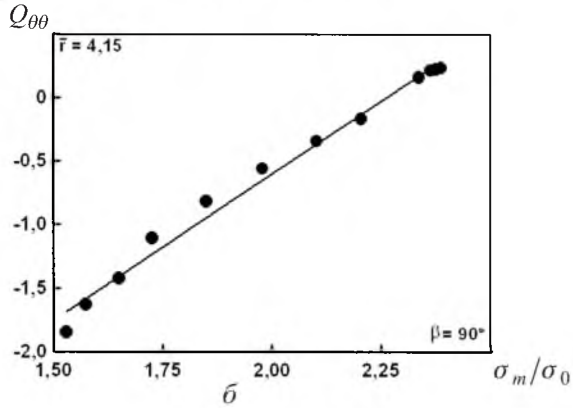


Рис. 6. Полярные распределения компонент перемещений для общего МКЭ-решения (*а*, *б*) и для второго члена разложения (*в*, *г*).

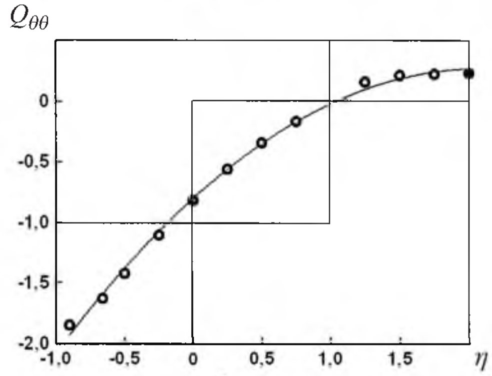
На рис. 7 приведены результаты исследования амплитуды сингулярности, или коэффициента интенсивности второго члена, рассчитанного по уравнению (17). С помощью данных на рис. 7,*а* можно получить четкую информацию о характере изменения коэффициента интенсивности напря-



а



б



в

Рис. 7. Изменение амплитуды второго члена разложения при различных видах двухосного нагружения.

жений второго члена (или параметра стеснения $Q_{\theta\theta}$) на продолжении трещины. Заметим, что зависимость параметра $Q_{\theta\theta}$ от радиальной координаты становится более выраженной при отрицательных значениях упругого несингулярного члена $\bar{T}$ и коэффициента двухосности приложенных номинальных напряжений η. На рис. 7,*б* построена зависимость параметра стеснения $Q_{\theta\theta}$ от величины нормированных на предел текучести гидростатических напряжений $\overline{\sigma}_m = \sigma_m / \sigma_0$. Напомним, что чем выше $\overline{\sigma}_m$, тем выше трехосность действующих напряжений. Следовательно, наибольшая степень стеснения действующих в области вершины трещины трехосных напряжений будет соответствовать положительным или близким к нулю значениям параметра $Q_{\theta\theta}$, при отрицательных величинах $Q_{\theta\theta}$ эффекты стеснения будут меньшими. Эти результаты соответствуют выводам, полученным в [13, 14, 18].

На рис. 7,*в* представлена зависимость параметра стеснения $Q_{\theta\theta}$, или амплитуды второго члена от коэффициента двухосности приложенных номинальных напряжений η. Можно выделить три характерные области проявления наведенной двухосности внешнего нагружения. Первая область высокого стеснения относится к диапазону $\eta \in (1{,}0...2{,}0)$, в котором параметр стеснения имеет близкое к стационарному значение. Вторая область средних эффектов стеснения соответствует диапазону от равнодвухосного к одноосному растяжению $\eta \in (0...1{,}0)$. Третья область малых эффектов стеснения относится к отрицательным значениям коэффициента двухосности $\eta \in (0...1{,}0)$. Учет сжимающих номинальных напряжений вызывает наибольшее отклонение всех параметров напряженно-деформированного состояния от ХРР-решения.

Заключение. Установлена непосредственная взаимосвязь между параметром стеснения, или амплитудой второго члена в пластической области вершины трещины и условиями наведенной двухосности внешнего нагружения. Эти данные могут быть уточнены при более полном и подробном исследовании влияния пластических свойств материала, оценке корреляции между значениями параметра Q, определенного по напряжениям, деформациям и перемещениям, установлении различий в поведении материала при плоской деформации и плоском напряженном состоянии и учете влияния смешанных форм деформирования и т.д. Обсуждение этих вопросов является предметом последующих публикаций.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по гранту 03-01-96233 и Академии наук Татарстана по гранту 05-5.3-218/2003(ф).

Р е з ю м е

Розроблено метод розрахунку амплітуди сингулярності і безрозмірного кутового розподілу других членів розкладу напружень, деформацій і переміщень у пластичній області вістря тріщини. Метод побудовано на поєднанні аналітичного розв’язку типу Хатчинсона–Райса–Розенгрена і числового розв’язку на основі модифікованого методу межового шару. Наведені результати дозволяють проаналізувати ефекти стискання в широкому інтервалі умов двовісного навантаження.

1. *Hutchinson J. W.* Singular behavior at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. – 1968. – **16**. – P. 13 – 31.

