УДК 539.3

О влиянии ориентации сфероидальных полостей или жестких включений в ортотропной среде на концентрацию напряжений

В. С. Кирилюк

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена задача о концентрации напряжений в ортотропной упругой среде, что содержит произвольно ориентированную сфероидальную полость или включение. Для построения решения задачи используются метод эквивалентного включения, тройное преобразование Фурье по пространственным переменным и Фурье-образ функции Грина для бесконечного анизотропного пространства. При вычислении некоторых двойных интегралов по конечной области используются квадратурные формулы Гаусса. Проведено сравнение результатов исследований в частных случаях с данными других авторов. Исследовано влияние ориентации неоднородности на концентрацию напряжений.

Ключевые слова: сфероидальная полость, метод эквивалентного включения, тройное преобразование Фурье, формулы Гаусса.

Введение. Напряженно-деформированное состояние упругих изотропных материалов со сферическими, сфероидальными (эллипсоиды вращения) и эллипсоидальными полостями и включениями исследовалось в работах [1–11] и др. Распределение напряжений в трансверсально-изотропных средах, содержащих сферические, сфероидальные полости или включения, изучалось в [1, 2, 5, 12] и др. Принципиальное ограничение в задачах для трансверсально-изотропной среды с полостями или включениями состояло в рассмотрении таких ориентаций неоднородностей, при которых ось транстропии материала совпадает с осью вращения полости или включения, другие возможные ориентации концентраторов напряжений не рассматривались. Полученные точные решения задач основаны на известных представлениях общих решений пространственных статических задач для изотропной и трансверсально-изотропной среды. При другой направленности сфероидальной неоднородности необходимо вводить новую систему координат, связанную с включением. И хотя в новой системе координат достаточно просто описать поверхность включения, в направлениях осей координат исходный трансверсально-изотропный материал ведет себя как анизотропный. В этом случае известные общие представления решений для трансверсально-изотропного материала не позволяют получить решения конкретных задач о концентрации напряжений.

Достаточно полный обзор и анализ решений статических задач теории упругости анизотропных тел, в том числе ортотропных, дан в [13]. Однако до настоящего времени неизвестны аналитические решения задач о распределениях напряжений в ортотропных материалах (без специальных ограничений на девять независимых упругих постоянных) вблизи сферических, сфероидальных и эллипсоидальных полостей и включений и в трансверсально-изотропных материалах со сфероидальными и эллипсоидальными включениями при различных направлениях осей вращения включений и осей транстропии сред.

В данном сообщении рассматривается задача о концентрации напряжений в ортотропной среде, содержащей сфероидальное включение, ось вращения которого ориентирована произвольным образом, при растяжении. При решении задачи использовалось тройное преобразование Фурье, что совместно с методом эквивалентного включения Эшелби позволило в процессе решения получить конечную систему линейных алгебраических уравнений, коэффициентами которой являются некоторые двойные интегралы. Подынтегральные функции в двойных интегралах не имеют каких-либо особенностей в области интегрирования, и для вычисления этих интегралов использовались квадратурные формулы Гаусса.

Постановка задачи. Пусть упругая ортотропная среда с главными осями ортотропии Ox, Oy, Oz содержит сфероидальную неоднородность (включение) с полуосями $a_1 = a_2$, a_3. Упругие свойства ортотропного материала характеризуются девятью независимыми постоянными: c_{11}; c_{22}; c_{33}; c_{12}; c_{13}; c_{23}; c_{44}; c_{55}; c_{66}. Компоненты тензора упругих модулей C_{ijkl} связаны с величинами c_{mn} следующими зависимостями:

$$C_{1111} = c_{11}; \quad C_{2222} = c_{22}; \quad C_{3333} = c_{33};$$
$$C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \quad C_{1133} = C_{3311} = c_{13}; \quad C_{2233} = C_{3322} = c_{23};$$
$$C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \quad C_{3131} = C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55};$$
$$C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66},$$

оставшиеся компоненты равны нулю. Предположим также, что среда находится под воздействием однородного поля напряжений. Из-за наличия включения возникает возмущение основного напряженного состояния.

