

## Определение напряжений в двухслойном покрытии

Н. А. Долгов

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Предложен подход, позволяющий аналитически определить распределение нормальных и касательных напряжений в пластине с двухслойным покрытием. Показано, что благодаря оптимальному выбору конструктивных и технологических параметров системы основа–покрытие можно снизить уровень напряжений в покрытиях. Отмечено, что научно обоснованные рекомендации по снижению напряжений в системе основа–покрытие необходимы как конструкторам, так и технологам.*

**Ключевые слова:** покрытие, основа, касательные напряжения, нормальные напряжения, теплозащитные покрытия, деформации, перемещения, дифференциальные уравнения, упругие задачи.

**Введение.** Для установления причин разрушения покрытий в процессе эксплуатации и прогнозирования их ресурса необходимо знать напряженное состояние (НС). Кроме того, для корректного и достоверного экспериментального определения прочностных характеристик системы основа–покрытие следует учитывать напряжения, возникающие в покрытии, основе и плоскости адгезионного контакта.

В настоящее время широкое применение находят двухслойные теплозащитные покрытия, состоящие из внешнего керамического слоя и металлического подслоя. При воздействии нагрузки из-за разных упругих свойств двухслойного покрытия и основы возникает неоднородное НС. Эта особенность многослойных материалов должна учитываться при разработке различных типов деталей с покрытиями. Исследование напряжений, вызывающих отслоение и растрескивание двухслойных покрытий, – весьма актуальная научная задача.

Известны различные подходы для оценки НС в покрытии при нагружении основы внешними силами. Аналитические модели рассматривают только однослойные покрытия, в то время как широкое применение получили двухслойные покрытия.

Для изучения НС рассмотрим плоскую пластину с покрытием, растягивающуюся под действием одноосной нагрузки [1]. Покрытие наносится на верхнюю и нижнюю поверхности пластины [1]. Пластина с покрытием имеет некоторую толщину и конечную ширину. Длина покрытия меньше длины пластины, которая используется в качестве основы. Покрытие нанесено симметрично оси основы. Предполагается идеальное сцепление между слоями. Задача решается в упругой постановке. Растягивающая нагрузка прикладывается к торцам пластины. Вдали от свободных краев покрытия НС системы однородно. Определяются нормальные и касательные напряжения, возникающие в покрытии при нагружении основы.

В работе [2] построена мембранная модель для тонких пленок. С помощью модели можно описывать только касательные напряжения в плен-

ке, в то время как нормальные напряжения в пленке и основе определить нельзя. В [3] построены балочная и мембранная модели для участка покрытия, соединенного с упругим полупространством. Балочная модель в отличие от мембранной учитывает изгибную жесткость.

В плоскости адгезионного контакта основы и покрытия предполагается проскальзывание, вследствие чего величина касательных напряжений постоянна в зоне проскальзывания [4].

Для определения напряжений в покрытии получено интегрально-дифференциальное уравнение [5]. Эти напряжения зависят от расстояния до свободного края покрытия ( $x = 0$ ):

$$\sigma_{f,x}(x) = \sigma_0 - \frac{2h E_f(1 - \nu_s^2)}{\pi E_s(1 - \nu_f^2)} \int_0^\infty \frac{\partial \sigma_{f,s}(u)}{\partial u} \frac{du}{x - u},$$

где  $h$  – толщина покрытия;  $x$  – расстояние от свободного края покрытия;  $\sigma_0$  – однородные напряжения в покрытии;  $\sigma_{f,x}$  – напряжение в покрытии;  $E_s$ ,  $E_f$  и  $\nu_s$ ,  $\nu_f$  – модули упругости и коэффициенты Пуассона основы и покрытия соответственно.

