УДК 539.37

Построение определяющих соотношений деформационной теории для простых по Ноллу упрочняющихся материалов с упругопластическим поведением

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Для произвольных непрерывных кусочно-непрерывно дифференцируемых траекторий деформирования, любых деформаций и типов симметрии свойств материала на основе теории простых упрочняющихся материалов с упругопластическим поведением математически строго построены общие определяющие соотношения деформационной теории пластичности. Рассмотрены два условия, при которых это возможно. Разработаны подходы к строгой специализации общих определяющих соотношений деформационной теории пластичности посредством наложения ограничений на деформации, процессы деформирования и свойства материалов. При этом ограничения на свойства материалов формализуют полученные в экспериментальных исследованиях данные. Построен ряд как новых, так и известных определяющих соотношений, расположенных в виде иерархии по уровню сложности реакции на деформирование. Определена область применимости полученных физических уравнений. Особое внимание уделено моделированию конечных и бесконечно малых деформаций изотропных материалов.

Ключевые слова: простой упрочняющийся упругопластический материал, деформационная теория пластичности, определяющее соотношение, анизотропия, конечные и бесконечно малые деформации.

Обеспечение средствами улучшения и уточнения известных, а также построения новых физически обоснованных моделей, позволяющих с различной точностью не только описывать, но и прогнозировать поведение наблюдаемых в природе материалов в широком диапазоне изменения условий их деформирования, является важной задачей механики сплошной среды [1]. Значительный прогресс в этой области достигнут в рациональной механике континуума, где получила развитие теория простых материалов Нолла (далее – теория простых материалов) [1–4], основанная на физически обоснованных гипотезах и включающая практически все известные чисто механические модели сплошных сред: твердых деформируемых тел, жидкостей и жидких кристаллов. Теория простых материалов справедлива для широкого класса процессов (траекторий, историй), произвольных деформаций и типов симметрии свойств тела. Как установлено в [1], для простого материала справедлив принцип образца. Теория простых материалов, по мнению авторов [5], – более строгая и завершенная, чем большинство частных теорий.

В экспериментальной механике основное внимание уделяется изучению однородных деформаций, а более сложные случаи деформирования обычно объясняют с их помощью [1]. Это эквивалентно предположению, что всякий исследуемый в лаборатории материал может быть достаточно хорошо смоделирован некоторым простым материалом в смысле математической теории. Учитывая, что экспериментальные методики исследования неоднородных деформаций практически не разработаны, и поэтому известно ограниченное число данных для неоднородного деформирования, теория простых материалов в настоящее время для физически обоснованной механической теории представляется максимально сложной.

В рамках теории простых материалов, основываясь на результатах [6–11], построены общие определяющие соотношения упрочняющихся упругопластических материалов [12], которые справедливы для произвольных непрерывных кусочно-непрерывно дифференцируемых траекторий деформирования, любых деформаций и типов симметрии свойств материала. Приняты следующие определяющие свойства упругопластических материалов:

1) напряжения в материале зависят от пути в тензорном пространстве деформаций и нечувствительны к изменению временной истории деформирования;

2) деформацию тем или иным способом можно разделить на упругую и пластическую составляющие;

3) справедлив некоторый критерий текучести;

4) выполняется какой-либо закон течения.

Определяющие уравнения теории простых упрочняющихся упругопластических материалов описывают столь обширный диапазон возможных типов поведения последних, что нет возможности провести их детальный анализ, а также использовать в приложениях, не рассматривая частные случаи.

В настоящее время в практике расчетов широко применяется деформационная теория пластичности. В связи с этим актуальными являются задачи установления условий приведения определяющих соотношений [12] к общим уравнениям деформационной теории, а также разработки метода построения на основе последних как новых, так и известных (полученных ранее иным образом) физических уравнений в виде иерархии по уровню сложности реакции материала на деформирование.

В данной работе для произвольных непрерывных кусочно-непрерывно дифференцируемых траекторий деформирования, любых деформаций и типов симметрии свойств материала на основе теории простых упрочняющихся материалов с упругопластическим поведением [12] математически строго построены общие определяющие соотношения деформационной теории пластичности. Рассмотрены два условия, при выполнении которых это возможно. Разработаны подходы к строгой специализации общих определяющих соотношений деформационной теории пластичности посредством наложения ограничений на деформации, процессы деформирования и свойства материалов. При этом ограничения на свойства материалов формализуют полученные в экспериментальных исследованиях данные. Построен ряд как новых, так и известных определяющих соотношений, расположенных в виде иерархии по уровню сложности реакции материала на деформирование. Установлена область применимости полученных физических уравнений. Особое внимание уделено моделированию конечных и бесконечно малых деформаций изотропных материалов.