Введем новую (локальную) систему координат x^1, y^1, z^1, связанную с включением, ось Oz^1 которой направлена вдоль оси вращения включения. Полагаем, что в исходном состоянии направления осей систем координат x, y, z и x^1, y^1, z^1 совпадают. Если же включение ориентировано в ортотропной среде иным образом, то такую ориентацию можно описать посредством связи этих систем координат. Например, если новую систему координат x^1, y^1, z^1 можно получить из исходной системы поворотом вправо вокруг оси Ox на угол α, то тензор упругих модулей C^{α}_{ijkl} в этой системе координат получаем с помощью преобразования тензора четвертого порядка:

$$C^{\alpha}_{ijkl} = C_{mnpq}\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}\alpha_{lq},$$

где α_{ij} – матрица преобразования координат,

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Закон Гука для материала в новой системе координат принимает вид

$$\sigma_{ij} = C^{\alpha}_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

где, как и при вычислении компонентов тензора C^{α}_{ijkl}, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Последовательные вращения на углы α, β, γ вокруг осей старой системы координат Ox, Oy, Oz соответственно позволяют получить произвольную ориентацию включения. Тогда тензор упругих модулей $C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl}$, который зависит от трех углов поворота, в новой системе координат получаем с помощью преобразования тензора четвертого порядка и матрицы преобразования более сложного вида:

$$C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl} = C_{mnpq} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}. \qquad (1)$$

Здесь T_{ij} – матрица преобразования,

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$T_{11} = \cos\beta\cos\gamma; \qquad T_{12} = -\cos\beta\sin\gamma; \qquad T_{13} = \sin\beta;$$

$$T_{21} = \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma; \qquad T_{22} = -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma;$$

$$T_{23} = -\sin\alpha\cos\beta; \qquad T_{31} = -\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma;$$

$$T_{32} = \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\gamma; \qquad T_{33} = \cos\alpha\cos\beta.$$

Эта матрица получена в результате последовательного перемножения трех матриц, отражающих правые вращения вокруг каждой из осей координат:

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}; \quad \beta_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}; \quad \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Закон Гука для материала в новой системе координат, связанных с вращением вокруг трех старых осей координат, получим в виде

$$\sigma_{ij} = C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl} \varepsilon_{kl},$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Далее все решения будем строить в новой системе координат, однако во избежание излишней громоздкости в выражениях верхние индексы “1” опускаем. Используем обычную тензорную запись выражений, т.е. подразумеваем, что по повторяющимся индексам проводится суммирование. Заметим, что, ничего не изменяя в схеме решения задачи, вместо преобразования T_{ij}, связанного с вращением вокруг осей координат Ox , Oy, Oz, можно было бы ввести другое преобразование, отвечающее поворотам с углами Эйлера. Однако для наглядности используется преобразование при последовательных вращениях вокруг трех различных осей координат.

Напряженное состояние в среде (матрице) представим суперпозицией основного поля и возмущения, вызванного наличием неоднородности. Для построения возмущенного состояния воспользуемся схемой метода эквивалентного включения и запишем соответствующие уравнения эквивалентности в области включения (неоднородности) в следующем виде:

$$C_{ijkl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)}(\varepsilon_{kl}^{0} + \varepsilon_{kl}) = C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\varepsilon_{kl}^{0} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{*}), \qquad \vec{x} \in \Omega, \tag{2}$$

где $C_{ijkl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)}$, $C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ – тензоры упругих модулей неоднородности и матрицы соответственно в локальной системе координат (далее для полости $C_{ijkl}^{1(\alpha,\beta,\gamma)}$ устремим к нулю); $\varepsilon_{ij}^{*}(\vec{x})$ – тензор “свободных” деформаций, который определяется из условий эквивалентности включения (области среды с теми же упругими свойствами, что и матрица, но со “свободными” деформациями) и неоднородности. Деформации ε_{ij}^{0} получаем по значениям напряжений σ_{ij}^{0} основного поля из закона Гука. Если же известны их значения в исходной системе координат, то в новой системе координат их легко определить по правилу преобразования тензоров второго порядка.

