

УДК 301.17.15;301.07.13

ДИФФУЗИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО КВАЗИДВУМЕРНОГО ВИХРЯ В СЛОЕ УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

П. В. ЛУКЬЯНОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 24.08.2005 ◊ Пересмотрено 30.06.2006

Статья содержит аналитическое решение задачи турбулентной диффузии квазигоризонтального изолированного осесимметричного вихря. Квазигоризонтальность обуславливает малость вертикальной компоненты скорости, а медленное изменение во времени – малость радиальной компоненты. Случаи, где это предположение нарушается, оговариваются в разделе о вторичных течениях. На основании сделанных допущений задача сводится к одному линейному уравнению диффузии для вертикальной компоненты завихренности с различными вертикальной и горизонтальной диффузией. Вертикальная диффузия полагается приближенно постоянной [1], что типично только для устойчивой стратификации. Горизонтальная диффузия вычисляется по закону “четырёх третей” Ричардсона, приближенно выполняющемуся для горизонтальных масштабов вихрей в диапазоне 10–1000 м [2, 3]. Граничные условия задачи стандартны. Граничные условия на свободной поверхности можно формулировать на поверхности невозмущенного слоя жидкости, так как показано, что величина искривления свободной поверхности мала по сравнению с глубиной слоя. Для моделирования начального распределения завихренности, по вертикальной координате используется специальное распределение, которое позволяет строго удовлетворить граничные условия и задавать в начальный момент вихрь различной толщины и расположения. По радиальной координате используется распределение в виде изолированного гауссиана [4–6]. Полное решение линейной задачи позволяет выделить процесс горизонтальной диффузии, для которого найдено автомодельное решение. Оно, для данного радиального распределения, соответствует условию сохранения третьего момента завихренности. Показано, что линейная модель справедлива, если число Фруда значительно меньше 1.

Стаття містить аналітичний розв'язок задачі турбулентної дифузії квазигоризонтального ізольованого вісесиметричного вихря. Квазигоризонтальність обумовлює малість вертикальної компоненти швидкості, а повільний рух у часі – малість радіальної компоненти. Ситуації, коли це припущення порушується, обговорені у розділі про другорядні течії. На підставі зроблених припущень задача зводиться до одного лінійного рівняння дифузії для вертикальної компоненти завихренності з різними горизонтальною та вертикальною дифузійми. Вертикальна дифузія вважається наближено сталою [1], що є типовим для стійкої стратифікації. Горизонтальна дифузія рахується за законом “чотирьох третин” Річардсона, що наближено виконується для горизонтальних масштабів вихорів у діапазоні 10–1000 м [2, 3]. Граничні умови задачі стандартні. Граничні умови на вільній поверхні можна формулювати на поверхні незбуреного шару рідини, так як показано, що величина викривлення вільної поверхні є дуже малою у порівнянні із товщиною шару рідини. За радіальною координатою використовується розподіл у вигляді ізольованого гауссіану [4–6]. Повний розв'язок лінійної задачі дозволяє відокремити процес горизонтальної дифузії, для якого знайдено автомодельний розв'язок. Він, для даного радіального розподілу, відповідає умові збереження третього моменту завихренності. Показано, що лінійна модель справедлива, якщо число Фруда значно менше за 1.

This paper contains analytical solution for turbulent diffusion of an axisymmetric quasihorizontal isolated vortex. Quasihorizontality means small vertical velocities, and slow changing in time means also small radial velocities. The situations when these restrictions are broken are discussed in the section on secondary flows. On the base of made assumptions, the problem is reduced to an linear diffusion equation for vertical component of vorticity. The horizontal and vertical diffusions are different. The vertical diffusion is considered to be constant [1] that is only typical for stable stratification. Horizontal diffusion is calculated by Richardson Low of “four thirds” that is approximately true for vortex scales range from 10 to 1000 m [2, 3]. The problem's boundary conditions are typical. The deformation of free surface for the problem is negligible in comparison with the thickness of the layer. So boundary conditions at free surface may be formulated at the surface of still fluid. For simulation of initial vorticity distribution on vertical coordinate, the special distribution that strictly meets boundary conditions is used. This distribution also affords to set vortex of various thickness and positions in the layer. On radial coordinate the distribution is taken as isolated Gaussian [4–6]. The solution of the linear problem affords splitting into two ones that correspond to horizontal and vertical diffusion processes. For the horizontal diffusion, the self-similar solution has been found. For certain radial distribution, this solution corresponds to conservation of vorticity third moment. It is shown that linear model is valid when Froud number is significantly less than 1.

ВВЕДЕНИЕ

Морская среда, как правило, характеризуется наличием устойчивой вертикальной стратификации. В таких условиях возникающая турбулентность, основные механизмы генерации которой можно найти в [1], приобретает квазигоризонтальный характер [7]. Это означает, что вертикальная компонента скорости случайного вихревого

движения становится со временем пренебрежимо мала, так как подавляется стратификацией. При этом вектор завихренности направлен почти вертикально [7]. Динамика такого течения сопоставима с чисто двумерными вихрями, а структура существенно трехмерна [5]. Относительная малость изменения во времени горизонтального масштаба изолированных вихрей возможна при еще одном ограничении: радиальная компонента скорости должна быть также пренебрежимо мала по

сравнению с окружающей.

