ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2005. Том 7 (79), N 1. С. 72 – 79*

УДК 539.59

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ В ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ. АНАЛОГ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРОМЕКИ В СЛУЧАЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. САЛТАНОВ, В. А. ГОРБАНЬ, Н. С. ЕФРЕМОВА

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 25.06.2004

В работе с использованием функции тока ψ выполнено преобразование системы пяти уравнений динамики вращающейся как целое неоднородной жидкости в нестационарном двухпараметрическом случае, служащей для определения пяти величин (ρ, v_1, v_2, v_3, p), к системе четырех уравнений, служащей для определения четырех величин (ρ, ψ, v_3, p). (Здесь использованы стандартные обозначения). Эта система представляется удобной при численном анализе, а также при использовании ассимптотических подходов. В случае невязкой жидкости в стационарном двухпараметричем случае выполнено преобразование Громеки. С использованием модифицированной функции тока изучены волны конечной амплитуды в круговом цилиндрическом слое неоднородной вращающейся жидкости и получено обобщение вихря Хилла.

У роботі із застосуванням функції ψ току виконане перетворення системи п'яти рівнянь динаміки неоднорідної рідини,що обертається як ціле, в нестаціонарному двохпараметричному випадку, до системи чотирьох рівнянь, призначеної для визначення чотирьох величин (ρ, ψ, v_3, p). У випадку нев'язкої рідини в стаціонарному двопараметричному випадку виконано перетворення Громеки. З використанням модифікованої функції току вивчені хвилі скінченої амплітуди в круговому циліндричному шарі рідини, що неоднорідно обертається, і одержане узагальнення вихора Хіла.

The transformation of the five equations of nonhomogeneas viscous fluid with use of the stream functions to a four equations is realized. This equations are comfortable by numerarical analysis and also by use of asymptotic methods. The Gromeka transformation for noviscousfluid is realized in nonstationary twoparametric case. The waves of finite amplitude are studied in circular layer and Hill vortex is constructed.

ВВЕДЕНИЕ

В случае симметрии течения однородной жидкости по одной из координат (будем называть ее третьей, как и соответствующие компоненты векторных уравнений и величин) в монографии [10] получены важные для практического использования уравнения для функции тока и третьей компоненты скорости. Уравнения записаны в ортогональных координатах. В работе [8] симметричная по третьей координате задача динамики однородной проводящей вращающейся жидкости сведена к системе четырех уравнений для функции тока, ее магнитного аналога и третьих компонент скорости и магнитного поля.

В данной работе выполнено преобразование системы уравнений динамики неоднородной диссипативной и недиссипативной жидкости при наличии симметрии по одной из координат. В случае недиссипативной жидкости рассмотрена задача о волнах конечной амплитуды во вращающемся круговом слое и получено обобщение вихря Хилла.

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Обратимся к системе уравнений динамики вращающейся неоднородной вязкой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla E - \vec{v} \times (\mathrm{rot}\vec{v} + 2\omega_* \vec{e}_*) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nu \mathrm{rot}\mathrm{rot}\vec{v}, \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\rho = 0, \quad (3)$$

$$E = \frac{\vec{v}^2}{2} + \Phi(\vec{R}), \quad \Phi(\vec{R}) = G(\vec{R}) - \omega_*^2 (\vec{e}_* \times \vec{R})^2. \quad (4)$$

Здесь ρ – плотность; $\vec{v}$ – скорость; p – давление; $\vec{e}_*$ – единичный вектор вдоль оси вращения жидкости как целого; ω_* – угловая скорость вращения;

© Н. В. Салтанов, В. А. Горбань, Н. С. Ефремова, 2005

$\vec{R}$ – радиус-вектор текущей точки пространства; $G(\vec{R})$ – гравитационный потенциал. Соотношения (1)–(3) есть соответственно уравнения движения, неразрывности и сохранения плотности в жидкой частице. Дальнейшее рассмотрение проведем в произвольной ортогональной системе координат $(x_1,\, x_2,\, x_3)$. Полагая выполненным условие симметрии по координате x_3 $\quad(\partial/\partial x = 0)$, решаем уравнение неразрывности (2):

$$\vec{v} = \nabla\psi \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} + w_3\frac{\vec{e}_3}{h_3}, \quad w_3 \equiv h_3 v_3. \qquad (5)$$

Здесь и далее ψ – функция тока; h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламе ортогональной системы координат; $\vec{e}_3$ – единичный вектор, касательный координатной линии x_3. Применяя к выражению (5) операции ротора и двойного ротора, запишем

$$\mathrm{rot}\vec{v} = -D\psi\frac{\vec{e}_3}{h_3} + \nabla w_3 \times \frac{\vec{e}_3}{h_3},$$

$$\mathrm{rotrot}\vec{v} = -\nabla(D\psi) \times \frac{\vec{e}_3}{h_3} - Dw_3\frac{\vec{e}_3}{h_3},$$

$$D \equiv \frac{h_3}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_1}{h_3 h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \qquad (6)$$