Построение решения задачи. Для решения рассматриваемой задачи необходимо выразить тензор деформаций ε_{ij}, входящий в уравнения (2), через тензор “свободных” деформаций ε_{ij}^{*} из задачи о включении (при отсутствии внешних воздействий и при деформациях ε_{ij}^{*} в области включения). В этом случае будут удовлетворяться уравнения равновесия вне и внутри включения и выполняться условия идеального контакта на границе раздела фаз (следует из свойств задачи о включении [7]). Для анизотропной среды соответствующие поля перемещений, деформаций и напряжений, вызванные “свободными” деформациями $\varepsilon_{ij}^{*}(\vec{x})$, представим согласно [7, 11] в виде следующих интегралов по области включения:

$$\begin{cases} u_i(\vec{x}) = -\int\limits_{\Omega} C_{jlmn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \varepsilon_{mn}^{*}(\vec{x}') G_{ij,l}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}'; \\ \varepsilon_{ij}(\vec{x}) = -\dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} C_{klmn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \varepsilon_{mn}^{*}(\vec{x}') \{G_{ik,lj}(\vec{x} - \vec{x}') + G_{jk,li}(\vec{x} - \vec{x}')\} d\vec{x}'; \\ \sigma_{ij}(\vec{x}) = -C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \left\{ \int\limits_{\Omega} C_{pqmn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \varepsilon_{mn}^{*}(\vec{x}') G_{kp,ql}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{x} - \vec{x}')\, d\vec{x}' \right\}, \end{cases} \tag{3}$$

где $C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}$ – тензор упругих модулей среды, запятая после нижнего индекса означает дифференцирование по соответствующей переменной, по повторяющимся индексам проводится суммирование; $G_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{x}-\vec{x}')$ – функция Грина для бесконечной среды (фундаментальное решение) для матрицы, т.е. она удовлетворяет таким уравнениям равновесия анизотропного тела:

$$C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} G_{km,jl}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{x}-\vec{x}') + \delta_{im}\delta(\vec{x}-\vec{x}') = 0, \tag{4}$$

где $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ – δ-функция Дирака; δ_{im} – символ Кронекера, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Воспользуемся согласно [7, 11] следующим интегральным выражением фундаментального решения для анизотропной среды:

$$G_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)}(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi}(\vec{x}-\vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{5}$$

где $N_{ij}(\vec{\xi})$ – соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы

$$\{K_{ki}(\vec{\xi})\} = \{C_{kjil}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_j \xi_l\} = \{C_{klij}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{C_{ijkl}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{K_{ik}(\vec{\xi})\}, \tag{6}$$

$D(\vec{\xi})$ – ее определитель.

Используемый трехкратный интеграл обозначим $\int_{-\infty}^{\infty} d\vec{\xi}$, где $d\vec{\xi} =$ $= d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$.

С помощью формул (3), (4) поле перемещений можно представить в виде

$$u_i(\vec{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn}^{(\alpha,\beta,\gamma)} \varepsilon_{mn}^{*}(\vec{x}') N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi}(\vec{x}-\vec{x}')} d\vec{\xi} d\vec{x}'.$$

Отметим, что тройной интеграл (5) в соответствии с результатами работы [8] может быть приведен к контурному интегралу в плоскости, нормальной к вектору положения точки $\vec{x}$. Тогда функцию Грина для анизотропной среды можно записать в виде [8]

$$G_{ij}^{(\alpha,\beta,\gamma)} = \frac{1}{8\pi|\vec{x}|} \int_L N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) dL,$$

где L – единичная окружность.

После ряда достаточно громоздких преобразований [8] поле перемещений внутри эллипсоида, вызванное постоянным тензором свободных деформаций, представим в виде [11]

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{jlmn} \varepsilon^*_{nm} x_k \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \widetilde{G}^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl}(\bar{\vec{\xi}}) d\theta d\bar{\eta}_3, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{G}^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl}(\bar{\vec{\xi}}) = \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l N_{ij}(\bar{\vec{\xi}}) / D(\bar{\vec{\xi}}) = \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l (K_{kl}(\bar{\vec{\xi}}))^{-1};$$

$$\bar{\xi}_1 = \frac{\sqrt{1-\bar{\xi}_3^2}}{a_1} \cos\theta; \qquad \bar{\xi}_2 = \frac{\sqrt{1-\bar{\xi}_3^2}}{a_1} \sin\theta; \qquad \bar{\eta}_3 = \bar{\xi}_3 / a_3.$$

Окончательно связь между тензором деформаций ε_{ij} и тензором ε^*_{ij} для задачи о включении (без воздействия основного поля) можно записать в виде

$$\varepsilon_{ij} = S^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijmn} \varepsilon^*_{mn}, \tag{8}$$

где $S^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijmn}$ – тензор Эшелби,

$$S^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijmn} = \frac{1}{8\pi} C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{pqmn} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \{\widetilde{G}^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ipjq}(\bar{\vec{\xi}}) + \widetilde{G}^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{jpiq}(\bar{\vec{\xi}})\} d\theta d\bar{\xi}_3. \tag{9}$$

Для нахождения неизвестных значений тензора свободных деформаций с помощью выражений (8), (9) и уравнений эквивалентности (2) получим систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой зависят от двойных интегралов типа (9), не имеющих каких-либо особенностей в области интегрирования.