Установлено [6], что покрытия растрескиваются после нагружения. Напряжения в покрытии между двумя трещинами находятся из выражения

$$\sigma_{xx}^f(x) = \frac{\sigma_0^s}{K} + \sigma_r^f - \frac{2h}{\pi K} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial \sigma_{xx}^f(u)}{\partial u} \frac{du}{x - u},$$

где  $\sigma_0^s$  – напряжения, приложенные к основе;  $\sigma_r^f$  – остаточные напряжения в покрытии;  $K$  – отношение модулей упругости основы и покрытия;  $L$  – длина покрытия между двумя трещинами (длина нетреснутого сегмента покрытия);  $u$  – расстояние в продольном направлении, в середине сегмента покрытия оно равно нулю, на краях:  $-L/2$  и  $L/2$ . В этом выражении первая составляющая соответствует нетреснутому покрытию и идеальной передаче напряжений вдоль поверхности адгезионного контакта основы и покрытия при их упругой деформации. Интегральные составляющие соответствуют взаимодействию, вызванному близостью свободных поверхностей, и снижению уровня напряжений. Уравнение решается конечно-разностным методом в предположении, что оба материала деформируются упруго.

Цель работы заключалась в выводе аналитических зависимостей, позволяющих определить нормальные и касательные напряжения в двухслойном покрытии при приложении растягивающей нагрузки к основе.

**Анализ напряженного состояния пластины с двухслойным покрытием.** Рассмотрим пластину с покрытием, нанесенным на верхнюю и нижнюю поверхности основы. Растягивающая нагрузка прикладывается к основе  $1$  (рис. 1). Покрытие состоит из подслоя  $2$  и наружного слоя  $3$ . В двух плоскостях адгезионного контакта между основой  $1$  и подслоем  $2$  (I), а также между подслоем  $2$  и наружным слоем  $3$  (II) при растяжении возникают касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно.

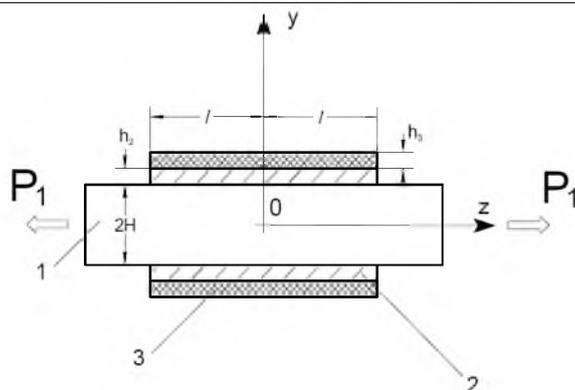


Рис. 1. Расчетная схема образца с двухслойным покрытием.

Аналогично работам [1, 7] полагаем, что касательные напряжения в плоскостях I и II пропорциональны разности перемещений в соседних слоях материалов, составляющих систему основа–покрытие:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= S_1(u_1 - u_2); \\ \tau_2 &= S_2(u_2 - u_3), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S_1, S_2$  – некоторые постоянные системы основа–покрытие;  $u_1, u_2, u_3$  – перемещения центров тяжести основы, подслоя и наружного слоя соответственно.

Разница между удлинениями соседних слоев системы основа–покрытие для плоскостей I и II зависит как от внешней растягивающей нагрузки, так и от поперечных сил, эквивалентных воздействию соответствующих слоев:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(u_1 - u_2) &= C_{11}Q_1 + C_{12}Q_2 + \varepsilon_0; \\ \frac{\partial}{\partial z}(u_2 - u_3) &= C_{21}Q_1 + C_{22}Q_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C_{11}, C_{21}$  и  $C_{12}, C_{22}$  – податливости поперечного сечения, на которые действуют поперечные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  соответственно в плоскостях I и II;  $\varepsilon_0$  – удлинение при действии внешней нагрузки на основу без покрытия.

Величина  $\varepsilon_0$  равна:

$$\varepsilon_0 = -\frac{P_1}{E_1 F_1}, \quad (3)$$

где  $P_1$  – внешняя сила, приложенная к основе;  $E_1$  – модуль упругости основы;  $F_1$  – площадь поперечного сечения основы.