Подставим выражения (5) и (6) в уравнение движения (1) и в получившемся соотношении приравняем нулю сумму множителей при единичном векторе $\vec{e}_3$. В результате запишем

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(\psi, w_3)}{\partial(x_1, x_2)} -$$
$$-\nu D w_3 - 2\omega_*(\vec{e}_* \cdot \nabla\psi) = 0. \qquad (7)$$

К оставшейся части получившегося соотношения применим операцию ротора. В результате будем иметь

$$\frac{\partial D\psi}{\partial t} - \frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial(\psi, h_3^{-2}D\psi)}{\partial(x_1, x_2)} -$$
$$-\nu DD\psi + \frac{2w_3}{h_1 h_2 h_3^2}\frac{\partial(w_3, h_3)}{\partial(x_1, x_2)} +$$
$$+2\omega_*\left[h_3^2 \mathrm{div}\left(\frac{w_3\vec{e}_*}{h_3^2}\right) + \frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial(\psi, h_3^{-1}e_{*3})}{\partial(x_1, x_2)}\right] +$$
$$+\frac{h_3}{h_1 h_2 \rho^2}\frac{(\rho, p)}{\partial(x_1, x_2)} = 0. \qquad (8)$$

Обратимся снова к уравнению движения (1). Умножим левую и правую его части скалярно на вектор скорости $\vec{v}$. В результате запишем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{v}^2}{2} + (\vec{v}\nabla)E = -\frac{1}{\rho}(\vec{v}\nabla)p - \nu\vec{v}\cdot\mathrm{rotrot}\vec{v}. \qquad (9)$$

Подставляя в соотношение (9) выражения (5) и (6), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{v}^2}{2} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(\psi, E)}{\partial(x_1, x_2)} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\psi, p)}{\partial(x_1, x_2)}\right] =$$
$$= \frac{\nu}{h_3^2}(\nabla\psi \cdot \nabla D\psi + w_3 D w_3),$$
$$E \equiv \frac{(\nabla\psi)^2 + w_3^2}{2h_3^2} + \Phi. \qquad (10)$$

Учитывая выражение (5) для скорости в уравнении (3) для плотности, имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial(\psi, \rho)}{\partial(x_1, x_2)} = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, при наличии циклической координаты x_3 $\quad(\partial/\partial x_3 = 0)$ исходная система пяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (1)–(3), служащая для определения пяти величин ρ, v_1, v_2, v_3 и p, преобразована к системе четырех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (7), (8), (10) и (11), служащей для определения четырех величин ρ, ψ, w_3 и p.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ (7), (8), (10) И (11) В НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

Пусть выполнены условия

$$\vec{e}_* = \vec{e}_z, \quad x_3 = z, \quad h_3 = 1, \qquad (12)$$

где z – прямолинейная координата; $\vec{e}_z$ – единичный вектор вдоль нее. Тогда система уравнений (7), (8), (10) и (11) несколько упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial(\psi, w_3)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu\Delta w_3 = 0,$$

$$\Delta \equiv \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \qquad (13)$$

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} - \frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial(\psi, \Delta\psi)}{\partial(x_1, x_2)} - \nu\Delta\Delta\psi +$$
$$+\frac{1}{h_1 h_2 \rho^2}\frac{\partial(\rho, p)}{\partial(x_1, x_2)} = 0; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{v}^2}{2} - \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(\psi, E)}{\partial(x_1, x_2)} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\psi, p)}{\partial(x_1, x_2)}\right] =$$
$$= \nu(\nabla\psi \cdot \nabla\Delta\psi + w_3\Delta w_3),$$
$$E \equiv \frac{1}{2}\left[(\nabla\psi) + w_3^2\right] + G(\vec{R}) - \omega_*^2(\vec{e}_z \times \vec{R})^2; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(\psi,\rho)}{\partial(x_1,x_2)}=0. \qquad (16)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа. Таким образом, частота вращения ω_* в рассматриваемом случае входит только в уравнение (15).

Пусть наряду с условиями (12) выполнено следующее условие:

$$w_3=0\ . \qquad (17)$$

Тогда уравнение (13) удовлетворяется тождественно, а уравнение (15) несколько упрощается

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec v^2}{2}-\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(\psi,E)}{\partial(x_1,x_2)}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\psi,p)}{\partial(x_1,x_2)}\right]=$$

$$=\nu\nabla\psi\cdot\nabla\Delta\psi,$$

$$E\equiv\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2+G(\vec R)-\omega_*^2(\vec e_z\times\vec R)^2. \qquad (18)$$

Таким образом, при выполнении условий (12) и (17) задача сводится к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (14), (16) и (18), служащей для определения трех велечин ρ, ψ и p.