Рассмотрим истории деформирования, начинающиеся из ненапряженного и недеформированного начального состояния. Такое предположение обычно используется в теории пластичности [13–16]. Как следует из данных

[1, 12], принятое здесь начальное состояние включает бесконечное множество отличающихся поворотами отсчетных конфигураций, которые являются частными случаями неискаженных конфигураций, используемых при определении как твердого, так и изотропного тел.

Для заданного трехмерного векторного пространства V посредством Lin обозначим бесконечное множество всех линейных преобразований (тензоров второго ранга) на V с $\mathbf{1}$ – тождественным преобразованием. Далее будем рассматривать такие подмножества Lin:

Lin^+ – все элементы Lin с положительным определителем;

Sym – все симметричные элементы Lin;

Rot – все вращения V, т.е. все ортогональные элементы Lin^+.

Определим историю как непрерывное кусочно-непрерывно дифференцируемое отображение [12]:

$$\overline{\mathbf{F}}\colon [0,1] \to Lin^+, \qquad \mathbf{F} = \overline{\mathbf{F}}(\tau);$$

во "время" τ значение $\overline{\mathbf{F}}(\tau)$ истории $\overline{\mathbf{F}}$ интерпретируется как градиент деформации в фиксированной материальной точке по отношению к фиксированной отсчетной конфигурации κ_0, принадлежащей во всех рассматриваемых случаях к ненапряженному и недеформированному состоянию.

Пусть F обозначает бесконечное множество всех историй, G – подмножество F, состоящее из всех историй, начальное значение которых есть вращение

$$G := \{\overline{\mathbf{F}} \in F \quad \overline{\mathbf{F}}(0) \in Rot\}.$$

Согласно данным [12], общее определяющее соотношение упрочняющегося упругопластического материала можно записать так:

$$\widetilde{\mathbf{T}}\colon G \to Sym, \qquad \mathbf{T} = \widetilde{\mathbf{T}}(\overline{\mathbf{F}}). \tag{1}$$

Значение функционала $\widetilde{\mathbf{T}}(\overline{\mathbf{F}})$ дает напряжение Коши $\mathbf{T}$ в конце истории $\overline{\mathbf{F}}$.

Следуя [17, 18], можно показать, что приведенная (не зависит от системы отсчета) форма уравнения (1) может быть записана следующим образом:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}(1)^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\overline{\mathbf{R}}(1) = \widetilde{\mathbf{T}}_1(\overline{\mathbf{C}}) = \widetilde{\mathbf{T}}_1((\hat{\mathbf{C}})^{\mathbf{R}};\, \overline{\mathbf{C}}(1)), \tag{2}$$

где $\overline{\mathbf{C}} = \overline{\mathbf{F}}(1)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{F}}(1)$ и $\hat{\mathbf{C}}$ – истории изменения правого тензора Коши–Грина и правого относительного тензора Коши–Грина соответственно; $\overline{\mathbf{R}}(1)$ – ортогональный тензор поворота в полярном разложении градиента деформации; $\overline{\mathbf{F}}(1) = \overline{\mathbf{R}}(1)\overline{\mathbf{U}}(1)$; $\overline{\mathbf{U}}(1)$ – правый тензор растяжения; $\widetilde{\mathbf{T}}_1(\overline{\mathbf{C}})$ – отображение истории $\overline{\mathbf{C}}$ на симметричные тензоры. Здесь и далее единица в круглых скобках и верхний индекс "т" при любом тензоре обозначают соответственно его значение в конце процесса деформирования и транспонирование.

В соотношение (2) $\overline{\mathbf{C}}(1)$ и $\overline{\mathbf{R}}(1)$ входят в качестве параметров. История $(\hat{\mathbf{C}})^{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}(1)^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{R}}(1)$ определяет предысторию изменения правого тензора Коши–Грина $\breve{\mathbf{C}} = (\hat{\mathbf{C}})^{\mathbf{R}}$, т.е. процесс изменения $\mathbf{C}$ в диапазоне $0 \le \tau < 1$. При задании тензора $\overline{\mathbf{C}}(1)$ в (2) может независимо изменяться история $\breve{\mathbf{C}}$.