Величины  $C_{11}, C_{12}, C_{21}$  и  $C_{22}$  равны соответственно:

$$C_{11} = \frac{2}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2}; \quad C_{12} = -\frac{1}{E_2 F_2}; \quad (4a)$$

$$C_{21} = -\frac{1}{E_2 F_2}; \quad C_{22} = \frac{1}{E_2 F_2} + \frac{1}{E_3 F_3}, \quad (46)$$

где  $E_2, E_3$  – модули упругости подслоя 2 и слоя 3 (рис. 1) соответственно;  $F_2, F_3$  – площади поперечного сечения подслоя 2 и слоя 3 соответственно.

Площади поперечных сечений вычисляются из следующих выражений:

$$F_1 = 2Ht; \quad (5)$$

$$F_2 = h_2 t; \quad (6)$$

$$F_3 = h_3 t, \quad (7)$$

где  $2H$  – толщина основы (такое обозначение принято аналогично работам [1, 7, 8], где рассматривалось симметрично нанесенное покрытие);  $h_2, h_3$  – толщина подслоя 2 и слоя 3 (рис. 1) соответственно;  $t$  – ширина основы и покрытия.

Продифференцировав выражения (1) и подставив в них (2), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_1} \frac{\partial \tau_1}{\partial z} &= C_{11} Q_1 + C_{12} Q_2 + \varepsilon_0; \\ \frac{1}{S_2} \frac{\partial \tau_2}{\partial z} &= C_{12} Q_1 + C_{22} Q_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в плоскостях I и II определяются по выражениям

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{t} \frac{\partial Q_1}{\partial z}; \\ \tau_2 &= \frac{1}{t} \frac{\partial Q_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, систему дифференциальных уравнений для определения поперечных сил в плоскостях I и II можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_1 t} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial z^2} &= C_{11} Q_1 + C_{12} Q_2 + \varepsilon_0; \\ \frac{1}{S_2 t} \frac{\partial^2 Q_2}{\partial z^2} &= C_{12} Q_1 + C_{22} Q_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (10) состоит из частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.

С помощью линейного преобразования функций  $Q_1$  и  $Q_2$  введем такие функции  $Q_1^*$  и  $Q_2^*$ , при которых система дифференциальных уравнений (10) преобразуется в два независимых дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha_{11}Q_1^* + \alpha_{12}Q_2^*; \\ Q_2 &= \alpha_{21}Q_1^* + \alpha_{22}Q_2^*, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{22}$  – некоторые постоянные множители.

Если решение однородной системы уравнений отыскивать в виде

$$\begin{aligned} Q_1^* &= A_1 \operatorname{sh} k_1 z + B_1 \operatorname{ch} k_1 z; \\ Q_2^* &= A_2 \operatorname{sh} k_2 z + B_2 \operatorname{ch} k_2 z, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  – постоянные, определяемые из граничных условий, то для нахождения корней характеристического уравнения  $k_1$  и  $k_2$  получим уравнение вида

$$\begin{vmatrix} S_1 t C_{11} - k^2 & S_1 t C_{12} \\ S_2 t C_{21} & S_2 t C_{22} - k^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

откуда

$$k^4 - k^2(S_1 t C_{11} + S_2 t C_{22}) + S_1 S_2 t^2 (C_{11} C_{22} - C_{12}^2) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет корни  $k_1$  и  $k_2$ :

$$k_1^2 = \frac{1}{2}(S_1 t C_{11} + S_2 t C_{22} + \sqrt{(S_1 t C_{11} - S_2 t C_{22})^2 + 4C_{12}^2 S_1 S_2 t^2}); \quad (15)$$

$$\begin{aligned} k_2^2 &= \frac{1}{2}(2S_1 t C_{11} + 2S_2 t C_{22} - \\ &- 2\sqrt{(S_1 t C_{11} + S_2 t C_{22})^2 - 4S_1 S_2 t^2 (C_{11} C_{22} - C_{12}^2)}). \end{aligned} \quad (16)$$

Коэффициенты  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{21}$ ,  $\alpha_{22}$  определяются из однородных систем линейных уравнений, определитель которых равен нулю:

$$\begin{aligned} (S_1 t C_{11} - k_i^2)\alpha_{1i} + S_1 t C_{12}\alpha_{2i} &= 0; \\ S_2 t C_{21}\alpha_{1i} + (S_2 t C_{22} - k_i^2)\alpha_{2i} &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