Пусть наряду с условием (17) имеет место также следующее условие:

$$\omega_*=0. \qquad (19)$$

Тогда уравнение (7) удовлетворяется тождественно, а уравнения (8) и (10) упрощаются:

$$\frac{\partial D\psi}{\partial t}-\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial(\psi,h_3^{-2}D\psi)}{\partial(x_1,x_2)}-$$

$$-\nu DD\psi+\frac{h_3}{h_1h_2\rho^2}\frac{\partial(\rho,p)}{\partial(x_1,x_2)}=0, \qquad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec v^2}{2}-\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(\psi,E)}{\partial(x_1,x_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\psi,p)}{\partial(x_1,x_2)}\right]=\frac{\nu}{h_3^2}\nabla\psi\cdot\nabla D\psi,$$

$$E\equiv\frac{(\nabla\psi)^2}{2h_3^2}+\Phi\ . \qquad (21)$$

Таким образом, в случае (17) и (19) задача сводится к системе трех нелинейных дифференциальных уравнений (11), (20) и (21), служащей для определения трех величин ρ, ψ и p.

Для декартовых и цилиндрических координат при наличии сдвиговой симметрии справедливы второе и третье соотношения (12). Положим в этом случае

$$\vec e_*\cdot\vec e_z=0.$$

В результате имеем уравнения (15) и (16), а также следующие уравнения

$$v_1=\frac{\partial\psi}{h_2\partial x_2},\quad v_2=-\frac{\partial\psi}{h_1\partial x_1},\quad v_z=w_3,$$

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(\psi,\Delta\psi)}{\partial(x_1,x_2)}+2\omega_*(\vec e_*\nabla)w_3+$$

$$+\frac{1}{h_1h_2\rho^2}\frac{\partial(\rho,p)}{\partial(x_1,x_2)}-\nu\Delta\Delta\psi=0,$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial(\psi,w_3)}{\partial(x_1,x_2)}-$$

$$-2\omega_*(\vec e_*\cdot\nabla)\psi-\nu\Delta w_3=0. \qquad (22)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, определяемый выражением (13).

Рассмотрим круговую цилиндрическую систему координат:

$$x_1=z,\quad x_2=r,\quad x_3=\varphi,$$

$$h_1=1,\quad h_2=1,\quad h_3=r$$

и примем справедливым первое соотношение (12). В результате имеем следующие уравнения:

$$v_z=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad v_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad rv_\varphi=w_3,$$

$$D=\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial D\psi}{\partial t}-r\frac{\partial(\psi,r^{-2}D\psi)}{\partial(z,r)}+$$

$$+2\left(\omega_*+\frac{w_3}{r^2}\right)\frac{\partial w_3}{\partial z}+\frac{r}{\rho^2}\frac{\partial(\rho,p)}{\partial(z,r)}-$$

$$-\nu DD\psi=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec v^2}{2}-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\psi,E)}{\partial(z,r)}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\psi,p)}{\partial(z,r)}\right]=$$

$$=\frac{\nu}{r^2}(\nabla\psi\cdot\nabla D\psi+w_3Dw_3),$$

$$E\equiv\frac{(\nabla\psi)^2+w_3^2}{2r^2}+\Phi,\quad \nabla=\vec e_z\frac{\partial}{\partial z}+\vec e_r\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial(\psi,w_3)}{\partial(z,r)}-2\omega_*\frac{\partial\psi}{\partial z}-\nu Dw_3=0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial(\psi,\rho)}{\partial(z,r)}=0. \qquad (23)$$

Здесь $\vec e_r$ – единичный вектор вдоль радиуса.

Рассмотрим сферическую систему координат

$$x_1=R,\quad x_2=\Theta,\quad x_3=\varphi,$$

$$h_1=1,\quad h_2=R,\quad h_3=R\sin\Theta.$$

И примем также справедливым первое соотношение (12):

$$\vec{e}_* = \vec{e}_z = \cos\Theta \vec{e}_R - \sin\Theta \vec{e}_\Theta,$$

где $\vec{e}_R$ и $\vec{e}_\Theta$ – суть единичные векторы в радиальном и меридианальном направлениях. В результате имеем следующие уравнения:

$$v_R = \frac{1}{R^2 \sin\Theta}\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}, \quad v_\Theta = -\frac{1}{R\sin\Theta}\frac{\partial\psi}{\partial R},$$

$$v_\varphi = \frac{w_3}{R\sin\Theta},$$

$$D = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\Theta}{R^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta})\right),$$

$$\frac{\partial D\psi}{\partial t} - \sin\Theta\frac{\partial(\psi, R^{-2}\sin^{-2}\Theta D\psi)}{\partial(R,\Theta)} +$$