Наличие вертикальной стратификации и механизма турбулентной вязкости выходят за рамки условий теорем Гельмгольца о вихрях. Тем не менее, описывающийся уравнением теплопроводности процесс диффузии обладает следующим свойством: возникшие в какой-то произвольный момент времени возмущения распространяются мгновенно на всю область. Это свойство следует из вида решения параболического уравнения. Формально, следствие теоремы Гельмгольца о том, что вихрь должен начинаться и заканчиваться на границе, выполнено качественно. Как же тогда объяснить те многочисленные натурные измерения вихрей в морях и океанах, которые указывают на изолированный характер областей завихренности? Ответ состоит в том, что за бесконечно малый промежуток времени (почти мгновенно) границ области достигают бесконечно малые по амплитуде возмущения (в десятки тысяч, а то и в миллионные раз меньшие амплитуды начального возмущения). Скорость же распространения основных энергонесущих мод конечна. И во многих случаях начальной энергии вихря оказывается недостаточно, чтобы возмущения, сопоставимые по амплитуде с начальными, могли достичь границ области, в частности свободной поверхности. Вихрь просто диффундирует внутри слоя.

Диффузия вихря в условиях океана анизотропна. Ее скорости в вертикальном и горизонтальном направлениях различны и во много раз больше скорости молекулярной диффузии. Выделяют три режима турбулентной диффузии: линейный, инерционный и режим “броуновского” движения [2]. Для вертикальных масштабов, равных десяткам и первым сотням метров, линейный и инерционный режимы проходят очень быстро. Основным является режим броуновского движения. Этот режим характеризуется постоянством коэффициента турбулентной диффузии. Поэтому в рамках данной работы коэффициент вертикальной диффузии будет приниматься постоянным. Что касается горизонтальной диффузии в море, то здесь основным оказывается инерционный режим, характеризующийся квадратичной зависимостью роста коэффициента диффузии во времени. На основании этого получается известный “закон четырех третей” Ричардсона.

С целью упрощения задачи рассматривается только вихрь, вертикальные размеры которого могут варьироваться от десятков сантиметров до десятков метров, горизонтальные – от десятков метров до первых нескольких километров. При этом отношение вертикального масштаба вихря к гори-

зонтальному всегда мало. Поправка, связанная с кривизной Земли, для указанных масштабов ничтожно мала. Влияние силы Кориолиса также пренебрежимо мало.

В работах [6, 8-10] показано, что для данного процесса эффектом внутренних волн можно пренебречь. На динамику вихря также могут влиять приливы и отливы, минимальный масштаб времени которых составляет 50000 секунд. В то же время, продолжительность процесса диффузии мелкомасштабных областей варьируется десятками минут [11]. Следовательно, приведенные ниже результаты справедливы не только для зон отсутствия приливов и отливов, но и для зон с их наличием в периоды времени, когда действие приливных сил минимально.

Основным результатом работы есть линейная модель диффузии вихря, сформулированная в терминах вертикальной компоненты завихренности. В специальном разделе оговариваются ограничения этой модели, при которых вторичные (радиальные и вертикальные) течения пренебрежимо малы.

1. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Общие уравнения.

Рассмотрим компактную осесимметричную область завихренности в слое конечной толщины устойчиво стратифицированной жидкости. Компактность означает экспоненциальное убывание амплитуды завихренности с расстоянием от центра вихря (рис. 1). Пусть нижняя граница этого слоя – твердая поверхность, подобная дну, а верхняя граница представляет собой свободную поверхность. Формулировка задачи для осесимметричного вихря удобна в цилиндрической системе координат. Однако, как станет ясно в ходе изложения, формулировка и решение будут также полезны и в прямоугольной декартовой системе координат: основное уравнение для диффузии завихренности легко получается из уравнений движения в прямоугольной декартовой системе координат и лишь затем – его аналог в цилиндрической системе.

Ось Oz направим вверх, а начало координат ($z = 0$) разместим на дне. В цилиндрической системе координат уравнения, описывающие турбулентное движение несжимаемой жидкости с переменной плотностью, которая определяется темпе-

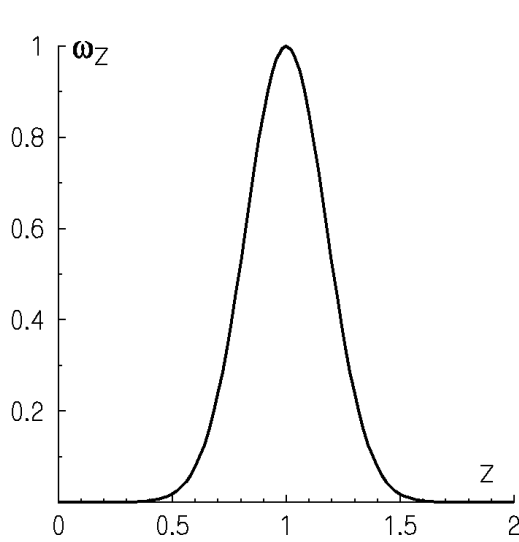


Рис. 1. Типичное вертикальное распределение максимума вертикальной компоненты завихренности в начальный момент времени