Уравнение (2) описывает поведение простого упрочняющегося упругопластического материала на любых непрерывных кусочно-непрерывно дифференцируемых траекториях деформирования, которые могут включать как активные, так и пассивные участки деформирования.

Как показал анализ, функционал $\widetilde{\mathbf{T}}_1(\overline{\mathbf{C}})$ математически строго приводится к функции правого тензора Коши–Грина в конце процесса, в частности, когда в уравнении (2):

1) предыстория изменения правого тензора Коши–Грина фиксирована, т.е. задана неизменная форма траектории деформирования тензора $\breve{\mathbf{C}}$ в изучаемом диапазоне изменения последнего;

2) тензор напряжений не зависит от предыстории изменения правого тензора Коши–Грина.

Для этих двух случаев определяющее соотношение (2) принимает вид

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{R}}(1)^{\mathrm{T}}\mathbf{T}\overline{\mathbf{R}}(1) = \mathbf{g}_1(\overline{\mathbf{C}}(1)), \tag{3}$$

где $\mathbf{g}_1$ – некоторая, в общем случае анизотропная, тензорная функция тензорного аргумента.

Условия (1) и (2), при которых (3) справедливо, существенно отличаются. В условии (1) тензор напряжений зависит от предыстории правого тензора Коши–Грина, в условии (2) такая зависимость не имеет места.

Приведенные в [14] данные экспериментов, которые обосновывают применимость деформационной теории для некоторых материалов при сложном нагружении, свидетельствуют о приемлемости в ряде случаев условия (2). Исходя из первого определяющего свойства упругопластического материала, такие случаи являются вырожденными и приближенно применимыми для ограниченных классов материалов и процессов в некотором диапазоне изменения условий деформирования.

Уравнение (3) строго справедливо при выполнении того или иного условия, а также обоих из рассмотренных выше двух условий для простых упрочняющихся упругопластических материалов [12], у которых активный процесс начинается с момента нагружения или имеет место начальная поверхность текучести. При этом, как уже отмечалось, истории могут включать как активные, так и пассивные участки деформирования.

Для изотропных материалов с учетом данных [1] из (3) получим

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}_2(\mathbf{B}), \tag{4}$$

где $\mathbf{g}_2$ – тензорная функция тензорного аргумента, удовлетворяющая следующему условию:

$$\mathbf{Q}\mathbf{g}_2(\mathbf{B})\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{g}_2(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}) \tag{5}$$

для всех ортогональных $\mathbf{Q}$ и всех симметричных $\mathbf{B}$ тензоров.

Здесь и далее $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}}(1) = \overline{\mathbf{F}}(1)\overline{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}(1) = \overline{\mathbf{R}}(1)\overline{\mathbf{C}}(1)\overline{\mathbf{R}}^{\mathrm{T}}(1)$; $\overline{\mathbf{B}}$ – история изменения левого тензора Коши–Грина.

Функция, удовлетворяющая требованию (5), называется изотропной. И наоборот, если функция $\mathbf{g}_2$ удовлетворяет тождеству (5), то (4) является определяющим соотношением простого изотропного упрочняющегося упругопластического материала, отнесенным к неискаженной конфигурации [1]. В соответствии с данными [1], если используется отсчетная конфигурация, не являющаяся неискаженной, то уравнение состояния рассматриваемого здесь материала не может иметь вид (4) и в общем случае не отличается заметной простотой.

С учетом данных [12, 18] для простого изотропного упругопластического материала в качестве неискаженной отсчетной конфигурации можно принять конфигурацию κ_0.

Далее рассмотрим соотношения (4), (5), анализ которых дан, в частности, в [1, 18, 19].

