

УДК 533.6.013.42

## ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЛИХ НЕЛІНІЙНИХ ЗГИННО-ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ У МОРІ, ВКРИТОМУ СУЦІЛЬНОЮ КРИГОЮ

Т. Б. ГОНЧАРЕНКО, В. В. ЯКОВЛЕВ

*Інститут гідромеханіки НАН України, Київ*

*Отримано 04.02.2005*

Для узагальненого рівняння Кортевега–де Вріза, до якого зводиться модель розповсюдження довгих нелінійних (згинно-гравітаційних) хвиль у морі, вкритому суцільною кригою, визначені області зміни параметрів задачі, де можуть існувати різні типи солітоноподібних розв'язків даного рівняння. Досліджено характер власних значень для різних співвідношень фізичних параметрів задачі та визначено область зміни параметрів, де можуть мати місце стаціонарні рішення типу класичної відокремленої хвилі.

Для обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза, к которому сводится модель распространения длинных нелинейных (изгибно-гравитационных) волн в море, покрытом сплошным льдом, выделены области изменения параметров задачи, где могут существовать различные типы солитоноподобных решений данного уравнения. Исследован характер собственных значений при различных соотношениях физических параметров задачи и определена область изменения параметров, в которой могут иметь место стационарные решения типа классической уединенной волны.

There have been found the domains of changing of parameters where the various types of solyton-like solutions of the generalized Korteweg–de Vrise equation, which describes the propagation of long nonlinear (flexible-gravitational) waves in the sea covered by ice, can exist. The character of eigen values for the different relations of the physical parameters of the problem has been researched and the domain of the parameters, where the steady solutions such as solyton can take place, is determined.

### ВСТУП

Дослідження нелінійних згинно-гравітаційних хвиль у морі, вкритому суцільною кригою, є досить нелегкою задачею внаслідок складності граничних умов на поверхні розділу лід – вода. Характер цих хвиль залежить від співвідношення між силами тяжіння та характеристиками льодового покриву. При їх розповсюдженні сили інерції маси льоду та сили пружності зрівноважують тиск води. Нелінійні згинно-гравітаційні хвилі являють собою комбінацію згинної хвилі в крижаній пластині, що плаває на поверхні рідини, і гравітаційної хвилі.

У випадку кінцевої чи нескінченної глибини рідини нелінійні згинно-гравітаційні хвилі досліджено в роботі [1]. У випадку малої глибини рідини розповсюдження довгих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль описується за допомогою узагальненого рівняння Кортевега–де Вріза (КдВ) [2], яке може мати рішення у вигляді солітоноподібних хвиль.

Солітоноподібні рішення нелінійно-дисперсійних рівнянь ретельно розглянуті в роботі [3]. Точне рішення узагальненого рівняння КдВ побудовано в роботі [4], в якій аналіз отриманого авторами рівняння показав, що точне рішення може бути здобутим тільки для від'ємних значень коефіцієнту при третій похідній. Тому автори при побудові

нелінійно-дисперсійного рівняння, яке описує розповсюдження згинно-гравітаційних хвиль, зробили припущення, що у крижаній пластині існує попередня напруга. Це призвело до потрібного знаку перед третьою похідною, проте побудоване для такого рівняння точне рішення має деякі дивні властивості, а саме: з побудованого розв'язку випливає, що класичний солітон існує тільки для певної дискретної множини значень коефіцієнтів рівняння. Це викликає сумнів щодо правильності побудованої моделі. При цьому, на відміну від інших солітонних рішень у нелінійних середовищах, що диспергують, швидкість такого солітону виявляється незалежною від амплітуди хвилі.