ратурой и/или концентрацией соли, имеют следующий вид [12]:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{dV_r}{dt} &= -\frac{1}{r} (-\rho \overline{V_r'^2}) + \\
 &+ \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{V_r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \overline{V_r}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \overline{V_r}}{\partial z^2} \right) - \\
 &-\frac{\partial \overline{p}}{\partial r} - \left(\frac{\overline{V_r}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \rho \overline{V_r'^2}) + \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\rho \overline{V_r' V_\varepsilon'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{V_r' V_z'}), \quad (1) \\
 \rho \frac{d\overline{V_\varepsilon}}{dt} &= \\
 &= \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{V_\varepsilon}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{V_\varepsilon}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \overline{V_\varepsilon}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \overline{V_\varepsilon}}{\partial z^2} \right) - \\
 &- \mu \left(\frac{\overline{V_\varepsilon}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{2}{r} (-\rho \overline{V_r' V_\varepsilon'}) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial r} (-\rho \overline{V_r' V_\varepsilon'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\rho \overline{V_\varepsilon'^2}) - \\
 &- \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{V_\varepsilon' V_z'}), \quad (2) \\
 \rho \frac{d\overline{V_z}}{dt} &= -\overline{\rho} g + \\
 &+ \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{V_z}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \overline{V_z}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \overline{V_z}}{\partial z^2} \right) + \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-\rho r \overline{V_r' V_z'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\rho \overline{V_z' V_\varepsilon'}) -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{V_z'^2}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \overline{V_r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (r \overline{V_\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \overline{V_z}) = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \overline{p}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{\overline{V_\varepsilon}}{r} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \varepsilon} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} = \\
 &= \chi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial \varepsilon^2} + \left(\frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial z^2} \right) \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{V_z' \rho'}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-r \overline{V_r' \rho'}) + \\
 &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (-\overline{V_\varepsilon' \rho'}). \quad (5)
 \end{aligned}$$

где:

$$\frac{d\overline{V_r}}{dt} = \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial r} + \frac{\overline{V_\varepsilon}}{r} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial \varepsilon} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{V_r}}{\partial z} - \frac{\overline{V_\varepsilon}^2}{r},$$

$$\frac{d\overline{V_\varepsilon}}{dt} = \frac{\partial \overline{V_\varepsilon}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{V_\varepsilon}}{\partial r} + \frac{\overline{V_\varepsilon}}{r} \frac{\partial \overline{V_\varepsilon}}{\partial \varepsilon} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{V_\varepsilon}}{\partial z} + \frac{\overline{V_r V_\varepsilon}}{r},$$

$$\frac{d\overline{V_z}}{dt} = \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial t} + \overline{V_r} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial r} + \frac{\overline{V_\varepsilon}}{r} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial \varepsilon} + \overline{V_z} \frac{\partial \overline{V_z}}{\partial z};$$

$\overline{V_r}, \overline{V_\varepsilon}, \overline{V_z}, \overline{p}, \overline{\rho}$ – осредненные значения компонент вектора скорости, отклонения давления и плотности соответственно от состояния устойчивой линейной стратификации (используется осреднение по достаточно большому промежутку времени, чтобы выполнялись все условия теоремы эргодичности и имела место независимость от способа осреднения); g – гравитационная постоянная; μ – динамический коэффициент молекулярной вязкости; χ – коэффициент молекулярной диффузии поля плотности; значок ' обозначает пульсацию соответствующей величины.

В прямоугольных декартовых координатах (обозначим через $\overline{V_x}, \overline{V_y}, \overline{W}$ компоненты вектора скорости) будут:

$$\begin{aligned}
 &\rho \left(\frac{\partial \overline{V_x}}{\partial t} + \overline{V_x} \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial x} + \overline{V_y} \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \overline{V_x}}{\partial z} \right) = \\
 &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{V_x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{V_x}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{V_x}}{\partial z^2} \right) + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{V_x' V_x'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{V_x' V_y'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\overline{V_x' W'}), \quad (6) \\
 &\rho \left(\frac{\partial \overline{V_y}}{\partial t} + \overline{V_x} \frac{\partial \overline{V_y}}{\partial x} + \overline{V_y} \frac{\partial \overline{V_y}}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \overline{V_y}}{\partial z} \right) = \\
 &= -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \overline{V_y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{V_y}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{V_y}}{\partial z^2} \right) +
 \end{aligned}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{V'_yV'_x})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{V'_yV'_y})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{V'_yW'}) \quad (7)$$

$$\rho_{st} + \tilde{\rho} \ll \rho_0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial\overline{W}}{\partial t} + \overline{V}_x\frac{\partial\overline{W}}{\partial x} + \overline{V}_y\frac{\partial\overline{W}}{\partial y} + \overline{W}\frac{\partial\overline{W}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} - \overline{\rho}g + \mu\left(\frac{\partial^2\overline{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overline{W}}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{W'V'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{W'V'_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{W'W'}) \quad (8)$$

$$\frac{\partial\overline{V}_x}{\partial x} + \frac{\partial\overline{V}_y}{\partial y} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial\overline{p}}{\partial t} + \overline{V}_x\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \overline{V}_y\frac{\partial\overline{p}}{\partial y} + \overline{W}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z} = \chi\left(\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\overline{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\overline{p}}{\partial z^2}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho'\overline{V'_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho'\overline{V'_y}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho'\overline{W'}) \quad (10)$$

Отметим, что в приведенных уравнениях пульсации поля плотности учтены лишь в уравнении для диффузии плотности. В уравнениях движения их обычно не учитывают в силу их малости по сравнению со стандартным значением плотности.