$$+2\left(\omega_* + \frac{w_3}{R^2\sin^2\Theta}\right)\left(\frac{\partial w_3}{\partial R}\cos\Theta - \frac{\partial w_3}{R\partial\Theta}\sin\Theta\right) +$$

$$+\frac{\sin\Theta}{\rho^2}\frac{\partial(\rho,p)}{\partial(R,\Theta)} - \nu DD\psi = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{R^2\sin\Theta}\left[\frac{\partial(\psi,E)}{\partial(R,\Theta)} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\psi,p)}{\partial(R,\Theta)}\right] =$$

$$= \frac{\nu}{R^2\sin\Theta}\big(\nabla\psi\cdot\nabla D\psi + w_3 D w_3\big),$$

$$E \equiv \frac{(\nabla\psi)^2 + w_3^2}{2R^2\sin^2\Theta} + \Phi, \quad \nabla = \vec{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \vec{e}_\Theta\frac{\partial}{R\partial\Theta},$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial t} - \frac{1}{R^2\sin\Theta}\frac{\partial(\psi,w_3)}{\partial(R,\Theta)} -$$

$$-2\omega_*\left(\frac{\partial\psi}{\partial R}\cos\Theta - \frac{\partial\psi}{R\partial\Theta}\sin\Theta\right) - \nu D w_3 = 0,$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{1}{R^2\sin\Theta}\frac{\partial(\psi,\rho)}{\partial(R,\Theta)} = 0. \qquad (24)$$

Соотношения (24) представляют собой систему четырех нелинейных уравнений в частных производных четвертого порядка, служащей для определения четырех величин ψ, w_3, p и ρ.

3. АНАЛОГ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРОМЕКИ В СЛУЧАЕ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В стационарном ($\partial/\partial t = 0$) для невязкой ($\nu = 0$) жидкости уравнение движения (1) и уравнение (11) запишем в виде:

$$\nabla\Pi = \vec{v}\times\mathrm{rot}(\vec{v} - \vec{W}) - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho,$$

$$\Pi \equiv \frac{\vec{v}^2}{2} + \Phi(\vec{R}) + \frac{p}{\rho}, \quad \vec{W} \equiv -\omega_*\vec{e}_*\times\vec{R}, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial(\psi,\rho)}{\partial(x_1,x_2)} = 0. \qquad (26)$$

Подставляя представление (5) в третью компоненту уравнения движения (25), имеем

$$\frac{\big[\partial(\psi, h_3(v_3 - W_3)\big]}{\partial(x_1,x_2)} = 0. \qquad (27)$$

Общее решение уравнений (26) и (27) таково:

$$\rho = \rho(\psi), \quad h_3(v_3 - W_3) = q(\psi). \qquad (28)$$

Здесь $\rho(\psi)$ и $q(\psi)$ – произвольные функции своего аргумента. Подставляя представление (5) в первые две компоненты уравнения движения (25), с учетом выражения (28) для плотности получим

$$\nabla\Pi = \left[\frac{1}{h_3^2}D\psi - \frac{\rho'(\psi)p}{\rho^2} + \frac{\mathrm{rot}_3\vec{W}}{h_3}\right]\nabla\psi. \qquad (29)$$

Штрих всюду означает дифференцирование по своему аргументу. Умножая векторно левую и правую части соотношения (29) на ∇, приходим к уравнению

$$\frac{\partial(\psi,\Pi)}{\partial(x_1,x_2)} = 0. \qquad (30)$$

Общее решение уравнения (30) имеет вид

$$\Pi = \Pi(\psi), \qquad (31)$$

где $\Pi(\psi)$ – произвольная функция своего аргумента. Учитывая выражение (31) в соотношении (29), при $|\nabla\psi| \neq 0$ получаем

$$D\psi - h_3^2\rho'(\psi)\frac{p}{\rho^2} + h_3\mathrm{rot}_3\vec{W} - h_3^2\Pi'(\psi) = 0. \qquad (32)$$

Подставляя в (31) выражение (25) для Π и находя из получившегося соотношения давление p, с учетом представления (5) и второго соотношения (28) будем иметь:

$$\frac{p}{\rho} = \Pi(\psi) - \Phi - \frac{(\nabla\psi)^2}{2h_3^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{q}{h_3} + W_3\right)^2. \qquad (33)$$

Подставим выражение для давления (33) в уравнение (32). В результате получим

$$D\psi + \frac{\rho'(\psi)}{2\rho}(\nabla\psi)^2 + h_3\mathrm{rot}_3\vec{W} +$$

$$+\frac{1}{2\rho}\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\rho(q + h_3W_3)^2\right] +$$

$$+h_3^2\left[\Phi\frac{\rho'(\psi)}{\rho}-\frac{1}{\rho}\big(\rho(\psi)\Pi(\psi)\big)'\right]=0. \qquad (34)$$

Таким образом, получаем, что задача сведена к одному нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (34), служащему для определения функции тока ψ. Это уравнение содержит заданные функции координат $G(x)$ и $\vec{W}(x)$ и произвольно заданные функции тока $\rho(\psi), \Pi(\psi)$ и $q(\psi)$. Произвол в выборе зависимостей $\rho(\psi), \Pi(\psi)$ и $q(\psi)$ может быть использован для аппроксимации реальных параметров среды.

4. МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ ТОКА

Модифицированную функцию тока введем следующим образом [7, 9, 11]:

$$F=\int\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\,d\psi\ . \qquad (35)$$

Выражая обычную функцию тока через модифицированную, согласно соотношению (35) будем иметь

$$\psi=\int\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\,dF\ . \qquad (36)$$

Здесь ρ_0 – характерное значение плотности. Учитывая выражение (36) в первом слагаемом уравнения (34), находим

$$D\psi=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}DF-\frac{\rho'(\psi)}{2\rho}(\nabla\psi)^2\ . \qquad (37)$$

Учитывая выражение (37) в уравнении (34), запишем

$$DF+\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}\,h_3\mathrm{rot}_3\vec{W}+$$
$$+\frac{1}{2\rho_0}\,\frac{\partial}{\partial F}\left[\rho\big(q+h_3W_3\big)^2\right]+$$
$$+\frac{h_3^2}{\rho_0}\left[\Phi\,\frac{d\rho}{dF}-\frac{d(\rho\Pi)}{dF}\right]=0. \qquad (38)$$

Таким образом, получаем, что задача сведена к одному квазилинейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка (38), служащему для определения функции тока F. Это уравнение содержит заданные функции координат $G(x)$ и $\vec{W}(x)$ и произвольно заданные функции тока $\rho(F), \Pi(F)$ и $q(F)$. Произвол в выборе зависимостей $\rho(F), \Pi(F)$ и $q(F)$ может быть использован для аппроксимации реальных параметров среды. При определенном задании этих зависимостей уравнение (38) оказывается линейным.

Далее для простоты рассмотрим случай отсутствия вращения системы отсчета ($\vec{W}=0$). Тогда уравнение (38) упрощается и принимает вид:

$$DF+\frac{1}{2\rho_0}\,\frac{d(\rho q^2)}{dF}+$$
$$+\frac{h_3^2}{\rho_0}\left[\Phi\,\frac{d\rho}{dF}-\frac{d(\rho\Pi)}{dF}\right]=0\ . \qquad (39)$$

Пусть выполнены одни из условий

$$\Phi=0,\quad h_3=1; \qquad (40)$$

$$\Phi=0,\quad \nabla h_3\neq 0; \qquad (41)$$

$$\nabla\Phi\neq 0,\quad h_3=1; \qquad (42)$$

$$\nabla\Phi\neq 0,\quad \nabla h_3\neq 0. \qquad (43)$$

Пусть, далее, квадратичными полиномами модифицированной функции тока F являются:

$$\rho\,(\Pi-\frac{1}{2}q^2)\ -\text{в случае}(40);$$

$$\rho\Pi \text{ и } \rho q^2 - \text{в случае}(41);$$

$$\rho \text{ и } \rho(\Pi-\frac{1}{2}q^2)-\text{в случае}(42);$$

$$\rho,\ \rho\Pi \text{ и } \rho q^2-\text{в случае}(43).$$

Тогда уравнение (38) становится линейным неоднородным. Если в выражениях для указанных величин отсутствуют слагаемые, линейные по F, то уравнение (39) становится линейным однородным. Отметим, что аналогичным образом можно указать специализации величин $\rho(F), \Pi(F)$, $q(F)$, $G(x)$ и $\vec{W}(x)$, когда становится линейным и уравнение (38). Отметим, что линейность уравнения для F предоставляет существенные преимущества при решении краевых задач.

5. ВНУТРЕННИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ

Обратимся к уравнению (39) в круговой цилиндрической системе координат (z, r, φ; $\partial/\partial\varphi=0$) при выполнении условий (41)

$$DF+\frac{1}{2\rho_0}\,\frac{d(\rho q^2)}{dF}-\frac{r^2}{\rho_0}\frac{d(\rho\Pi)}{dF}=0,$$

$$D=r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (44)$$

Положим

$$\rho q^2 = \rho_0 q_0^2 + \rho_0 a_0 F^2, \ a_0 > 0;$$

$$\rho \Pi = \rho \Pi_0 + \rho_0 b_1 F. \qquad (45)$$

Здесь величины q_0, a_0 и b_1– постоянные. Учитывая выражения (45) в уравнении (44), получаем

$$(D + a_0)F = b_1 r^2. \qquad (46)$$

Пусть выполнено неравенство

$$\left| \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} - 1 \right| << 1. \qquad (47)$$