В роботі [5] побудовано довгохвильову модель розповсюдження згинно-гравітаційних хвиль у пружній пластині, яка плаває на поверхні рідини. Ця модель враховує ефекти нелінійної дисперсії рідини, інерцію, пружність та геометрично нелінійний прогин пластини, що моделює льодовий покрив. Для даної моделі, яка зводиться до узагальненого рівняння КдВ, побудовані і проаналізовані точні рішення у вигляді солітону та кноїдальних хвиль. Показано, що у випадку врахування нелінійного прогину пластини область існування солітонного рішення, на відміну від роботи [4], неперервно залежить від коефіцієнтів рівняння. Грунтуючись на роботі [5], спробуємо більш детально дослідити цю модель з точки зору співвідношен-

ня вказаних параметрів, які є відповідальними за існування солітоноподібних хвиль.

## 1. НЕЛІНІЙНО-ДИСПЕРСІЙНА МОДЕЛЬ

Солітоноподібні розв'язки нелінійних хвильових рівнянь становлять значний інтерес для дослідження як з математичної, так і з фізичної точок зору. В роботі [6] розглядаються солітонні рішення трьох типів. Перший, найвідоміший тип солітонного рішення рівняння КдВ – класична відокремлена хвиля. Другий тип – узагальнені відокремлені хвилі – хвилі, що біжать, подібні до відокремленої хвилі, але такі, що мають періодичну асимптотику на нескінченості. Третій тип – відокремлені хвилі з структурою, що осцилює, це так звані відокремлені хвилі-пакети. Узагальнене рівняння Кортевега–де Вріза, до якого зводиться довгохвильова нелінійно-дисперсійна модель [5], що описує поширення згинно-гравітаційних хвиль у пружній пластині, яка плаває на поверхні рідини, має вигляд

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial t} + \left(1 + \frac{3}{2}\alpha \xi_z\right) \frac{\partial \xi_z}{\partial x} + \frac{\beta + 3\gamma - 3h_1 \varepsilon_x E}{6} \frac{\partial^3 \xi_z}{\partial x^3} + \frac{\delta}{2} \frac{\partial^5 \xi_z}{\partial x^5} = 0,$$

де

$$\alpha = \frac{A}{d_0}; \quad \beta = \frac{d_0}{\lambda}; \quad \gamma = \frac{\rho_1 h_1 \beta}{\rho_2 d_0}; \quad \delta = \frac{\beta D}{\rho_2 g d_0^2 \lambda^2};$$

$\rho_1, h_1, D, E$  – відповідно щільність, товщина, циліндрична жорсткість і модуль пружності пластини;  $\varepsilon_x$  – деформація серединної поверхні за рахунок геометрично нелінійного прогину;  $A, \lambda$  – амплітуда і довжина хвилі.

Ця модель досить цікава з точки зору фізики процесу, оскільки в рівнянні в явному вигляді присутні основні фізичні параметри, що визначають характер можливих його рішень.

Позначаючи  $\kappa = (\beta + 3\gamma - 3h_1 \varepsilon_x E)/6$ , запишемо дисперсійне співвідношення у вигляді

$$\omega = k - \kappa k^3 + \frac{\delta}{2} k^5.$$

Зрозуміло, що  $\frac{\omega}{k} \neq \frac{\partial \omega}{\partial k}$ . Тому в залежності від значень параметрів задачі існують області аномальної і нормальної дисперсії:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} - \frac{\omega}{k} = -2\kappa k^2 + 2\delta k^4.$$

Для  $\kappa < 0$  та будь-якого  $k$  маємо  $\frac{\partial \omega}{\partial k} > \frac{\omega}{k}$ , тобто дисперсія аномальна. При  $\kappa > 0$  існують області нормальної  $\left(k < \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}}\right)$  й аномальної  $\left(k > \sqrt{\frac{\kappa}{\delta}}\right)$  дисперсії. Це становить певний інтерес, оскільки фазова швидкість у даній моделі може бути пов'язана з параметром біфуркації.

Для  $\kappa < 0$  існує гілка дисперсійної залежності, що проходить через 0, така, що її графік лежить цілком з одного боку від дотичної до нього в нулі. Така картина свідчить про існування рішення типу класичних відокремлених хвиль [6]. У роботі [5] побудоване точне солітонне рішення I типу даного рівняння, тобто класична відокремлена хвиля.