Для замыкания приведенных уравнений используем градиентную модель Буссинеска, согласно которой

$$-\overline{V'_iV'_j} = A_j\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j}, \quad -\rho'\overline{V'_j} = B_j\frac{\partial\rho'}{\partial x_j} \quad (11)$$

В выражениях (11) A_j B_j – коэффициенты турбулентной диффузии соответственно скорости и плотности в j -м направлении.

Поле плотности можно представить в виде суммы трех составляющих:

$$\rho = \rho_0 + \rho_{st} + \tilde{\rho},$$

где три компоненты в порядке их следования обозначают стандартную плотность жидкости, поле плотности, соответствующее устойчивой вертикальной стратификации, а также отклонение от этого состояния; $\rho_{st} = \rho_{st}(z)$.

В случае линейной стратификации

$$\frac{d^2\rho_{st}}{dz^2} = 0.$$

Для морской воды справедливо следующее соотношение:

на котором основано широко известное приближение Буссинеска. Оно также будет учтено ниже.

При устойчивой вертикальной стратификации вертикальный коэффициент турбулентной диффузии постоянен ($K_Z = \text{const}$), что соответствует слабому вертикальному перемешиванию [14]. Из экспериментальных данных $K_Z = 0.0005 \text{ м}^2/\text{с}$. Это значение не противоречит тому, что порядок вертикальной турбулентной диффузии $10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$ [15]. Горизонтальные коэффициенты турбулентной диффузии описываются законом Ричардсона “четырёх третей” и зависят от соответствующих масштабов явления (вихря) в каждый момент времени [14].

Для осесимметричного вихря

$$K_x = K_y = K_L(t) = K_r(t) = C\epsilon^{1/3}(L(t))^{4/3},$$

что согласуется с данными натуральных экспериментов [3]. Здесь ϵ – скорость диссипации турбулентной энергии в единице массы. Для горизонтального размера вихря, меняющегося в пределах от 10 до 1000 м, $\epsilon = 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}^{-3}$ и константа $C \approx 0.1$ [3]. В цитированной работе указано, что оценки ϵ можно гарантировать с точностью до множителя 1.5–2. Как видно, в выражении для горизонтальной турбулентной диффузии присутствуют три величины. Одна – $L(t)$ – определяется вихрем. Вторая – ϵ – характеризует фоновую турбулентность, не зависящую от данного вихря. Третья – константа C – позволяет связать два независимых объекта (конкретный вихрь и фоновую турбулентность) в подтвержденную экспериментально закономерность роста горизонтальных коэффициентов турбулентной диффузии – закон Ричардсона. Полагается, что в фоновой турбулентности характерный масштаб энергонесущих вихрей значительно меньше размера исследуемого вихря. И хотя они вносят основной вклад в диффузию, точно никто не знает, во сколько раз масштабы этих вихрей меньше масштаба данного вихря (диффундирующей области). Однако очевидно, что чем больше масштаб диффундирующей области (вихря), тем больше масштаб вихрей, вносящих основной вклад в турбулентную диффузию указанной области. Поэтому единственный выход – использование полученной экспериментально константы C и закона в целом.

Подставляя приведенные данные в формулу для

K_L , получаем зависимость

$$K_L = 2.1710^{-4} L^{4/3}$$

с точностью до множителя 1.14–1.26. Такой же закон, но с другой константой, используется в настоящее время в прикладных задачах и для меньших масштабов [16].

В соответствии со сказанным, уравнения (1)–(3), (5) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dV_r}{dt} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial z^2} \right) - \\ & - \left(\frac{\bar{V}_r}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r(t) \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{K_\varepsilon(t)}{r} \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial \varepsilon^2} + K_z \frac{\partial^2 \bar{V}_r}{\partial z^2} + \frac{K_\varepsilon}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varepsilon}{\partial \varepsilon}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dV_\varepsilon}{dt} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon} + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_\varepsilon}{\partial z^2} \right) - \\ & - \left(\frac{\bar{V}_\varepsilon}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial \varepsilon} \right) + K_r(t) \frac{\partial^2 \bar{V}_\varepsilon}{\partial r^2} + \\ & + \frac{K_\varepsilon(t)}{r} \frac{\partial^2 \bar{V}_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} + K_z \frac{\partial^2 \bar{V}_\varepsilon}{\partial z^2} + \frac{2K_r(t)}{r} \frac{\partial \bar{V}_\varepsilon}{\partial r}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{dV_z}{dt} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\bar{p}g}{\rho_0} + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial z^2} \right) + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \varepsilon} + K_z \frac{\partial^2 \bar{V}_z}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\bar{V}_\varepsilon}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varepsilon} + \bar{V}_z \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \\ = \chi \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \varepsilon^2} \right) + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \chi_r \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} \right) + \frac{\chi_\varepsilon}{r} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial \varepsilon^2} + \chi_z \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

В уравнениях (12)–(15) ν – кинематический коэффициент молекулярной вязкости; (K_r, K_ε, K_z) – коэффициенты турбулентной диффузии; ($\chi_r, \chi_\varepsilon, \chi_z$) – коэффициенты турбулентной диффузии поля плотности.