При  $i = 1$  получим

$$\begin{aligned} (S_1 t C_{11} - k_1^2)\alpha_{11} + S_1 t C_{12}\alpha_{21} &= 0; \\ S_2 t C_{21}\alpha_{11} + (S_2 t C_{22} - k_1^2)\alpha_{21} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

откуда

$$\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = \frac{k_1^2 - S_1 t C_{11}}{S_1 t C_{12}} = \frac{S_2 t C_{12}}{k_1^2 - S_2 t C_{22}}. \quad (19)$$

Чтобы решение уравнений (18) было нетривиальным, положим условие нормированности коэффициентов  $\alpha_{i1}$ :

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\alpha_{i1}^2}{S_i t} = 1. \quad (20)$$

Нормируем коэффициенты  $\alpha_{11}$  и  $\alpha_{21}$ , введя обозначение:

$$\frac{\alpha_{21} \sqrt{S_1}}{\alpha_{11} \sqrt{S_2}} = \frac{\sqrt{S_1 S_2} t C_{12}}{k_1^2 - S_2 t C_{22}} = \operatorname{tg} \beta, \quad (21)$$

откуда

$$\alpha_{21} = \alpha_{11} \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} \operatorname{tg} \beta. \quad (22)$$

В соответствии с выражением (20) получим

$$\frac{\alpha_{11}^2}{S_1 t} + \frac{\alpha_{21}^2}{S_2 t} = \frac{\alpha_{11}^2}{S_1 t} + \frac{\alpha_{11}^2}{S_1 t} \operatorname{tg}^2 \beta = 1. \quad (23)$$

Тогда

$$\frac{\alpha_{11}^2}{S_1 t} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \cos^2 \beta. \quad (24)$$

Окончательно запишем:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \sqrt{S_1 t} \cos \beta; \\ \alpha_{21} &= \sqrt{S_2 t} \sin \beta. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично при  $i = 2$  имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= -\sqrt{S_1 t} \sin \beta; \\ \alpha_{22} &= \sqrt{S_2 t} \cos \beta. \end{aligned} \quad (26)$$

Выражения для неизвестных  $Q_1^*$  и  $Q_2^*$  представим в виде

$$\begin{aligned} Q_1^* &= \frac{\alpha_{11}}{S_1} Q_1 + \frac{\alpha_{21}}{S_2} Q_2 = \sqrt{\frac{t}{S_1}} Q_1 \cos \beta + \sqrt{\frac{t}{S_2}} Q_2 \sin \beta; \\ Q_2^* &= \frac{\alpha_{12}}{S_1} Q_1 + \frac{\alpha_{22}}{S_2} Q_2 = -\sqrt{\frac{t}{S_1}} Q_1 \sin \beta + \sqrt{\frac{t}{S_2}} Q_2 \cos \beta. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда система уравнений (10) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^*}{\partial z^2} &= k_1^2 Q_1^* + \varepsilon_{01}^*; \\ \frac{\partial^2 Q_2^*}{\partial z^2} &= k_2^2 Q_2^* + \varepsilon_{02}^*, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{01}^* &= \alpha_{11} \varepsilon_0 = \sqrt{S_1 t} \varepsilon_0 \cos \beta; \\ \varepsilon_{02}^* &= \alpha_{12} \varepsilon_0 = -\sqrt{S_1 t} \varepsilon_0 \sin \beta. \end{aligned} \quad (29)$$