Согласно данным [1], определяющее соотношение (4) в общем случае может быть представлено так:

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \mathbf{B} + \varphi_3 \mathbf{B}^2, \tag{6}$$

где φ_i $(i = 1, 2, 3)$ зависят от инвариантов

$$tr\,\mathbf{B},\ tr\,\mathbf{B}^2,\ tr\,\mathbf{B}^3. \tag{7}$$

Как следует из [18], для осесимметричного тензора $\mathbf{B}$ уравнение (6) может быть приведено к виду

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \mathbf{B}, \tag{8}$$

где φ_i $(i = 1, 2)$ зависят от

$$tr\,\mathbf{B},\ tr\,\mathbf{B}^2. \tag{9}$$

В рамках теории бесконечно малых деформаций в соответствии с данными [18] при

$$\mathbf{C} \cong \mathbf{B} \cong \mathbf{1} + \mathbf{2}\varepsilon \tag{10}$$

уравнение (6) можно записать следующим образом:

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \varepsilon + \varphi_3 \varepsilon^2, \tag{11}$$

где ε – тензор бесконечно малых деформаций, а коэффициенты φ_i $(i = 1, 2, 3)$ определяются такими инвариантами:

$$\varepsilon_0 = tr\,\varepsilon,\ \ tr\,\varepsilon^2,\ \ tr\,\varepsilon^3; \tag{12}$$

знак $\cong$ обозначает равенство с точностью до бесконечно малых второго порядка малости.

При этом соотношение (8) можно записать в виде

$$\mathbf{T} = \varphi_1 \mathbf{1} + \varphi_2 \varepsilon, \tag{13}$$

где φ_i $(i = 1, 2)$ зависят от

$$\varepsilon_0,\ \ tr\,\varepsilon^2. \tag{14}$$

В работах [20, 21] приведены другие формы представления (11), (12).

В связи с физической нелинейностью рассматриваемого материала соотношения (11), (13), несмотря на выполнение условия (10), с учетом данных [20] сохранены тензорно нелинейными.

Разделив тензоры напряжений и деформаций в уравнении (11) на девиаторные и шаровые составляющие и приравняв соответствующие составляющие в правой и левой части, запишем

$$\mathbf{s} = \overline{\varphi}_2 \mathbf{e} + \varphi_3 \left(\mathbf{e}^2 - \frac{1}{3}(tr\,\mathbf{e}^2)\mathbf{1} \right) = \overline{\varphi}_2 \mathbf{e} + \varphi_3 \left(\mathbf{e}^2 - \frac{2}{3} I_{2_e} \mathbf{1} \right); \tag{15}$$

$$T_0 = tr\,\mathbf{T} = 3\varphi_1 + \varphi_2 \varepsilon_0 + \varphi_3\, tr\,\varepsilon^2 = 3\varphi_1 + \varphi_2 \varepsilon_0 + \varphi_3 \left(tr\,\mathbf{e}^2 + \frac{1}{3}\varepsilon_0^2 \right), \tag{16}$$

где

$$\overline{\varphi}_2 = \varphi_2 + \frac{2}{3}\varphi_3 \varepsilon_0; \tag{17}$$

$\mathbf{s} = \mathbf{T} - \frac{1}{3} T_0 \mathbf{1}$ – девиатор напряжений; I_{2_e} – второй инвариант девиатора деформаций; φ_2 и φ_3 определяются инвариантами (12); тензор $\frac{1}{3} T_0 \mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора напряжений, скаляр $\frac{1}{3} T_0$ – среднее напряжение.

Уравнения (15), (16) с коэффициентами, зависящими от инвариантов (12), являются формальными приближениями теории пластичности для бесконечно малых деформаций. Далее эти уравнения будут специализированы посредством наложения формализующих известные опытные данные ограничений на материал.

Как следует из уравнений (15), (16), девиатор и шаровой тензор напряжений зависят как от девиаторных, так и от шаровых составляющих тензора бесконечно малых деформаций.

Предположение 1. Примем, что девиатор напряжений не зависит от средних деформаций, а среднее напряжение – от девиатора деформаций.

Как отмечалось в [5], для малых средних деформаций материалов с упругопластическим поведением такое предположение экспериментально подтверждено в широком диапазоне изменения средних напряжений.

Тогда физическое уравнение (15) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{s} = \bar{\varphi}_2 \mathbf{e} + \bar{\varphi}_3 \left(\mathbf{e}^2 - \frac{2}{3} I_{2_e} \mathbf{1} \right), \tag{18}$$

где $\bar{\varphi}_2$ и $\bar{\varphi}_3$ определяются такими инвариантами:

$$tr\, \mathbf{e}^2, \quad tr\, \mathbf{e}^3, \tag{19}$$

а уравнение (16) принимает вид

$$T_0 = 3\widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_2 \varepsilon_0 + \frac{\widetilde{\varphi}_3}{3} \varepsilon_0^2, \tag{20}$$

где $\widetilde{\varphi}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ зависят только от ε_0.