Проаналізуємо вихідне рівняння аналогічно [7] з метою з'ясувати зв'язок фізичних параметрів задачі з типом можливих його рішень.

## 2. ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Після заміни  $\zeta = x - Ut$  й інтегрування узагальнене рівняння Кортевега–де Вріза набуває вигляду:

$$\frac{2(1-U)}{\delta} u + \frac{3\alpha}{2\delta} u^2 + \frac{2\kappa}{\delta} u \zeta \zeta + u \zeta \zeta \zeta = 0. \quad (1)$$

Такому рівнянню відповідає динамічна система:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2, \\ \dot{u}_2 = u_3, \\ \dot{u}_3 = u_4, \\ \dot{u}_4 = \frac{2(U-1)}{\delta} u_1 - \frac{3\alpha}{2\delta} u_1^2 - \frac{2\kappa}{\delta} u_3. \end{cases} \quad (2)$$

Традиційний підхід до вивчення подібних систем полягає в пошуку так званих стаціонарних станів системи (тобто таких точок фазового простору  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ , для яких праві частини системи (2) дорівнюють 0, і дослідженні поведінки системи поблизу цих точок за допомогою її лінеаризації в їхніх околах. Зрозуміло, що система (2) завжди має два стаціонарних стани:

$$\begin{aligned} S_1 &= (0, 0, 0, 0), \\ S_2 &= \left(\frac{4(U-1)}{3\alpha}, 0, 0, 0\right). \end{aligned} \quad (3)$$

При  $U = 1$  ці стани зливаються в один; у цьому випадку у вихідному рівнянні зникають перші два доданки. Такий самий стаціонарний стан характерний і для лінійної системи.

Нехай маємо стаціонарний стан  $(\sigma, 0., 0., 0.)$ . Після лінеаризації системи (1) у околі цього стану отримаємо для  $u_4$  таке рівняння:

$$\dot{u}_4 = u_1 \left( \frac{2(U-1)}{\delta} - \frac{3\alpha\sigma}{\delta} \right) - \frac{2\kappa}{\delta} u_3. \quad (4)$$

Щоб знайти власні значення, які характеризують поведінку системи поблизу кожного стаціонарного стану, необхідно одержати вікові рівняння для цих станів. Із системи (2) маємо:

$$\begin{vmatrix} -\lambda_s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_s & 1 \\ -G & 0 & \frac{-2\kappa}{\delta} & -\lambda_s \end{vmatrix} = \lambda_s^4 + \frac{2\kappa}{\delta} \lambda_s^2 + G, \quad (5)$$

$$G = \frac{2(1-U)}{\delta} + \frac{3\alpha}{\delta} \sigma = \pm \frac{2(1-U)}{\delta}.$$

Аналіз відповідних детермінантів показує, що і  $S_1$ , і  $S_2$  будуть сингулярними точками системи, але  $S_1$  є точкою повороту, а  $S_2$  – точкою розгалуження для системи (2). З рівняння (5) одержуємо наступні вирази для власних значень:

$$\lambda_{S_1}^2 = -\frac{\kappa}{\delta} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{\delta^2} - \frac{2(1-U)}{\delta}},$$

$$\lambda_{S_2}^2 = -\frac{\kappa}{\delta} \pm \sqrt{\frac{\kappa^2}{\delta^2} + \frac{2(1-U)}{\delta}}. \quad (6)$$

Вигляд цих формул говорить про можливу взаємозалежність власних значень, що характеризують два різні стаціонарні стани системи. Аналіз відповідних динамічних систем, отриманих у результаті лінеаризації вихідної системи в околі її особливих точок (стаціонарних станів), показав, що за типом ці стани тісно пов'язані між собою, причому можна вказати інтервали фізичних параметрів, що визначають різний характер коренів вікового рівняння, а отже, тип самих станів.