Решение системы уравнений (28) отыскиваем в виде

$$\begin{aligned} Q_1^* &= A_1 \operatorname{sh} k_1 z + B_1 \operatorname{ch} k_1 z + Q_{01}^*; \\ Q_2^* &= A_2 \operatorname{sh} k_2 z + B_2 \operatorname{ch} k_2 z + Q_{02}^*, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $Q_{01}^*$ ,  $Q_{02}^*$  – частные решения системы (28),

$$\begin{aligned} Q_{01}^* &= -\frac{\varepsilon_{01}^*}{k_1^2}; \\ Q_{02}^* &= -\frac{\varepsilon_{02}^*}{k_2^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Ввиду симметричности функции  $Q_1^*$  относительно оси  $z=0$  следует, что  $A_1=0$ . Из граничного условия  $Q_1^*(l)=0$  получим  $B_1 \operatorname{ch} k_1 l - \frac{\varepsilon_{01}^*}{k_1^2} = 0$ , откуда  $B_1 = \frac{\varepsilon_{01}^*}{k_1^2 \operatorname{ch} k_1 l}$ . Аналогично найдем, что  $A_2=0$  и  $B_2 = \frac{\varepsilon_{02}^*}{k_2^2 \operatorname{ch} k_2 l}$ .

Поперечные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  определим по выражениям

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{S_1 t} Q_1^* \cos \beta - \sqrt{S_1 t} Q_2^* \sin \beta; \\ Q_2 &= \sqrt{S_2 t} Q_1^* \sin \beta + \sqrt{S_2 t} Q_2^* \cos \beta. \end{aligned} \quad (32)$$

В соответствии с (9) касательные напряжения  $\tau_1$  и  $\tau_2$  вычислим по следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{t} \sqrt{S_1 t} B_1 k_1 \cos \beta \operatorname{sh} k_1 z - \frac{1}{t} \sqrt{S_1 t} B_2 k_2 \sin \beta \operatorname{sh} k_2 z; \\ \tau_2 &= \frac{1}{t} \sqrt{S_2 t} B_1 k_1 \cos \beta \operatorname{sh} k_1 z + \frac{1}{t} \sqrt{S_2 t} B_2 k_2 \sin \beta \operatorname{sh} k_2 z. \end{aligned} \quad (33)$$

После соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{S_1 \varepsilon_0 \cos^2 \beta \operatorname{sh} k_1 z}{k_1 \operatorname{ch} k_1 l} + \frac{S_1 \varepsilon_0 \sin^2 \beta \operatorname{sh} k_2 z}{k_2 \operatorname{ch} k_2 l}; \\ \tau_2 &= \frac{\sqrt{S_1 S_2} \varepsilon_0 \sin \beta \cos \beta \operatorname{sh} k_1 z}{k_1 \operatorname{ch} k_1 l} - \frac{\sqrt{S_1 S_2} \varepsilon_0 \sin \beta \cos \beta \operatorname{sh} k_2 z}{k_2 \operatorname{ch} k_2 l}.\end{aligned}\quad (34)$$

Постоянные  $S_1$  и  $S_2$  определим в соответствии с подходом, предложенным ранее [8].

Аналогично работам [1, 8] полагаем, что касательные напряжения в плоскостях адгезионных контактов I и II линейно затухают в основе на толщине  $H$  и в слоях покрытия. Кроме того, в слоях покрытия распределение нормальных напряжений равномерно по толщине.

Уравнения связи между деформациями и перемещениями для подслоя 2 и основы 1 (рис. 1) запишем в виде

$$\gamma_1 = \frac{u_1 - u}{H/2}; \quad (35)$$

$$\gamma_2 = \frac{u - u_2}{h_2/2}, \quad (36)$$

где  $\gamma_1$  – деформация основы 1;  $\gamma_2$  – деформация подслоя 2;  $u$  – смещение в плоскости адгезионного контакта I.

В плоскости I касательные напряжения будут

$$\tau_1 = G_1 \gamma_1 = G_2 \gamma_2, \quad (37)$$

где  $G_1$ ,  $G_2$  – модули сдвига основы 1 и подслоя 2 (рис. 1) соответственно.