Уравнения (6)–(8), (10) трансформируются также к виду:

$$\frac{\partial \bar{V}_x}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial z^2} \right) + \\ + K_x(t) \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial x^2} + K_y(t) \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \bar{V}_x}{\partial z^2}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}_y}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial z^2} \right) + \\ & + K_x(t) \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial x^2} + K_y(t) \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \bar{V}_y}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \\ & - \frac{\bar{p}g}{\rho_0} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) + \\ & + K_x(t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + K_y(t) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \\ = \chi \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2} \right) + \\ + \chi_x(t) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x^2} + \chi_y(t) \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y^2} + \chi_z \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

В последней системе уравнений коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной диффузии плотности обозначены, как прежде, согласно выражениям (11).

1.2. Формулировка граничных условий

Сформулируем граничные для приведенных уравнений в цилиндрических и прямоугольных декартовых координатах:

1) на дне ($z = 0$) – равенство нулю всех компонент скорости и градиента отклонения плотности:

$$\begin{aligned} \bar{V}_x = 0, \bar{V}_y = 0, \bar{V}_r = 0, \bar{V}_\varepsilon = 0, \bar{V}_z = \bar{W} = 0, \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

2) на свободной поверхности – оценке искривления свободной поверхности посвящен шестой раздел. Это искривление пренебрежимо мало по сравнению с глубиной. Поэтому граничное условие на свободной поверхности можно сформулировать как условие при $z = h$.

а) отсутствие касательных напряжений – в цилиндрических координатах:

$$\rho_0 K_L(t) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \bar{V}_\varepsilon}{\partial z} \right) = 0, \quad (21)$$

$$\rho_0 K_L(t) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{V}_r}{\partial z} - \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial r} \right) = 0; \quad (22)$$

– в прямоугольных декартовых координатах:

$$\rho_0 K_L(t) \left(\frac{\partial \bar{V}_y}{\partial z} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\rho_0 K_L(t) \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial z} \right) = 0; \quad (24)$$

б) кинематическое условие непокидания жидкими частицами свободной поверхности:

– в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{V}_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r} \bar{V}_\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon} = \bar{V}_z; \quad (25)$$

– в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{V}_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \bar{V}_y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \bar{W}, \quad (26)$$

где ζ – отклонение свободной поверхности;

в) равенство нулю отклонений давления и плотности:

$$p|_{z=h} = 0, \quad \rho|_{z=h} = 0. \quad (27)$$

Следует отметить, что равенство нулю градиента отклонений плотности на дне очевидно для возмущений поля плотности, обусловленных полем солёности. Во всех известных автору источниках градиенты температурных возмущений также принимают равными нулю, что на самом деле лишь соответствует пренебрежимой малости последних.

Считаются также известными начальные распределения всех искомых функций.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Формулировка задачи в прямоугольных декартовых координатах

На основании вышеизложенных предположений о малости радиальной и вертикальной компонент скорости систему уравнений (16)–(19) можно

упростить до системы трех уравнений относительно возмущений давления, плотности и вертикальной компоненты завихренности. Для этого нужно представить

$$V_x = -\frac{y}{r} V_\varepsilon, \quad V_y = \frac{x}{r} V_\varepsilon, \quad W = 0.$$

Последние соотношения по форме напоминают вращательное движение абсолютно твердого тела. На самом деле это всего лишь формулы пересчета горизонтальных компонент скорости из цилиндрической системы $(V_r, V_\varepsilon, V_z)$ в декартовую прямоугольную (V_x, V_y, W) . Если все точки абсолютно твердого тела движутся при вращении относительно неподвижной оси с одинаковой угловой скоростью, то в случае данного вихря угловая скорость изменяется вместе с расстоянием до оси вращения. Более того, за счет диффузии область завихренности изменяется во времени (масштабы вихря растут), что никак не напоминает абсолютно твердое тело.

Подстановка приведенных соотношений в конвективные члены уравнения для плотности дает:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial y} &= V_x \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + V_y \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} = \\ &= V_\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial r} (-yx/r^2 + xy/r^2) = 0. \end{aligned}$$

Проведем аналогичную процедуру в уравнении для V_x . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial x} &= -y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) V_\varepsilon - \frac{y}{r} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x} = \\ &= \frac{yx}{r^3} V_\theta - \frac{xy}{r^2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) V_\varepsilon - \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} = \\ &= -\frac{x^2}{r^3} V_\varepsilon - \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r}, \end{aligned}$$

тогда конвективная часть этого уравнения будет

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{x}{r^2} V_\varepsilon^2.$$

По аналогии в уравнении для V_y имеем:

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial y} = -\frac{y}{r^2} V_\varepsilon^2.$$

Дифференцируя уравнение (16) по y , а уравнение (17) по x , с учетом приведенных преобразований получаем:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{r^2} V_\varepsilon^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{r^2} V_\varepsilon^2 \right) = 0.$$

Тогда система уравнений (16)–(19) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = K_L(t) \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) + K_z \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}, \quad (28)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\rho_o} g, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \chi_L(t) \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \chi_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}. \quad (30)$$

Уравнение (28) описывает турбулентную диффузию осесимметричного квазигоризонтального вихря, основной характеристикой которого является вращение жидких частиц с угловой скоростью $\omega_z(x, y, z, t)$ при указанном во введении ограничении на характер турбулентности. Как видно из уравнения (28), вихрь вырождается под действием турбулентных горизонтальной (K_L) и вертикальной (K_z) диффузий.