Для определения концентрации напряжений в анизотропной среде со сфероидальным включением можно вначале согласно формулам (9) вычислить тензор Эшелби, а затем из уравнений эквивалентности для включения – деформации ε^*_{ij}. Тензор Эшелби вычисляли с помощью метода квадратур Гаусса. После нахождения деформаций ε^*_{ij} в соответствии с формулами (2), (8) определяли напряженное состояние внутри включения. Однако для определения концентрации напряжений необходимо вычислить значения напряжений в точках среды, примыкающих к границе раздела фаз. Поэтому для нахождения распределения напряжений во внешних точках сфероидальной поверхности использовали формулы скачка напряжений при переходе через границу включения [11]:

$$[\sigma_{ij}] = \sigma^{out}_{ij} - \sigma^{in}_{ij} = C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{ijkl} \{-C^{(\alpha,\beta,\gamma)}_{pqmn} \varepsilon^*_{mn} n_q n_l N_{kp}(\vec{n}) / D(\vec{n}) + \varepsilon^*_{kl}\},$$

где n_i – компоненты нормали поверхности; обозначения $N_{ij}(\vec{\xi})$ и $D(\vec{\xi})$ даны в формулах (5).

Анализ результатов числових исследований. При вычислении компонент тензора Эшелби использовали квадратурные формулы Гаусса по 24 и 48 узлам по каждой из переменных. Настоящий подход тестировался на задачах для трансверсально-изотропной среды со сфероидальной полостью, ось вращения которой совпадала с осью транстропии. Для решения задач о концентрации напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем сферическую или сфероидальную полость, при одно- и двухосном растяжении использовали данные работы [1], и расчетные напряжения сравнивали с величинами на соответствующих кривых. Для более тщательного контроля результатов расчетов воспользуемся также таблицей данных [1]. Результаты сравнения полученных значений концентрации напряжений при двухосном растяжении $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 1$; $\sigma_z^0 = 0$ в трансверсально-изотропном теле со сфероидальной полостью с данными [1] приведены в таблице.

Сравнение полученных значений концентрации напряжений с данными [1]

Коэффициенты Пуассона	E/E'	E'/G'	a_3/a_1, равное		
			5	1,667	1
$\nu = \nu' = 0{,}33$	2	3	2,92945 (2,928)	2,67587 (2,676)	2,42388 (2,424)
$\nu = \nu' = 0{,}33$	2	7	2,95436 (2,953)	2,79613 (2,796)	2,61426 (2,614)
$\nu = 0{,}1$; $\nu' = 0{,}33$	2	3	2,19541 (2,195)	2,07023 (2,070)	1,93840 (1,938)
$\nu = 0{,}1$; $\nu' = 0{,}33$	2	7	2,20742 (2,206)	2,12849 (2,128)	2,03518 (2,035)
$\nu = 0{,}33$; $\nu' = 0{,}1$	2	3	2,93793 (2,937)	2,71345 (2,713)	2,47944 (2,479)
$\nu = 0{,}33$; $\nu' = 0{,}1$	2	7	2,95744 (2,956)	2,80923 (2,809)	2,63581 (2,636)

Примечание. В скобках приведена концентрация напряжений, полученная на основании замкнутого решения задачи с использованием аппарата обобщенных аналитических функций [1].

Таким образом, апробация подхода на тестовых задачах, имеющих точные решения, для трансверсально-изотропной среды со сферической и сфероидальной полостями, ось вращения которых совпадала с осью транстропии, показала достаточно высокую эффективность подхода.