После некоторых преобразований из выражений (35) и (36) получим

$$u_1 - u_2 = \frac{\tau_1 (H/G_1 + h_2/G_2)}{2}. \quad (38)$$

Из первого выражения (1) с учетом (38) запишем

$$S_1 = \frac{2}{\left(\frac{H}{G_1} + \frac{h_2}{G_2}\right)}. \quad (39)$$

После аналогичных преобразований для постоянной  $S_2$  получим

$$S_2 = \frac{2}{\left(\frac{h_2}{G_2} + \frac{h_3}{G_3}\right)}. \quad (40)$$

Нормальные напряжения  $\sigma_2$  в подслое 2 и нормальные напряжения  $\sigma_3$  в слое 3 (рис. 1) равны соответственно:

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F_2}; \quad (41)$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{F_3}, \quad (42)$$

где  $N_2$  – продольная сила в подслое 2;  $N_3$  – продольная сила в слое 3. В покрытии продольные силы таковы:

$$N_2 = Q_1 - Q_2; \quad (43)$$

$$N_3 = Q_2, \quad (44)$$

где  $Q_1$  и  $Q_2$  – поперечные силы,

$$Q_1 = \frac{S_1 t \varepsilon_0 \cos^2 \beta}{k_1^2} \left( \frac{\operatorname{ch} k_1 z}{\operatorname{ch} k_1 l} - 1 \right) + \frac{S_1 t \varepsilon_0 \sin^2 \beta}{k_2^2} \left( \frac{\operatorname{ch} k_2 z}{\operatorname{ch} k_2 l} - 1 \right); \quad (45)$$

$$Q_2 = \frac{\sqrt{S_1 S_2} t \varepsilon_0 \sin \beta \cos \beta}{k_1^2} \left( \frac{\operatorname{ch} k_1 z}{\operatorname{ch} k_1 l} - 1 \right) - \frac{\sqrt{S_1 S_2} t \varepsilon_0 \sin \beta \cos \beta}{k_2^2} \left( \frac{\operatorname{ch} k_2 z}{\operatorname{ch} k_2 l} - 1 \right). \quad (46)$$

Характер распределения нормальных и касательных напряжений в системе основа–покрытие не зависит от внешних растягивающих нагрузок, приложенных к пластине. Поэтому от абсолютных значений напряжений можно перейти к относительным. Относительные касательные и нормальные напряжения вычисляются по формулам

$$\tau_{1rel} = \frac{\tau_1}{\sigma_{sub}}; \quad \tau_{2rel} = \frac{\tau_2}{\sigma_{sub}}; \quad \sigma_{2rel} = \frac{\sigma_2}{\sigma_{sub}}; \quad \sigma_{3rel} = \frac{\sigma_3}{\sigma_{sub}}, \quad (47)$$

где  $\sigma_{sub}$  – напряжение, приложенное к пластине,  $\sigma_{sub} = P_1/F_1$ .

**Определение нормальных и касательных напряжений в системе основа–покрытие.** Поскольку расчетные модели систем основа–покрытие учитывают упругие характеристики основы и покрытия, их необходимо точно и корректно экспериментально определять. Для определения модуля упругости покрытия используется предложенная ранее методика [9].

Сравним напряжения, получаемые по разным моделям. На рис. 2 показаны распределения касательных напряжений  $\tau$  в соответствии с моделью для однослойного покрытия [1] и  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  в соответствии с предложенной моделью для двухслойного покрытия. При расчетах принимали следующие

значения упругих характеристик основы и покрытия: модуль упругости основы 209 ГПа; модуль упругости однослойного покрытия 50 ГПа. Для двухслойного покрытия полагаем  $E_2 = E_3 = 50$  ГПа. Коэффициент Пуассона основы равен 0,3, покрытия – 0,28. Касательные и нормальные напряжения рассчитывали при деформации основы 0,1%. Толщина основы составляла 1,5 мм. Для однослойного покрытия толщина  $h = 0,31$  мм. Ширина основы и покрытия равна 5 мм. Для двухслойного покрытия положим  $h_2 = 0,001$  мм,  $h_3 = 0,309$  мм, т.е.  $h_2 + h_3 = h$ .