У роботі [8] наведені можливі фазові траєкторії динамічної системи в околиці її особливих точок у залежності від відповідних характеристичних чисел для випадку системи трьох рівнянь. Надати подібним чином фазові траєкторії для даної системи проблематично, тому про характер можливих рішень залишається судити по вже побудованих рішеннях для рівнянь такого типу і по комбінаціях вікових коренів, що визначають поведінку рішення динамічної системи поблизу її особливих точок [7]. Розглянемо області можливого існування різних типів розв'язку (1).

Характер значень  $\lambda_{S_1}$  і  $\lambda_{S_2}$  залежить насамперед від позитивності значень відповідних дискри-

мінантів у виразах (6), а також від знака параметра  $\kappa$ , оскільки  $\delta$  завжди додатне. Области можливих комбінацій власних значень у залежності від параметрів задачі наведені на рис. 1.

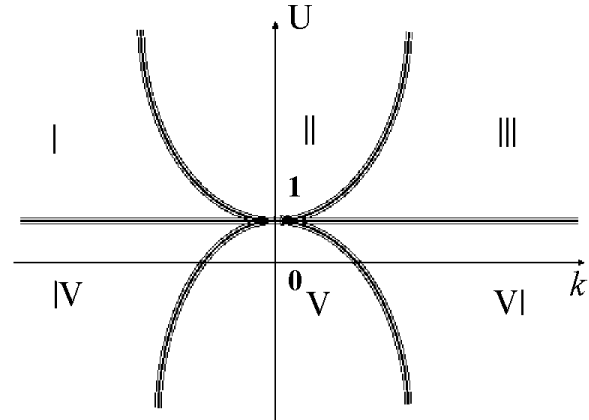


Рис. 1. Схема областей можливих комбінацій характеристичних значень у площині  $U(\lambda)$

В області III стаціонарний стан  $S_1$  характеризується парою дійсних і парою уявних коренів протилежних знаків; у двовимірному фазовому просторі такі дійсні корені свідчать про сідловий характер стаціонарного стану, а уявні – про те, що він має характер центра. Сідлова точка відрізняється тим, що вона є точкою перетину двох фазових траєкторій, причому для однієї траєкторії ця точка стійка, для іншої – нестійка. Центр характеризується тим, що через нього фазові траєкторії не проходять, а мають вигляд замкнених кривих навколо цієї точки. Відповідно дана особлива точка володіє двовимірним інваріантним простором і однопараметричним сімейством орбіт.

Стан  $S_2$  є стійким і теж має характер центра, оскільки володіє двома парами протилежних за знаком уявних коренів; відповідно існує два сімейства орбіт, породжених даною точкою.

Область IV, симетрична області III відносно лінії  $U = 1$ , міняє місцями  $S_1$  і  $S_2$  з точки зору їх характеру в порівнянні з областю III.

Таку саму антисиметрію мають області II і V, де один стан ( $S_1$  у II і  $S_2$  в V) зберігає той самий характер, що й у вище розглянутих областях, а в іншого стану (відповідно в  $S_2$  у II і  $S_1$  в V) уявні корені переходять у комплексно-спряжені пари, наявність яких у двовимірному фазовому просторі говорить про те, що відповідний стаціонарний стан – фокус, стійкий чи ні в залежності від знака дійсної частини коренів. Згідно [7], у цих областях можливе існування рішень у вигляді узагальненої

відокремленої хвилі.