Рассмотрим концентрации напряжений в ортотропном материале со сфероидальной сжатой полостью с отношением полуосей $a_3/a_1 = 0{,}3$. В качестве материала среды используем ортотропный материал со следующими упругими характеристиками [14] (табл. 7, ортогонально-армированный стеклопластик 2:1): $E_1^* = 3{,}68$; $E_2^* = 2{,}68$; $E_3^* = 1{,}10$; $G_{12}^* = 0{,}50$; $G_{23}^* = 0{,}41$; $G_{31}^* = 0{,}45$; $\nu_{12} = 0{,}105$; $\nu_{23} = 0{,}431$; $\nu_{31} = 0{,}405$, где $E_i = E_i^* \cdot 0{,}980665$ $(i = 1, 2, 3)$; $G_{ij} = G_{ij}^* \cdot 0{,}980665$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Величины модулей Юнга и сдвига приведены в Н/м^2. Предполагается, что основное поле напряжений в среде соответствует одноосному растяжению вдоль оси вращения полости.

На рис. 1 показано изменение напряжений σ_{zz} вдоль поверхности полости в сечениях xz (от вершины на оси Ox до вершины на оси Oz, рис. 1,*а*,*в*) и yz (от вершины на оси Oy до вершины на оси Oz, рис. 1,*б*,*г*) при значениях углов поворота $\alpha, \beta = 0$, 30, 60, 90°. Остальные значения углов поворота равны нулю.

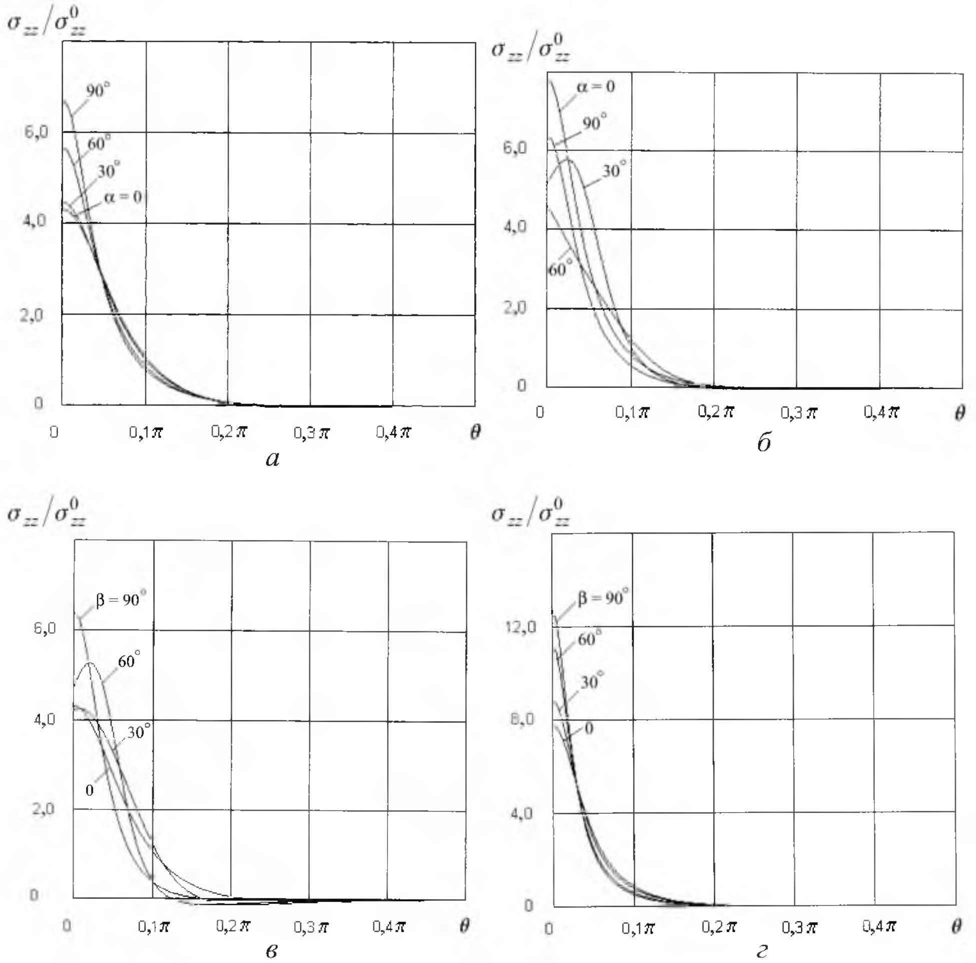

Рис. 1. Распределение напряжений вдоль поверхности полости в сечениях xz (*а*) и yz (*б*) при $\alpha \neq 0$, а также xz (*в*) и yz (*г*) при $\beta \neq 0$.