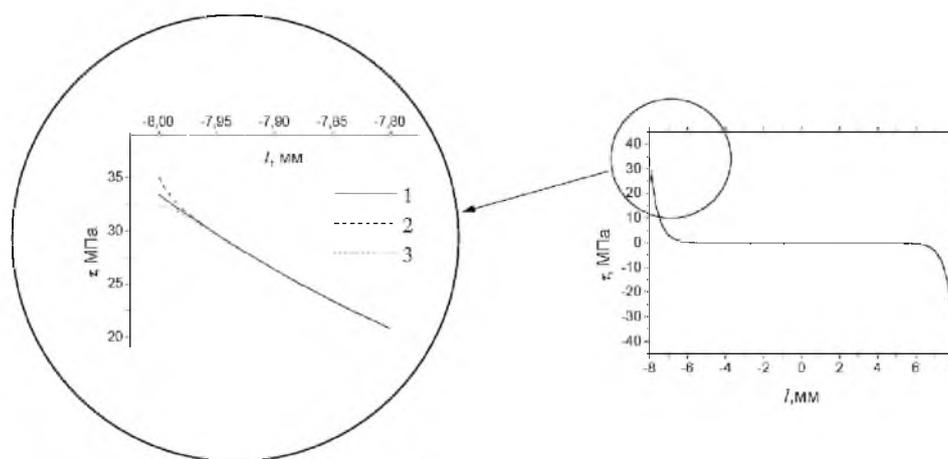


Рис. 2. Распределение касательных напряжений  $\tau$  в соответствии с моделью для однослойного покрытия [1] и предложенной автором моделью для двухслойного покрытия при  $h_2 = 0,001$  мм и  $h_3 = 0,309$  мм: 1 –  $\tau$ ; 2 –  $\tau_1$ ; 3 –  $\tau_3$ .

Анализ данных на рис. 2 показал, что при соотношении  $h_2/h_3 \ll 1$  касательные напряжения, рассчитанные по разным моделям, совпадают с точностью до 5%. Расчет нормальных напряжений в покрытии по различным моделям свидетельствует, что различие между ними составляет менее 1%.

Рассмотрим растяжение пластины вдоль оси  $z$  ( $E_1 = 209$  ГПа, толщина  $2H = 1,5$  мм, ширина  $t = 5$  мм), к которой прикладывается растягивающая деформация  $\varepsilon_0 = 0,1\%$  (рис. 1). На пластину напыляется металлический подслои толщиной  $h_2 = 0,3$  мм ( $E_2 = 198$  ГПа) и керамический внешний слой толщиной  $h_3 = 0,2$  мм ( $E_3 = 50$  ГПа). Для наглядности на рис. 3 графики распределения относительных нормальных и касательных напряжений в двухслойном покрытии построены как функции безразмерной длины  $\xi = x/l$ . Видно, что максимальные касательные напряжения возникают в сечениях  $\xi = \pm 1$ . Дифференцирование выражений для определения нормальных напряжений показало, что максимальные нормальные напряжения возникают в сечении  $\xi = 0$ . В результате экспериментальных исследований образцов с покрытиями установлено, что верхний керамический слой растрескивается при  $\xi = 0$ , а отслаивается при  $\xi = \pm 1$ .

С целью исследования влияния толщины слоев на напряженное состояние определяли относительные касательные и нормальные напряжения в системе при изменении соотношения толщин  $h_2/h_3$  от 49 до 0,25. Толщина

двухслойного покрытия ( $h_2 + h_3$ ) при этом оставалась постоянной: 0,5 мм. При расчетах полагали, что модуль упругости металлического подслоя  $E_2 = 198$  ГПа, керамического внешнего слоя –  $E_3 = 50$  ГПа. Анализ результатов расчетов (таблица) свидетельствует, что при уменьшении соотношения толщин  $h_2/h_3$  касательные напряжения  $\tau_1$  понижаются, а напряжения  $\tau_2$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  увеличиваются.