С целью дальнейшего упрощения определяющих соотношений примем еще такое предположение.

Предположение 2. Отмеченной в [22] особенностью тензорного пространства, связанной с произведением тензоров при построении определяющих соотношений, можно пренебречь.

Тогда уравнение (11) аналогично, как это сделано при построении зависимостей (18), (20), можно представить так:

$$\mathbf{s} = \breve{\varphi}_2 \mathbf{e}, \tag{21}$$

$$T_0 = 3\varphi_1''' + \varphi_2''' \varepsilon_0, \tag{22}$$

где $\breve{\varphi}_2$ зависит от

$$tr\, \mathbf{e}^2, \tag{23}$$

φ_i''' $(i = 1, 2)$ – от ε_0.

Как следует из (13), (14), в случае независимости девиатора напряжений от ε_0 уравнение (21) с определяемым инвариантом (23) коэффициентом справедливо и тогда, когда напряжения в упругопластическом материале зависят от особенностей тензорного пространства, связанных с произведением тензоров, однако тензор ε имеет одну пару равных главных значений.

Соотношение (21) с коэффициентом, зависящим от инварианта (23), может быть представлено в евклидовом пространстве, в частности в векторном пространстве Ильюшина [22, 23]. Для ряда материалов возможность подобной замены обоснована экспериментально [23–26]. Из приведенной методики построения зависимости (21) можно сделать вывод, что для различных фиксированных предысторий деформирования она в общем случае разная.

Предположение 3. Будем считать справедливой гипотезу Людвика о существовании диаграммы деформирования (интенсивность напряжений – интенсивность деформаций), независящей от типа напряженного состояния – гипотеза "единой кривой".

Для ряда материалов возможность принятия такой гипотезы подтверждается результатами опытов [13, 14, 26, 27]. Данное предположение не упрощает определяющие соотношения, но существенно облегчает конкретизацию уравнений из экспериментов.

Отметим, что для пропорционального деформирования упругопластических материалов, а также для произвольных процессов деформирования упругопластических материалов с независящим от предыстории деформирования поведением принятие предположений 1 и 2 эквивалентно справедливости гипотезы Людвика. Для общего случая упругопластических материалов и отличающихся от пропорциональных процессов деформирования это не так.

При выполнении условия (10), как следует, например, из [28], с точностью до бесконечно малых второго порядка малости полные деформации ε можно представить так:

$$\varepsilon = \varepsilon^{e} + \varepsilon^{p}, \tag{24}$$

где ε^{e} и ε^{p} – тензоры бесконечно малых упругих и пластических деформаций соответственно.

В (24) и далее в выражениях для бесконечно малых деформаций (далее – деформаций) знак "$\cong$" заменен "=", верхние индексы e и p при соответствующем объекте обозначают упругие и пластические составляющие.

Применив в уравнении (24) разложение тензоров на девиаторные и шаровые составляющие и приравняв последние в правой и левой части, получим

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{e} + \mathbf{e}^{p}; \tag{25}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^{e} + \varepsilon_0^{p}, \tag{26}$$

где $\mathbf{e} = \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon_0 \mathbf{1}$ – девиатор тензора деформации; тензор $\frac{1}{3}\varepsilon_0 \mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора деформации, скаляр $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ – среднюю деформацию.

Как отмечалось в [27], в общем случае при деформировании реальных материалов с упругопластическим поведением имеем

$$\varepsilon_0^{e} \neq 0; \tag{27}$$

$$\varepsilon_0^{p} \neq 0. \tag{28}$$

Для несжимаемого упругопластического материала запишем

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^p = \varepsilon_0^e = \varepsilon_0^p = 0. \tag{29}$$

Предположение 4. Примем, что упругопластический материал несжимаем в разгруженном состоянии (пластически несжимаем). Такое предположение экспериментально обосновано для целого ряда материалов [13–15, 27]. Тогда

$$\varepsilon_0^p = 0 \tag{30}$$

и, как следует из соотношения (26),

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e. \tag{31}$$

При этом

$$\varepsilon^p = \mathbf{e}^p. \tag{32}$$

Предположение 5. Упругая составляющая тензора полных деформаций связана с тензором напряжений законом Гука.