Отметим, что ориентации малой полуоси полости (оси Oz) вдоль старой оси Oy соответствует значение $\alpha = 90°$, ориентации вдоль оси Oz – $\beta = 90°$. Видно, что при повороте полости вокруг оси Ox соответствующие значения напряжений в сечении xz (рис. 1,*а*) для расчетных параметров увеличиваются и их максимум достигается в вершине на оси Ox. При этом соответствующие значения напряжений увеличились на 56,13% ($\alpha = 0$ и 90°). В сечении yz (рис. 1,*б*) при повороте вокруг оси Ox напряжения вначале уменьшаются, а затем несколько увеличиваются. При этом максимальные значения напряжений в отдельных случаях смещаются из вершины сфероида на оси Ox. Изменение концентрации напряжений в этом сечении в зависимости от угла поворота α также значительное (от 7,792 при $\alpha = 0$ до 4,602 при $\alpha = 60°$). Рис. 1,*в*,*г* иллюстрирует изменение напряжений в сечениях xz и yz вдоль поверхности полости (между теми же вершинами, что и на рис. 1,*а*,*б*) при изменении угла поворота β вокруг оси Oy. В сечении xz напряжения при угле поворота β вначале уменьшаются, а затем повышаются. Наименьшие их значения (4,208) достигнуты при $\beta = 30°$, наибольшие (6,3856) – при $\beta = 90°$. В сечении yz напряжения растут при угле поворота β вокруг оси Oy и их значения изменяются от 7,792 при $\beta = 0$ до 12,806 при $\beta = 90°$. Особенно значительной есть концентрация напряжений при ориентации оси вращения полости вдоль оси Ox ($\beta = 90°$), которая примерно на 64,3% выше, чем при ориентации малой полуоси сфероида вдоль оси Oz ($\beta = 0$).