З погляду існування класичного солітонного рішення найцікавішими виявляються області I і IV, що також симетричні відносно лінії  $U = 1$  щодо “обміну” властивостями  $S_1$  і  $S_2$ . Тут один стан ( $S_1$  у VI і  $S_2$  в I) характеризується двома парами, знову ж таки протилежних за знаком, дійсних коренів, а інший – аналогічною парою дійсних і парою спряжених уявних коренів. Згідно [7, 8], чотири дійсних корені вікового рівняння говорять про наявність двох двовимірних (стійкого і нестійкого) інваріантних просторів, у результаті перетину яких утворюються солітонні рішення з гладкою структурою фронтів. Для  $\kappa < 0$  та значень параметра  $U \in \left(1 - \frac{\kappa^2}{2\delta}, 1 + \frac{\kappa^2}{2\delta}\right)$  вікове рівняння для одного зі станів  $S_1, S_2$  обов’язково має чотири дійсних корені. Значення параметра  $U$  для солітонного рішення, побудованого в [5], також належить даному проміжку.

Лінія  $U = 1 - \frac{\kappa^2}{2\delta}$  дає для  $S_1$  пари кратних коренів, дійсних для від’ємних  $\kappa$  і уявних для  $\kappa > 0$ ; для  $S_2$

$$\lambda_{S_2}^2 = -\frac{\kappa}{\delta} \left(1 \mp \sqrt{2}\right).$$

На лінії  $U = 1 + \frac{\kappa^2}{2\delta}$  знову  $S_1$  і  $S_2$  міняються місцями, і

$$\lambda_{S_1}^2 = -\frac{\kappa}{\delta} \left(1 \mp \sqrt{2}\right).$$

Таким чином, проведений аналіз показує (див. рис. 1), що поведінка коренів виявляється симетричною щодо ліній  $U = 1$  і  $\kappa = 0$ . При переході через  $\kappa = 0$  міняються місцями уявні та дійсні значення, при переході через  $U = 1$  міняються місцями стани, причому на цій лінії вони зливаються в один (див. вирази (6)) з нульовим власним значенням кратності 2 і парою дійсних або уявних коренів протилежних знаків. Далі, ми бачимо, що не існує такої області значень параметрів, у якій  $S_1$  і  $S_2$  одночасно характеризувалися б комплексними коренями. Комплексні значення коренів вікового рівняння з’являються спряженими парами, власні вектори для пари  $\lambda_{i,i+1} = \mu_i \pm i\nu_i$  мають вигляд:

$$e^{\mu_i t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_i & 1 & 0 & 0 \\ \mu_i^2 & 2\mu_i & 1 & 0 \\ \mu_i^3 & 3\mu_i^2 & 2\mu_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_i^3 \end{pmatrix} * \\ * \begin{pmatrix} \cos(\nu_i t) & \sin(\nu_i t) \\ -\sin(\nu_i t) & \cos(\nu_i t) \\ -\cos(\nu_i t) & -\sin(\nu_i t) \\ \sin(\nu_i t) & -\cos(\nu_i t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}.$$

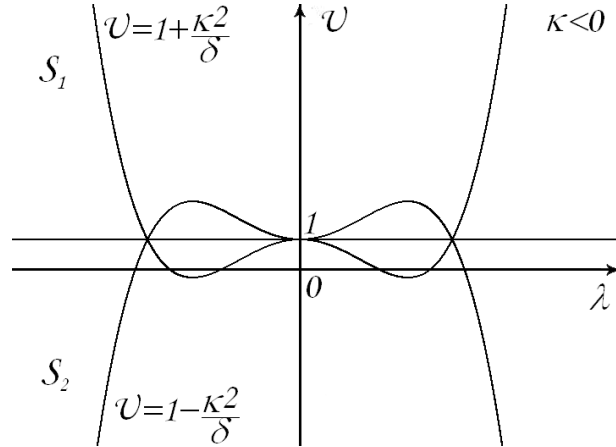


Рис. 2. Залежність параметру біфуркації від характеристичних значень для  $\kappa < 0$

Сідлові точки, яким у двовимірному фазовому просторі відповідають пари дійсних власних значень протилежних знаків, зазвичай лежать на сепаратрисі, тобто лінії, що розділяє області з різним характером фазових траєкторій. Відповідно до роботи [7], солітонні рішення з фронтом, що осцилює, можуть мати місце в областях II і V, а з гладким – у I і VI. Природний інтерес (у сенсі переходу від одного типу рішень до іншого) може викликати лінія границі I-II і V-VI.