Для упругопластических материалов при малых деформациях такое предположение не противоречит результатам экспериментов [13–15, 27]. Проведенный в [1] теоретический анализ определяющих соотношений простого упругого материала показал, что напряжения хорошо аппроксимируются законом Гука при достаточно малых деформациях.

При этом

$$\mathbf{s} = 2\widetilde{G}\mathbf{e}^e; \tag{33}$$

$$T_0 = 3\widetilde{K}\varepsilon_0^e, \tag{34}$$

где $\widetilde{G}$ и $\widetilde{K}$ – зависящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия соответственно.

При записи (33) и (34) полагали, что в процессе деформирования упругопластических материалов сохраняется изотропия упругих свойств с изменением последних при активном деформировании. Зависимость упругих свойств ряда материалов с упругопластическим поведением от пластической деформации обнаружена экспериментально [29, 30]. Систематические исследования такой зависимости в настоящее время отсутствуют [24].

Предположение 6. Зависимостью упругих свойств от пластической деформации можно пренебречь.

Экспериментальные данные не противоречат этому предположению для широкого класса упругопластических материалов [13–15, 27].

Тогда из (33), (34) получим

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^e, \tag{35}$$

$$T_0 = 3K\varepsilon_0^e, \tag{36}$$

где G и K – независящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия.

В случае принятия упругопластического материала несжимаемым в разгруженном состоянии (пластически несжимаемым), когда справедливо соотношение (31), из уравнения (36) следует

$$T_0 = 3K\varepsilon_0^e = 3K\varepsilon_0. \tag{37}$$

С принятием тех же предположений и подхода к построению определяющих соотношений приведенные выше уравнения могут быть получены из (3) для частных фиксированных процессов деформирования (пропорционального и монотонного активного деформирования [18, 20, 31]), а также деформирования по произвольным активным непрерывным кусочно-непрерывно дифференцируемым траекториям изотропных упругопластических материалов с независящим от пути активного деформирования поведением [32].

Ограничения на свойства упругопластического материала, величину деформации и процессы его деформирования, принятые при специализации уравнения (3), строго определяют область применимости полученных зависимостей. Использованные ограничения на свойства континуума не противоречат известным экспериментальным данным. Следовательно, полученные соотношения деформационного типа с учетом физической обоснованности общих определяющих зависимостей теории простых упрочняющихся упругопластических материалов [1] являются физически обоснованными.

Отметим, что уравнения деформационной теории пластичности могут быть построены для пропорциональных процессов нагружения [17, 33], материалов с затухающей памятью формы траектории [34, 35], твердых тел Ривлина–Эриксена сложности 0 [1, 36–38].

При условии справедливости принятых предположений зависимость (21) с определяемым инвариантом (23) коэффициентом, а также соотношения (25), (30)–(32), (35), (37) представляют собой уравнения деформационной теории Генки–Надаи–Ильюшина (теория малых упругопластических деформаций) [13, 14, 16, 23, 39, 40] и описывают поведение простого упругопластического материала, подчиняющегося этим предположениям. В [32] показано, что в случае отсутствия упрочнения уравнения теории малых упругопластических деформаций приводятся к соотношениям деформационной теории Генки [41].

Как следует из приведенных в [13, 14, 26, 27] результатов экспериментов, соотношения теории Генки–Надаи–Ильюшина приближенно выполняются для ряда материалов, в частности для мягких сталей, алюминия, алюминиевого сплава, меди, никеля, латуни при простых и близких к ним процессах нагружения и деформирования. Для отличающихся траекторий и ряда других материалов теория малых упругопластических деформаций может приводить к существенным погрешностям при моделировании. Эти погрешности связаны с неучетом конечности деформаций, анизотропией материала и принятыми выше шестью упрощающими предположениями. Чем больше величина деформаций, анизотропия и отклонение поведения материала с упругопластическим поведением от рассмотренных предположений, тем меньше точность уравнений теории малых упругопластических деформаций.

В приложениях особую важность представляет вопрос о конкретизации определяющих соотношений по данным испытаний того или иного материала. Рациональная механика континуума позволяет строго обосновать необходимое и достаточное число опытов для конкретизации физических уравнений. Предположения, принятые при получении того или иного определяющего соотношения, строго задают и необходимые для его конкретизации опыты.

Покажем это на примере полученных уравнений деформационной теории пластичности. Ограничимся изотропными материалами. Причем рассмотрим только упругопластические материалы с зависящим от формы траектории поведением, простым частным случаем которых являются упругопластические материалы с независящим от формы траектории поведением.