Относительные касательные и нормальные напряжения при различных соотношениях  $h_2/h_3$

$h_2/h_3$ , мм	$\tau_{1rel}$	$\tau_{2rel}$	$\sigma_{2rel}$	$\sigma_{3rel}$
$\frac{0,49}{0,01}$	0,42	0,002	0,584	0,147
$\frac{0,45}{0,05}$	0,419	0,010	0,598	0,151
$\frac{0,4}{0,1}$	0,416	0,020	0,616	0,156
$\frac{0,3}{0,2}$	0,407	0,041	0,657	0,166
$\frac{0,2}{0,3}$	0,388	0,065	0,703	0,177
$\frac{0,1}{0,4}$	0,345	0,10	0,756	0,191

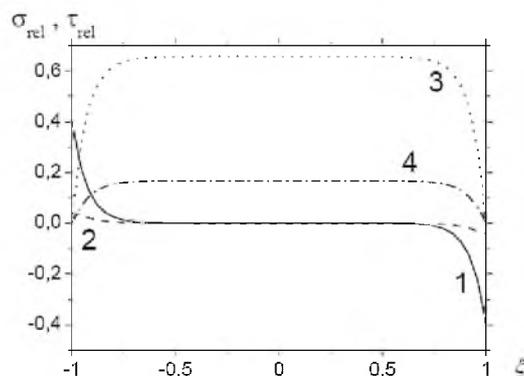


Рис. 3. Распределение относительных нормальных и касательных напряжений в двухслойном покрытии: 1 –  $\tau_{1rel}$ ; 2 –  $\tau_{2rel}$ ; 3 –  $\sigma_{2rel}$ ; 4 –  $\sigma_{3rel}$ .

**Заключение.** Проанализировано напряженное состояние системы прямоугольной пластины, на верхнюю и нижнюю поверхность которой нанесено двухслойное покрытие. Получены аналитические зависимости для определения величины и распределения касательных и нормальных напряжений в двухслойном покрытии, зависящих как от упругих свойств основы и покрытия, так и от их геометрических размеров. Изменение упругих свойств и геометрических размеров покрытий может привести как к понижению, так и к повышению уровня напряжений в них. Оптимальный выбор конструк-

тивных и технологических параметров системы основа–покрытие является актуальной научно-технической задачей, а также представляет научный и практический интерес. Научно обоснованные рекомендации по снижению напряжений в системе основа–покрытие необходимы как конструкторам, так и технологам.

## Резюме

Запропоновано підхід, що дозволяє аналітично визначити розподіл нормального і дотичного напруження у пластині з двошаровим покриттям. Показано, що завдяки оптимальному вибору конструктивних і технологічних параметрів системи основа–покриття можна знизити рівень напруження у таких покриттях. Відзначено, що науково обґрунтовані рекомендації щодо зниження напруження у системі основа–покриття необхідні як конструкторам, так і технологам.

1. Уманский Э. С., Ляшенко Б. А. Условия адгезионной и когезионной равнопрочности жаростойких покрытий // Косм. исследования на Украине. – 1975. – Вып. 6. – С. 58 – 64.
2. Erdogan F. and Joseph P. F. Mechanical modeling of multilayered films on elastic substrate. Pt. 1, 2 // J. Electr. Pack. – 1990. – **112**, No. 4. – P. 309 – 326.
3. Shield T. W. and Kim K. S. Beam theory models for thin film segments cohesively bonded to an elastic half space // Int. J. Solids Struct. – 1992. – **29**, No. 9. – P. 1085 – 1103.
4. Hu M. S. and Evans A. G. The cracking and decohesion of thin films on ductile substrates // Acta Met. – 1989. – **37**, No. 3. – P. 917 – 925.
5. Hu S. M. Film-edge-induced stress in substrates // J. Appl. Phys. – 1979. – **50**, No. 7. – P. 4661 – 4666.
6. Harry E., Rouzaud A., Ignat M., and Juliet P. Mechanical properties of W and W(C) thin films: Young's modulus, fracture toughness and adhesion // Thin Solid Films. – 1998. – **332**, No. 1-2. – P. 195 – 201.
7. Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 1. К оценке напряжений растяжения в покрытии // Пробл. прочности. – 1995. – № 9. – С. 37 – 43.
8. Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 2. Распределение напряжений растяжения в покрытии // Там же. – 1996. – № 5. – С. 63 – 67.
9. Долгов Н. А. Метод определения модуля упругости газотермических покрытий // Порошк. металлургия. – 2004. – № 7/8. – С. 110 – 115.

Поступила 26. 05. 2003