Тогда в силу связи (36) и выражения (45) для q^2 приближенно имеем

$$\vec{v} = \nabla F \times \frac{\vec{e}_\varphi}{r} + v_\varphi \vec{e}_\varphi, \qquad (48)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{q_0^2 + a_0 F^2}. \qquad (49)$$

Рассмотрим следующее частное решение уравнения (46):

$$F = \frac{b_1}{a_0} r^2 + r\big[C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)\big] \cos k_z z,$$

$$\kappa^2 = a_0 - k_z^2. \qquad (50)$$

Здесь J_1 и N_1– функции Бесселя и Неймана первого порядка; C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Подставляя выражение (50) в z- и r-компоненты соотношения (48), получаем

$$v_z = \frac{2b_1}{a_0} + \kappa\big[C_1 J_0(\kappa r) + C_2 N_0(\kappa r)\big] \cos k_z z,$$

$$v_r = k_z \big[C_1 J_1(\kappa r) + C_2 N_1(\kappa r)\big] \sin k_z z. \qquad (51)$$

Учтем выражение (51) для v_r в условиях непроницаемости жидкости на границах цилиндрического слоя

$$r = r_1, \ r_2; \quad v_r = 0 \ . \qquad (52)$$

В результате получим следующую систему однородных уравнений:

$$J_1(\kappa r_1) C_1 + N_1(\kappa r_1) C_2 = 0,$$

$$J_1(\kappa r_2) C_1 + N_1(\kappa r_2) C_2 = 0. \qquad (53)$$

Условие разрешимости системы уравнений (53) имеет вид

$$J_1(\kappa r_1) N_1(\epsilon \kappa r_1) - N_1(\kappa r_1) J_1(\epsilon \kappa r_1) = 0,$$

$$\epsilon \equiv \frac{r_2}{r_1}. \qquad (54)$$

Из уравнения (54) можно определить зависимость

$$\kappa r_1 = \alpha(\epsilon). \qquad (55)$$

Соотношения (49)–(51) описывают распространение волны конечной амплитуды вдоль оси z жидкого кругового цилиндрического слоя с неоднородным по его радиусу вращением. Рассмотрение проводится в системе отсчета, связанной с волной. Придадим выражению (55) вид, аналогичный виду дисперсионного соотношения для известных внутренних гравитационных и гироскопических волн [1, 7, 9,]. Из выражения (51) для v_z имеем

$$\frac{2b_1}{a_0} = -V_\Phi, \qquad (56)$$

где V_Φ – фазовая скорость волны. Пусть заданы угловые скорости вращения жидкости при $r = r_1$ и $r = r_2$:

$$\frac{v_\varphi}{r}\Big|_{r_1, r_2} = \omega_{*1}, \ \omega_{*2}. \qquad (57)$$

Подставляя (49) и (50) в условия (57), с учетом соотношений (53) имеем

$$q_0^2 + r_1^4 \, \frac{b_1^2}{a_0} = \omega_{*1}^2 r_1^4,$$

$$q_0^2 + r_2^4 \, \frac{b_1^2}{a_0} = \omega_{*2}^2 r_2^4. \qquad (58)$$

Вычитая из левой и правой частей второго соотношения (58) соответственно левую и правую части первого соотношения (58), получаем

$$(r_2^4 - r_1^4) \, \frac{b_1^2}{a_0} = \omega_{*2}^2 r_2^4 - \omega_{*1}^2 r_1^4. \qquad (59)$$

Исключим величину b_1 из соотношения (59) с помощью выражения (56) и из получившегося соотношения определим величину a_0. В результате получим

$$a_0 = \frac{4\Omega_*^2}{V_\Phi^2}, \quad b_1 = -\frac{2\Omega_*^2}{V_\Phi},$$

$$\Omega_* \equiv \sqrt{\frac{\omega_{*2}^2 r_2^4 - \omega_{*1}^2 r_1^4}{r_2^4 - r_2^4}}. \qquad (60)$$

Учитывая выражения (60) в одном из соотношений (58), запишем

$$q_0^2 = \frac{\omega_{*1}^2 - \omega_{*2}^2}{r_2^4 - r_1^4} \, r_1^4 r_2^4. \qquad (61)$$