Зная распределение вертикальной компоненты завихренности, всегда можно найти вид азимутальной скорости. В свою очередь, по заданой азимутальной скорости определяются поля возмущений давления и плотности.

Сформулируем граничные условия для функции вертикальной компоненты завихренности. Граничное условие (20) трансформируется в

$$\omega_z|_{z=0} = 0. \quad (31)$$

В силу малости вертикальной компоненты скорости и пространственной анизотропии (горизонтальный масштаб во много раз больше вертикального) уравнения (23)–(24) для данной задачи можно с большой точностью заменить на приближенное равенство нулю вертикального градиента горизонтальных компонент скорости:

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_y}{\partial z} = 0, \quad (32)$$

из которого легко получается соответствующее условие для завихренности:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0. \quad (33)$$

Для замыкания постановки математической задачи необходимо задать начальное распределение

ω_z в вихре, которое должно удовлетворять обоим граничным условиям (31) и (33). Кроме того, азимутальная скорость должна удовлетворять условию

$$V_\varepsilon(r=0) = 0.$$

Поскольку работа посвящена изолированному вихрю, распределение всех характеристик должно экспоненциально убывать с ростом расстояния от центра. В известной книге Сэффмэна такие вихри называются компактными [18], так как движение в них фактически сосредоточено в ограниченном пространстве первых 3–4 характерных масштабов вихря. В то же время, решение задачи диффузии с постоянным коэффициентом однозначно показывает, что при координате r должна стоять степень, равная 2, и это ограничивает класс функций для задания начального радиального распределения завихренности.

Нетрудно проверить, что следующее начальное распределение удовлетворяет всем требованиям и имеет для $z_0 - a_2 \leq z \leq z_0 + a_1$ вид

$$\begin{aligned} \omega_z|_{t=0} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{V_o}{L_o} \left(1 - \alpha^2 \frac{x^2 + y^2}{L^2} \right) \exp \left(-\alpha^2 \frac{x^2 + y^2}{L^2} \right) \times \\ &\times \left(\frac{a_1 + a_2}{2} \right)^{-4} (z - (z_o + a_1))^2 (z - (z_o - a_2))^2. \quad (34) \end{aligned}$$

Здесь $a_1 + a_2$ – начальная толщина вихря; α – произвольная константа; V_o, L_o – начальная амплитуда скорости и горизонтальный масштаб вихря соответственно; z_0 – горизонт расположения вихря.

Важно отметить, что в соотношении (34) не случайно коэффициенты при $x^2 + y^2$ как в скобках, так и в экспоненте совпадают. Их равенство влечет за собой выражение для скорости с неустраиваемой особенностью в нуле. Радиальное распределение в последнем соотношении при $\alpha = 1$ соответствует виду автомодельного решения задачи о молекулярной диффузии [19].

2.2. Решение задачи в прямоугольных декартовых координатах

Для решения уравнения (28) удобно сначала разделить вертикальную координату. Искомое решение представим в виде

$$\omega_z = \Omega(x, y, t) Z(z) \quad (35)$$

и, подставив его в выражение (10), получим:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} Z(z) - K_L(t) \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) Z(z) - K_z \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} \Omega = 0.$$

Согласно методу разделения переменных

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} - K_L(t) \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) \right) \Omega^{-1} = K_z \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} Z(z)^{-1} = -m^2,$$

где m – произвольная постоянная.

По координате z получаем следующую краевую задачу:

$$K_z \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -m^2 Z(z);$$

$$Z(0) = 0; \frac{dZ(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0,$$

решением которой будет полная система собственных функций:

$$Z_{n_3}(z) = \sin \lambda(n_3)z,$$

где $\lambda(n_3) = \pi(2n_3 + 1)/2h$.

Откуда находим

$$m^2 = K_z \lambda^2(n_3).$$

Подставляя m^2 в уравнение для Ω , имеем:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = K_L(t) \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) - K_z \lambda^2(n_3) \Omega. \quad (36)$$

Если бы $K_L(t)$ определялся явной функцией времени, можно было бы искать аналитическое решение, но $K_L(t)$ определяется на каждом шаге по времени численно. Быстрое затухание завихренности с расстоянием от оси вращения позволяет за критерий выбора горизонтального масштаба вихря использовать уменьшение амплитуды в N раз. Так, в работе [20] используется $N = 10$. Сравнение с автомодельным решением (см. 4 раздел) указывает, что за масштаб вихря можно приближенно выбирать область, где значения завихренности больше 1/50 от своего максимума.