Прежде чем перейти к обоснованию необходимых для конкретизации опытов, отметим, что далее в экспериментах должны использоваться упругопластические материалы, которые проявляют при деформировании изотропию механических свойств. Образец для проведения испытаний может быть произвольно ориентирован по отношению к телу, механические свойства которого изучаются.

Для общего случая деформирования изотропного упругопластического материала справедливо определяющее соотношение (6) с определяемыми инвариантами (7) коэффициентами. Для его конкретизации необходимо экспериментально определить три функции φ_i $(i=1, 2, 3)$ для каждой фиксированной траектории деформирования в требуемом диапазоне изменения левого тензора Коши–Грина. Выполнив это для бесконечного множества траекторий, получим полную конкретизацию соотношения (6). При деформировании по траекториям, для которых левый тензор Коши–Грина имеет одну пару равных главных значений, достаточно для конкретизации уравнения (8) определить две функции φ_i $(i=1, 2)$ от двух инвариантов (9) для всего множества таких траекторий.

В рамках теории бесконечно малых деформаций в общем случае деформирования упругопластического материала для конкретизации определяющего соотношения (11) или эквивалентных ему уравнений (15), (16) необходимо экспериментально определить три функции φ_i $(i=1, 2, 3)$ от инвариантов (12), при наличии у тензора бесконечно малых деформаций одной пары равных главных значений – две функции φ_i $(i=1, 2)$ от инвариантов (14). Для малых деформаций такая конкретизация будет приближенной. Чем меньше величина деформации, тем точнее конкретизация.

Для физического уравнения (18) с определяемыми инвариантами (19) и соотношения (20) с зависящими от ε_0 коэффициентами в рамках теории бесконечно малых деформаций строгим является определение в экспериментах отмеченных в (18), (20) функций раздельно для девиаторных и шаровых составляющих. При этом влиянием шаровых компонент на девиаторные и, наоборот, девиаторных на шаровые можно пренебречь.

В случае справедливости предположения 2 достаточно ограничиться при конкретизации соотношения (21) для девиатора напряжений экспериментами для разных траекторий в векторном пространстве. При конкретизации уравнения (22) определяется зависимость φ_i''' $(i=1,2)$ от ε_0.

Приняв гипотезу единой кривой, достаточно при конкретизации уравнения (21) определить зависимость коэффициента $\breve{\varphi}_2$ от инварианта (23) при самых простых испытаниях, например на растяжение. Конкретизация уравнения (22) осуществляется так же, как и в предыдущем случае.

Для пластически несжимаемых материалов при конкретизации соотношения (22) для определения ε_0 достаточно использовать (31).

При условии справедливости предположения 5 необходимо определить зависящие от пластической деформации модули сдвига (33) и объемного сжатия (34).

В случае независимости упругих свойств материала от пластической деформации законы (35), (36) могут строго быть конкретизированы при любом значении пластической деформации, в том числе и нулевом. При этом для пластически несжимаемых материалов справедливо соотношение (37).

Вопросы конкретизации определяющих соотношений деформационного типа для частного случая процессов пропорционального деформирования обсуждались ранее [20].

Резюме

Для довільних неперервних кусочно-неперервно диференційованих траєкторій деформування, будь-яких деформацій і типів симетрії властивостей матеріалу на основі теорії простих зміцнюваних матеріалів із пружно-пластичною поведінкою математично строго побудовано загальні визначальні співвідношення деформаційної теорії пластичності. Розглянуто дві умови, за яких це можливо. Розроблено підходи до строгої спеціалізації загальних визначальних співвідношень деформаційної теорії пластичності за допомогою накладання обмежень на деформації, процеси деформування та властивості матеріалів. При цьому обмеження на властивості матеріалів формалізують дані, що отримано в експериментах. Побудовано ряд нових та відомих визначальних співвідношень, які розміщено у вигляді ієрархії за рівнем складності реакції на деформування. Визначено область застосування отриманих фізичних рівнянь. Особливу увагу приділено моделюванню кінцевих та нескінченно малих деформацій ізотропних матеріалів.

1. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 1972.
2. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
3. *Noll W.* A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1958. – **2**. – P. 197 – 226.