### 3. ДОДАТКОВІ ЗАУВАЖЕННЯ

Параметр  $U$  виявляється біфуркаційним. Симетрія в характері станів  $S_1, S_2$  стає зрозумілою, якщо звернутися до рис. 2, де надана залежність  $U$  від власних значень  $\lambda$  для  $S_1$  і  $S_2$ . При  $\kappa > 0$  картина досить проста, існує симетрія щодо осі  $U$  і лінії  $U = 1$ . Для  $\kappa < 0$  симетричність зберігається, але ситуація набагато цікавіша. Очевидно, що кількість точок перетину будь-якої лінії  $U = \text{const}$  з параболою пов’язана з характером коренів вікового рівняння (5), а переміщення такої лінії від значення  $U = 1 - \frac{\kappa^2}{2\delta}$  вгору до  $U = 1 + \frac{\kappa^2}{2\delta}$  пояснює “обмін характером” між стаціонарними станами: чотири точки перетину прямої  $U = \text{const}$  із графіком при переході через  $U = 1$  переходять з однієї параболи на іншу.

Аналіз коефіцієнтів полінома в [5] показує, що кратні корені даний поліном може мати тільки при  $U = c$ , на відміну від варіанта побудови солітонного рішення КДВ [3], де два з коефіцієнтів аналогічного полінома являють собою константи інтегрування, і вимога кратності кореня не призводить до

такого жорсткого обмеження. Оскільки якщо якунебудь залежність можна надати у вигляді полінома, такий поліном є єдиним, то солітонне рішення в [5] у даному випадку теж буде єдиним, тому що можливість його побудувати забезпечується саме кратним коренем полінома.

## ВИСНОВКИ

Лінеаризація відповідної динамічної системи для узагальненого рівняння КдВ та аналіз особливих точок дають можливість з'ясувати, які співвідношення між фізичними параметрами вихідної задачі визначають області, де можна очікувати існування солітоноподібних згинно-гравітаційних хвиль. Крім того, стаціонарні стани виявились пов'язані між собою за характером, а залежність параметра біфуркації від власних значень допомогла з'ясувати характер прихованої біфуркації. Отримані співвідношення цікаві тим, що до них у явному вигляді входять параметр, що характеризує дисперсію пружності пластини, параметр, відповідальний за дисперсію хвиль, та параметр, пов'язаний із фазовою швидкістю звичайних гравітаційних хвиль на воді. Це дає можливість подальшого ретельного аналізу відповідних

процесів, фізико-математичні моделі яких можуть бути зведені до аналогічного рівняння.

1. *Гладун О.М.* Нелинейные колебания тонкой упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости.– Дис.на соиск. учен.ст. канд. физ.-матем. наук: Минск, 1989.– 164 с.
2. *Ткаченко В.А., Яковлев В.В.* Длинно-волновые нелинейно-дисперсионные модели трансформации поверхностных волн в море, покрытом льдом // Исследование цунами. – М.– 1988.– N 3.– С. 41-46.
3. *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах.– М.: Мир, 1983.– 136 с.
4. *Марченко А.В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // ПМН.– 1988.– **52**, **В. 2**.– С. 230-234.
5. *Ткаченко В.А., Яковлев В.В.* Нелинейно-дисперсионная модель трансформации поверхностных волн в прибрежной зоне моря, покрытой льдом // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– **1(73)**, **N 3**.– С. 55–64.
6. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) // МЖГ.– 2000.– N 2.– С. 3-27.
7. *Ильичев А.Т., Марченко А.В.* О распространении длинных нелинейных волн в тяжелой жидкости под ледяным покровом // МЖГ.– 1989.– N 1.– С. 88-95.
8. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. Учебное пособие.– М.: Наука, 1984.– 432 с.