Бесконечную область можно всегда заменить на конечную $(x, y) \in [-l; l] \times [-l; l]$, учитывая при этом любую наперед заданную (требуемую) точность решения через двумерный ряд Фурье:

$$\Omega = \sum_{n_1, n_2} T(n_1, n_2, n_3, t) \exp \left[i\pi \left(\frac{n_1 x}{l} + \frac{n_2 y}{l} \right) \right].$$

Подстановка Ω в уравнение (36) дает:

$$\frac{dT}{dt} = - \left[\frac{\pi^2}{l^2} K_L(t) (n_1^2 + n_2^2) + K_z \lambda^2(n_3) \right] T.$$

Представим

$$T(n_1, n_2, n_3, t) = T_h(n_1, n_2, t) \exp(-K_z \lambda^2(n_3) t), \quad (37)$$

тогда получим следующее уравнение для $T_h(n_1, n_2, t)$:

$$\frac{dT_h}{dt} = - \frac{\pi^2}{l^2} K_L(t) (n_1^2 + n_2^2) T_h.$$

Решение этого уравнения есть

$$\frac{T_h(n_1, n_2, t)}{T_o(n_1, n_2)} = \exp \left[- \frac{\pi^2}{l^2} (n_1^2 + n_2^2) \int_0^t K_L(\tau) d\tau \right].$$

Общее решение в произвольный момент времени будет:

$$\omega_z = \sum_{n_3} C(n_3) \sin[\lambda(n_3)z] \Omega(n_3),$$

или, подставляя соотношение для $\Omega(n_3)$, получаем:

$$\omega_z = \sum_{n_3} \sum_{n_1, n_2} T_o(n_1, n_2) \exp \left[i\pi \left(\frac{n_1 x}{l} + \frac{n_2 y}{l} \right) \right] \times \exp \left[- \int_0^t \frac{\pi^2}{l^2} (n_1^2 + n_2^2) K_L(\tau) d\tau \right] \times \exp[-\lambda^2(n_3) K_z t] C(n_3) \times \sin[\lambda(n_3)z].$$

Вынеся за знак двукратной суммы все множители, не зависящие от чисел (n_1, n_2) , окончательно получаем:

$$\omega_z = \sum_{n_1, n_2} T_h(n_1, n_2, 0) \exp \left[i\pi \left(\frac{n_1 x}{l} + \frac{n_2 y}{l} \right) \right] \times \exp \left[- \frac{\pi^2}{l^2} (n_1^2 + n_2^2) \int_0^t K_L(\tau) d\tau \right] \times \quad (38)$$

$$\times \sum_{n_3} C(n_3) \exp[-\lambda^2(n_3) K_z t] \sin[\lambda(n_3) z],$$

где $C(n_3)$ определяются из начального распределения (34).

Решение (38) показывает, что процессы диффузии в вертикальном и горизонтальном направлениях происходят в рамках линейной модели независимо. Откуда следует, что при разделении переменных решение можно представить в виде произведения двух решений, соответствующих горизонтальной и вертикальной диффузиям вихря.

2.3. Решение в цилиндрической системе координат

Уравнение (28) в цилиндрической системе координат примет вид

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} = K_L(t) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_z) + K_z \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}. \quad (39)$$

По координате z используются граничные условия (31), (33). По радиальной координате ω_z должна удовлетворять следующим двум условиям:

$$\omega_z(r=0) = \text{const}, \quad \omega_z(r=\infty) = 0. \quad (40)$$

Начальное распределение

$$\omega_z(t=0) = \omega_z^0(r, z)$$

считается известным.

Как и ранее, процессы диффузии в радиальном и вертикальном направлениях разделяются и задача сводится к решению уравнения вида

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} + \alpha^2 G = 0 \quad (41)$$

с граничными условиями

$$G(0) = \text{const}, \quad G(\infty) = 0.$$

Решение (41) можно также найти в виде степенного ряда, причем для коэффициентов g_k этого ряда получается следующее рекуррентное соотношение

$$g_k = -\frac{\alpha^2 g_{k-2}}{k^2}, \quad k = 2, 4, \dots \quad (42)$$

При этом $g_0 = G(0)$.

В то же время, решением уравнения (41) есть функции Бесселя. С учетом выполнения граничного условия на бесконечности это решение имеет вид

$$G(r) = J_0(|\alpha|r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\alpha r}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}.$$

Покажем, что полученный ряд и решение в виде функции Бесселя первого рода нулевого индекса совпадают.

Действительно,

$$J_0(|\alpha|r) = 1 - \frac{\alpha^2 r^2}{4} + \frac{\alpha^4 r^4}{64} - \frac{\alpha^6 r^6}{64 \cdot 6^2} + \dots$$

Такой же ряд получается согласно выражению (42).

Общее решение уравнения (39) можно представить в виде

$$\omega_z(r, z, t) = F_r(r, t) F_z(z, t),$$

где

$$F_r(r, t) = \int_0^{\infty} A(\alpha) J_0(\alpha r) \times \\ \times \exp\left[-\int_0^t (K_L(\tau)) d\tau \alpha^2\right] d\alpha;$$

$F_z(z, t)$ совпадает с соответствующей частью решения в декартовых координатах.