2. *Hutchinson J. W.* Plastic stress and strain fields at a crack tip // Ibid. – P. 337 – 347.
3. *Rice J. R. and Rosengren G. F.* Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material // Ibid. – P. 1 – 12.
4. *Rice J. R.* Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity // Ibid. – **22**. – P. 17 – 26.
5. *Williams M. L.* On the stress distribution at the base of stationary crack // J. Appl. Mech. – 1957. – **24**. – P. 111 – 114.
6. *Leevers P. S. and Radon J. C.* Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // Int. J. Fract. – 1982. – **19**. – P. 311 – 325.
7. *Larsson S. G. and Carlsson A. J.* Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1973. – **21**. – P. 263 – 272.
8. *Li Y and Wang Z.* High-order asymptotic field of tensile plane-strain nonlinear crack problems // Scientia Sinica (Ser. A). – 1986. – **29**. – P. 941 – 955.
9. *Sharma S. M. and Aravas N.* Determination of higher-order terms in asymptotic elastoplastic crack tip solutions // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – **39**. – P. 1043 – 1072.
10. *Nikishkov G. P., Brückner-Foit A., and Munz D.* Calculation of the second fracture parameter for finite cracked bodies using a three-term elastic-plastic asymptotic expansion // Eng. Fract. Mech. – 1995. – **52**. – P. 685 – 701.
11. *Zhu X. K. and Chao Y J.* Characterization of constraint of fully plastic crack-tip fields in non-hardening materials by the three-term solution // Int. J. Solid. Struct. – 1999. – **36**. – P. 4497 – 4517.
12. *Yang S., Chao Y J., and Sutton N. A.* Higher order asymptotic fields in a power law hardening material // Eng. Fract. Mech. – 1993. – **45**. – P. 1 – 20.
13. *Yuan H. and Lin G.* Elastoplastic crack analysis for pressure-sensitive dilatant materials. Pt. I: Higher-order solutions and two-parameter characterization // Int. J. Fract. – 1993. – **61**. – P. 295 – 330.
14. *Yuan H., Lin G., and Cornec A.* Quantifications of crack constraint effects in an austenitic steels // Int. J. Fract. – 1995. – **71**. – P. 273 – 291.
15. *Betegon C. and Hancock J. W.* Two-parameter characterization of elastic-plastic crack-tip fields // J. Appl. Mech. – 1991. – **58**. – P. 104 – 110.
16. *O'Dowd N. P. and Shih C. F.* Family of crack-tip fields characterized by a triaxiality parameter-I Structure of fields // J. Mech. Phys. Solids. – 1991. – **39**. – P. 989 – 1015.
17. *Anderson T. L.* Elastic-plastic fracture mechanics // Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications. – CRC Press, 1995. – P. 139 – 181.
18. *Yuan H. and Brocks W.* Quantification of constraint effects in elastic-plastic crack front fields // J. Mech. Phys. Solids. – 1998. – **46**. – P. 219 – 241.
19. *Andrews R. M. and Garwood S. J.* An analysis of fracture under biaxial loading using the nonsingular *T*-stress // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2001. – **23**. – P. 53 – 62.

20. *Tong J. T*-stress and its implications for crack growth // Eng. Fract. Mech. – 2002. – **69**. – P. 1325 – 1337.
21. *Wang X.* Elastic *T*-stress for cracks in test specimens subjected to non-uniform stress distributions // Ibid. – P. 1339 – 1352.
22. *Arun R. Y. and Narasimhan R.* A finite element investigation of the effect of crack tip constraint on hole growth under mode I and mixed mode loading // Int. J. Solid. Struct. – 1999. – **36**. – P. 1427 – 1447.
23. *Dhirendra V. K. and Narasimhan R.* Mixed-mode steady-state crack growth in elastic-plastic solids // Eng. Fract. Mech. – 1998. – **59**. – P. 543 – 559.
24. *Ayatollahi M. R., Smith D. J., and Pavier M. J.* Determination of *T*-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading // Int. J. Fract. – 1998. – **91**. – P. 283 – 298.
25. *Ayatollahi M. R., Smith D. J., and Pavier M. J.* Crack-tip constraint in mode II deformation // Ibid. – 2002. – **113**. – P. 153 – 173.
26. *Eftis J. and Subramonian N.* The inclined crack under biaxial load // Eng. Fract. Mech. – 1978. – **10**. – P. 43 – 67.
27. *Eftis J., Subramonian N., and Liebowitz H.* Crack border stress and displacement equations revisited // Ibid. – 1977. – **9**. – P. 189 – 210.
28. *Theocaris P. S. and Michopoulos J. G.* A closed-form solution of a slant crack under biaxial loading // Ibid. – 1983. – **17**. – P. 97 – 133.
29. *Yuan F. G. and Yang S.* Crack-tip fields in elastic-plastic material under plane stress mode I loading // Int. J. Fract. – 1997. – **85**. – P. 131 – 155.
30. *Shih C. F.* Small-scale yielding analysis of mixed plane strain crack problem // Fracture Analysis (ASTM STP 560). – Philadelphia, 1974. – P. 187 – 210.
31. *Shlyannikov V. N.* Elastic-plastic mixed mode fracture criteria and parameters. – Berlin: Springer, 2003. – 248 p.
32. *ANSYS V5.4*. User's Manual. – USA: Swanson Analysis Systems Inc., 1994.

Поступила 06. 04. 2005