Из условий положительности правых частей соотношений (59) и (61) следуют неравенства

$$\frac{r_2^4}{r_1^4} > \frac{\omega_{*1}^2}{\omega_{*2}^2} > 1. \qquad (62)$$

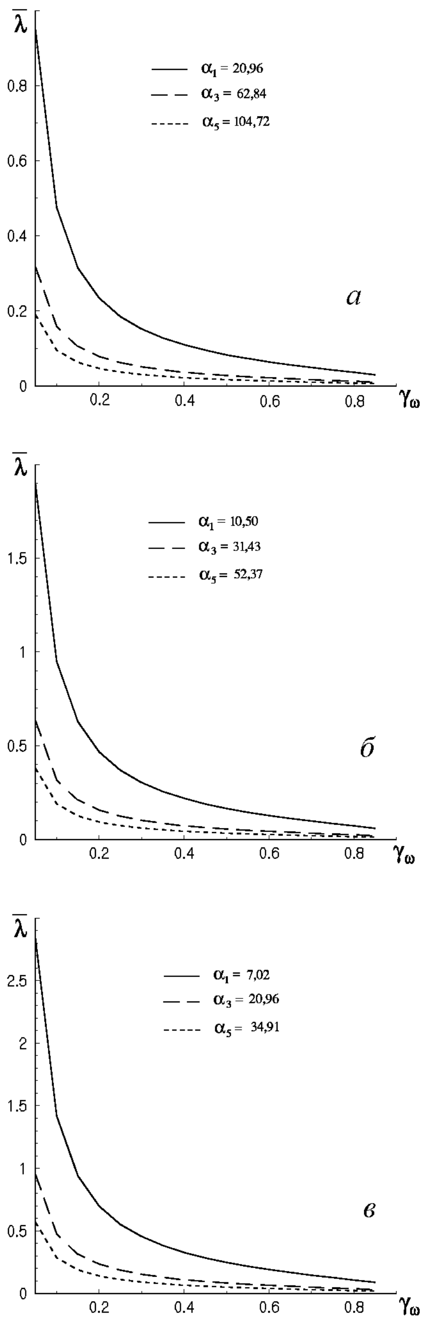

Рис. 1. Зависимость длины волны от частоты
а – $\epsilon = 1,15$, б – $\epsilon = 1,30$, в – $\epsilon = 1,45$

Обратимся к соотношению (55). С учетом выражений (50) и (60) придадим ему форму

$$\gamma_\omega = \frac{\bar{k}_z}{\sqrt{\alpha^2(\epsilon) + \bar{k}_z^2}}, \quad \gamma_\omega \equiv \frac{\omega}{2\Omega_*}, \quad \bar{k}_z = k_z r_1. \quad (63)$$

Решая уравнение (63) относительно волнового числа и выражая в получившемся соотношении волновое число через длину волны λ, находим

$$\bar{\lambda} = \frac{\sqrt{1-\gamma_\omega^2}}{\alpha(\epsilon)\gamma_\omega}, \quad \lambda \equiv \frac{\lambda}{2\pi r_1}\ . \quad (64)$$

Сравнивая зависимости (63) и (64) с соответствующими зависимостями для известных внутренних гравитационных и гироскопических волн [1, 7, 9], убеждаемся в их полной аналогии. Анализ, проведенный на основе соотношений (55) и (64), показал, что величина λ является убывающей функцией параметров γ_ω и n, где n– номер гармоники, и нарастающей функцией параметра ϵ. Примеры дисперсионных зависимостей (64) представлены на рис. 1.

Как можно видеть из выражений (45) и уравнения (46), существование рассмотренных в данном параграфе волн обусловлено определенной стратификацией по модифицированной функции тока азимутального импульса единицы массы жидкости и энергетической функции.

6. ОБОБЩЕНИЕ ВИХРЯ ХИЛЛА

В классической гидродинамике вихрь Хилла является одним из широко известных примеров вихрепотенциальных течений [2–5, 6], имеющем эффективное аналитическое решение. В данном параграфе на основе модифицированной функции тока дано обобщение вихря Хилла на случай неоднородной по плотности жидкости.

Рассмотрение проведем в сферических координатах (R, Θ, φ). Как и в случае обычного вихря Хилла, область течения разбиваем на подобласти $0 \le R \le R_2$ и $R_2 \le R \le \infty$. Предполагаем выполнеными условия:

$$\Phi = 0, \quad q = 0, \quad 0 \le R \le \infty,$$

$$\frac{\rho\Pi}{\rho_0} = \Pi_0 - 10 b_0 F, \quad 0 \le R \le R_2,$$

$$\Pi = \Pi_{01}, \quad \rho = \rho_0, \quad R_2 \le R \le \infty. \quad (65)$$

Здесь b_0, Π_0 и Π_{01}– постоянные. Тогда уравнение (39) принимает, соответственно, вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\Theta}{R^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\right) F = -10 b_0 R^2 \sin^2\Theta,$$

$$0 \le R \le R_2, \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin\Theta}{R^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\frac{1}{\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\right) F = 0,$$

$$R_2 \le R \le \infty. \tag{67}$$

Рассмотрим следующие частные решения уравнений (66) и (67) соответственно:

$$F = \left(C_1 R^2 + \frac{C_2}{R} - b_0 R^4 \right) \sin^2 \Theta, \tag{68}$$

$$F = \left(D_1 R^2 + \frac{D_2}{R} \right) \sin^2 \Theta. \tag{69}$$

Здесь C_1, C_2, D_1, и D_2 – произвольные постоянные. С помощью решений (68) и (69) удовлетворяем следующим условиям при $R = 0$, предельным и краевым условиям:

$$R = 0, \quad \{\vec{v}, p\} < \infty,$$

$$\Theta = 0, \quad R \to \infty, \quad v_R \to U_\infty,$$

$$\Theta = \pi, \quad R \to \infty, \quad v_R \to -U_\infty,$$

$$R \to \infty, \quad p = p^0_\infty,$$

$$R = R_2, \quad v_R = 0, \quad [\rho,\, v_\Theta,\, p] = 0. \tag{70}$$

Здесь квадратные скобки означают скачок заключенной в них величины на поверхности $R = R_2$ ($F = 0$). В результате получим такие выражения для физических величин в указанных выше подобластях:

$\underline{0 \le R \le R_2}$,

$$F = -\frac{3U_\infty}{4R_2^2} R^2 (R_2^2 - R^2) \sin^2 \Theta, \tag{71}$$

$$v_R = -\frac{3U_\infty}{2R_2^2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} (R_2^2 - R^2) \cos \Theta, \tag{72}$$

$$v_\Theta = \frac{3U_\infty}{2R_2^2} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} (R_2^2 - 2R^2) \sin \Theta, \tag{73}$$

$$p = p^0_\infty + \frac{\rho_0}{2} U^2_\infty + \frac{15 \rho_0 U_\infty}{2R_2^2} F - \frac{\rho}{2} \vec{v}^2 \tag{74}$$

$\underline{R_2 \le R \le \infty}$,

$$F = \frac{U_\infty}{2} \left(R^2 - \frac{R_2^3}{R} \right) \sin^2 \Theta, \tag{75}$$

$$v_R = U_\infty \left(1 - \frac{R_2^3}{R^3} \right) \cos \Theta, \tag{76}$$

$$v_\Theta = -U_\infty \left(1 - \frac{R_2^3}{2R^3} \right) \sin \Theta, \tag{77}$$

$$p = p^0_\infty + \frac{\rho_0}{2} U^2_\infty - \frac{\rho_0}{2} (v_r^2 + v_\Theta^2). \tag{78}$$

В случае однородной жидкости ($\rho = \rho_0 = \mathrm{const}$) решение (71)–(78) переходит в решение, описывающее обычный вихрь Хилла [2, 5].

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Таким образом, с использованием функции тока ψ выполнено преобразование системы пяти уравнений динамики вращающейся как целое неоднородной жидкости в нестационарном двухпараметрическом ($\partial/\partial x_3 = 0$) случае, служащей для определения пяти величин (ρ, v_1, v_2, v_3, p), к системе четырех уравнений, служащей для определения четырех величин (ρ, ψ, v_3, p) (здесь использованы стандартные обозначения). Эта система представляется удобной при численном анализе начально-краевых задач, а также при использовании асимптотических подходов. Отмечено, что при $v_3 = 0$ и $\omega_* = 0$, где ω_* – угловая частота вращения системы координат как целого, задача преобразуется к системе трех уравнений, служащей для определения трех величин (ρ, ψ, p).

В случае невязкой жидкости в стационарном двухпараметрическом случае выполнено преобразование Громеки. Осуществлен переход к модифицированной функции тока. С ее помощью изучены волны конечной амплитуды в круговом цилиндрическом слое неоднородно вращающейся жидкости и получено обобщение вихря Хилла.

1. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред.– М: Наука, 1982.– 366 с.
2. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости.– М: Мир, 1973.– 600 с.
3. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки.– Новосибирск: Наук. Со, 1981.– 368 с.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблема гидродинамики и их математические модели.– М: Наука, 1973.– 416 с.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика.– М - Л: Гостехтеориздат, 1947.– 928 с.
6. *Садовский В. С.* Плоские вихрепотенциальные течения невязкой жидкости и их приложения.– Труды ЦАГИ им. проф. Н. Е. Жуковского : 1989, Вып.2447.– 108 с.
7. *Салтанов Н. В.* Аналитическая гидромеханика.– Киев: Наук. думка, 1984.– 200 с.
8. *Салтанов Н. В.* Обобщенные потенциалы в магнитной гидродинамике и динамике вращающейся жидкости // Прикладн. гидромеханика.– 2000.– 2(74), N 4.– С. 82–98.
9. *Салтанов Н. В., Горбань В. А.* Вихревые структуры в жидкости: аналитические и численные решения.– Киев: Наук. думка, 1993.– 244 с.
10. *Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости*/ Под ред. С. Гольдштика.– М.: ИЛ, 1948.– 380 с.
11. *Yih C.- C.* Dyanios of nonhomogeneous fluids.– New Jork:: Macmillan com., 1965.– 306 c.