4. *Noll W.* A new mathematical theory of simple materials // Ibid. – 1972. – **48**. – P. 1 – 50.
5. *Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И.* Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 231 с.
6. *Pipkin A. C. and Rivlin R. S.* Mechanics of rate-independent materials // Z. Ang. Math. Physik. – 1965. – **16**, No. 3. – S. 313 – 326.
7. *Owen D. R.* Thermodynamics of materials with elastic range // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – **31**. – P. 91 – 112.
8. *Owen D. R.* A mechanical theory of materials with elastic range // Ibid. – 1970. – **37**. – P. 85 – 110.
9. *Silhavy M.* On transformation laws for plastic deformation of materials with elastic range // Ibid. – 1977. – **63**. – P. 169 – 182.
10. *Lucchesi M. and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view tovard applications. Pt. 1 // Ibid. – 1988. – **102**. – P. 23 – 43.
11. *Lucchesi M. and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view tovard applications. Pt. 2 // Ibid. – 1990. – **110**. – P. 9 – 42.
12. *Lucchesi M., Owen D. R., and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view tovard applications. Pt. 3 // Ibid. – 1992. – **117**. – P. 53 – 96.
13. *Ольшак В., Мруз З., Пежина П.* Современное состояние теории пластичности. – М.: Мир, 1964. – 243 с.
14. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
15. *Hill R.* The mathematical theory of plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950.
16. *Freudental A. M. and Geiringer H.* The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum. – Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1958.
17. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Пробл. прочности. – 2000. – № 3. – С. 56 – 58.
18. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // Там же. – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
19. *Rivlin R. S. and Ericksen J. L.* Stress–deformation relations for isotropic materials // J. Rat. Mech. Anal. – 1955. – **4**, No. 5. – P. 681 – 702.
20. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу континуумов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Анализ определяющих соотношений и сопоставление их с экспериментами // Пробл. прочности. – 1998. – № 6. – С. 43 – 55.
21. *Новожилов В. В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.

22. *Новожилов В. В.* О формах связи между напряжениями и деформациями в первоначально изотропных неупругих телах (геометрическая сторона вопроса) // Прикл. математика и механика. – 1963. – **27**, вып. 5. – С. 794 – 812.
23. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
24. *Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г.* Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.
25. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопр. теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58 – 82.
26. *Ohashy Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals // Mem. Fac. Eng. – 1982. – **34**, No. 1. – P. 1 – 76.
27. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. – М.: Мир, 1979. – 302 с.
28. *Casey J.* Approximate kinematical relation in plasticity // Int. J. Solids Struct. – 1985. – **21**, No. 7. – P. 671 – 682.
29. *Жуков А. М.* Некоторые особенности поведения металлов при упругопластическом деформировании // Вопр. теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30 – 57.
30. *Шишмарев О. А., Кузьмин Е. Я.* О зависимости упругих постоянных металла от пластической деформации // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 3. – С. 167 – 169.
31. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов монотонного деформирования простых материалов с упругопластическим поведением // Пробл. прочности. – 1999. – № 6. – С. 35 – 41.
32. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов активного деформирования простых по Ноллу упругопластических материалов с независящим от пути поведением // Там же. – 2001. – № 2. – С. 52 – 64.
33. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Сопоставление теории с экспериментами // Там же. – 2000. – № 4. – С. 45 – 53.
34. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Конечные деформации // Там же. – 2004. – № 5. – С. 63 – 76.
35. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Бесконечно малые деформации // Там же. – 2004. – № 6. – С. 87 – 98.
36. *Лепихин П. П.* Структура определяющих соотношений вязкоупруго-вязкопластического состояния материалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 32 с.

37. *Лепихин П. П.* Теоретическое построение определяющих соотношений простых начально изотропных неупругих твердых материалов. Конечные деформации / НАН Украины. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1993. – 37 с.

38. *Лепихин П. П.* Теоретическое построение определяющих соотношений простых начально изотропных неупругих твердых материалов. Бесконечно малые деформации / НАН Украины. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1994. – 32 с.

39. *Ковальчук Б. И.*, *Лебедев А. А.*, *Уманский С. Э.* Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 280 с.

40. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации. – М.; Л.: ОГИЗ; Изд-во техн.-теорет. лит., 1948. – 372 с.

41. *Hencky H.* Zur Theorie plastisher Deformationen und der hierduch im Material hervorgerufenen Nachspannungen // ZAMM. – 1924. – **4**. – S. 323 – 334.

Поступила 17. 01. 2005