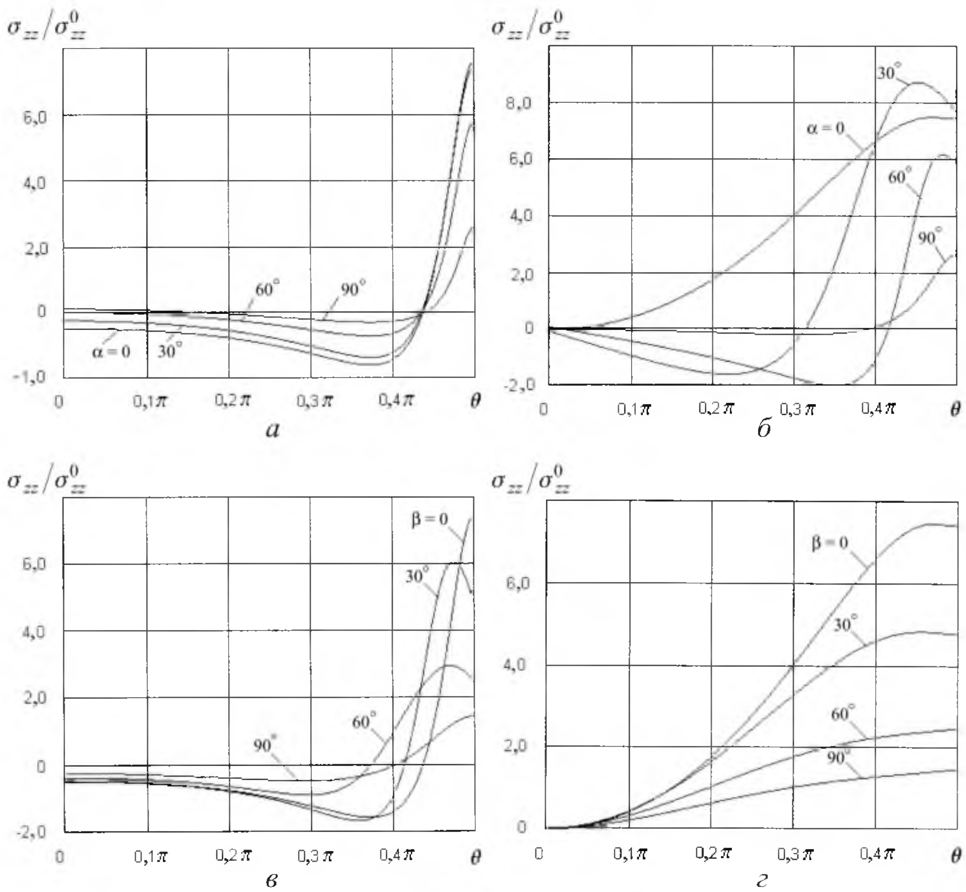

Рис. 2. Распределение напряжений вдоль поверхности жесткого включения в сечениях xz (*а*) и yz (*б*) при $\alpha \neq 0$, а также xz (*в*) и yz (*г*) при $\beta \neq 0$.

Рассмотрим случай растяжения ортотропного пространства с жестким изотропным вытянутым сфероидальным включением, $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = 3$. Как и в предыдущем примере, полагаем, что имеет место одноосное растяжение вдоль оси вращения сфероида σ^0_{zz}. На рис. 2,*а*,*в* показано изменение напряжений σ_{zz} вдоль поверхности включения в сечении xz, на рис. 2,*б*,*г* – в сечении yz. Концентрацию напряжений исследовали между теми же вершинами, что и для полости. Несложно увидеть, что при повороте вокруг оси Ox наибольшие значения напряжений в исследуемых случаях достигнуты при $\alpha = 30°$, наименьшие – при $\alpha = 90°$. Так, в сечении yz напряжения максимальны (8,718) при $\alpha = 30°$, при $\alpha = 90°$ они составляют 2,6319. Отметим, что наибольшие значения напряжений могут сдвигаться из вершины сфероида на оси Oz (рис. 2,*б*,*в*).

Таким образом, ориентация в ортотропном материале полостей и включений сфероидальной формы наряду со свойствами составляющих фаз, геометрией неоднородностей и характером нагрузок оказывает в ряде случаев очень существенное влияние на концентрацию напряжений.

Резюме

Розглянуто задачу концентрації напружень у ортотропному пружному середовищі, що містить довільно орієнтовану сфероїдальну порожнину або включення. Для побудови розв'язку задачі використовуються метод еквівалентного включення, потрійне перетворення Фур'є по просторовим змінним та Фур'є-образ функції Гріна для нескінченного анізотропного простору. При обчисленні деяких подвійних інтегралів по скінченній області використовуються квадратурні формули Гаусса. Проведено порівняння результатів досліджень у спеціальних випадках із даними інших авторів. Досліджено вплив орієнтації неоднорідності на концентрацію напружень.

1. *Александров А. Я., Вольперт В. С.* Некоторые задачи о концентрации напряжений около эллипсоидальной полости в трансверсально-изотропном теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – № 1. – С. 115 – 121.
2. *Александров А. Я., Соловьев Ю. И.* Пространственные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
3. *Головчан В. Т.* К решению троякопериодических задач статики упругого тела со сферическими включениями // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 7. – С. 29 – 39.
4. *Николаев А. Г., Проценко В. С.* Первая и вторая осесимметричные задачи теории упругости для двухсвязных областей, ограниченных поверхностями сферы и сфероида // Прикл. математика и механика. – 1990. – **24**, № 1. – С. 65 – 74.
5. *Подильчук Ю. Н.* Граничные задачи статики упругих тел. – Киев: Наук. думка, 1984. – 303 с.
6. *Улитко А. Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 261 с.
7. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 287 с.

8. *Kinoshita N. and Mura T.* Elastic fields of inclusions in anisotropic media // Phys. Stat. Sol. (a). – 1971. – **5**. – P. 759 – 768.
9. *Kirilyuk V. S.* On interaction of an ellipsoidal inclusion with elliptic crack in elastic material under triaxial tension // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 6. – P. 91 – 100.
10. *Kirilyuk V. S.* On stress state of elastic medium with elliptic crack and two ellipsoidal inclusions // Ibid. – 2003. – **39**, No. 7. – P. 94 – 105.
11. *Mura T.* Micromechanics of defects in solids. – Boston; London: Martinus Nijhoff, 1987. – 587 p.
12. *Подильчук Ю. Н.* Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 10. – С. 3 – 30.
13. *Немиш Ю. Н.* Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 2. – С. 3 – 38.
14. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Поступила 17. 11. 2004