Коэффициенты $A(\alpha)$ определяются из начального условия

$$\int_0^{\infty} A(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha = F_r(r, 0).$$

Для используемого в данной работе начального распределения (34), а также забегая наперед (см. раздел 4), в случае $K_L(t) = K_L(0)t^2$ решение $F_r(r, t)$ получается в явном виде:

$$F_r(r, t) = \frac{T_0}{3} \int_0^{\infty} \{J_0(r\sqrt{\xi}) \exp\left(-\frac{K_L(0)t^3}{3}\xi\right) \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(1; 1; -\frac{\xi}{3}\right) - {}_1F_1\left(1; 2; -\frac{\xi}{3}\right) \right] \} d\xi.$$

Полученное решение – довольно непростое и поэтому в прикладных задачах удобнее использовать решение в декартовой системе.

3. АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Для получения автомодельного решения рассмотрим для каждой отдельной вертикальной моды n_3 уравнение (36) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \Omega_{n_3}}{\partial t} = \frac{K(t)}{Re_o} \left(\frac{\partial^2 \Omega_{n_3}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{n_3}}{\partial y^2} \right) - \frac{\epsilon \lambda^2 (n_3)}{Re_o} \Omega_{n_3}. \quad (43)$$

Здесь $\epsilon = K_z K_o^{-1} \delta^{-2}$; $\delta = l_v l_h^{-1}$, l_v и l_h – соответственно вертикальный и горизонтальный масштабы вихря; $Re_o = K_0 (V_0 R_0)^{-1} = \text{const}$; $R_0^{1/3} V_0^{-1}$ – число Рейнольдса в начальный момент; $K_L(t) = Re_o t^\gamma$. В последних соотношениях R_0, K_0 – начальный радиус вихря и соответствующее ему значение коэффициента турбулентной диффузии.

Подстановка

$$\Omega_{n_3} = \hat{\Omega} \exp \left(\frac{-\epsilon \lambda^2 (n_3)}{Re_o} t \right),$$

подобная (37), преобразует уравнение (43) в уравнение, которое в полярных координатах имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{K_L(t)}{Re_o} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \omega}{\partial r}.$$

Автомодельное решение этого уравнения ищется в виде

$$\omega = t^a \hat{\Omega}(\eta),$$

где $\eta = t^b r$ – автомодельная переменная.

Для определения a, b и γ необходимы три условия:

1. Условие автомодельности, которое в данной задаче эквивалентно равенству нулю степени при переменной t , что и позволяет преобразовать уравнение в частных производных от двух переменных (t, r) к автомодельному дифференциальному уравнению от одной независимой (автомодельной) переменной.

2. Закон сохранения одного из моментов завихренности:

$$\int_0^\infty \omega r^n dr = \text{const}.$$

3. Закон зависимости коэффициента горизонтальной диффузии

$$K_L(t) = \text{const} (r_o(t))^{4/3},$$

где $r_o(t)$ – радиус ядра вихря, характеризующийся завихренностью одного знака. Индекс ноль соответствует нулю функции ω .

Из перечисленных трех условий находим, что $b = -1.5$; $a = b(n + 1)$; $\gamma = 2$. То, что коэффициент диффузии растет пропорционально квадрату времени ($\gamma = 2$), подтверждает правильность полученного решения, так как закон Ричардсона “четырех третей” соответствует инерционному режиму турбулентности, характеризующемуся квадратичной зависимостью [2], что, забегая наперед, подтверждают результаты численного моделирования (представленные на рис. 4). Исходное уравнение сводится к следующему:

$$\frac{d^2 \hat{\Omega}}{d\eta^2} + \left(\frac{1}{\eta} + \frac{3}{2} \eta \right) \frac{d\hat{\Omega}}{d\eta} + \frac{3(n+1)}{2} \hat{\Omega} = 0. \quad (44)$$

Общее решение (44) имеет вид:

$$\hat{\Omega} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} A_k \eta^{k-1}, \quad (45)$$

где

$$A_{k+2} = -\frac{3(k+n)}{2(k+1)^2} A_k, \quad k = 1, 3, \dots$$

В момент безразмерного времени $t = 1$ различие между безразмерной радиальной координатой r и автомодельной переменной $\eta = t^b r$ исчезает. Как показал численный эксперимент, именно к этому моменту времени начальное распределение в виде

$$\omega_z = (1 - \alpha^2 r^2) \exp(-\alpha^2 r^2) \quad (46)$$

для различных α ($\alpha = \sqrt{3}/2; 1; 1, 2$) ложится на одну кривую. Начальное радиальное распределение скорости имеет соответственно вид

$$V_\theta = 2\alpha^2 r \exp(-\alpha^2 r^2). \quad (47)$$

Выражения (46) и (47) физичны. Легко проверить, что третий момент завихренности не равен нулю, а также, что

$$\hat{\Omega} = \left(1 - \frac{3}{4} \eta^2 \right) \exp \left(-\frac{3}{4} \eta^2 \right) \quad (48)$$

есть решение уравнения (44) для значения $n = 3$.

На рис. 2 показано, что ряд (45) действительно сходится к автомодельному решению (48). Так,

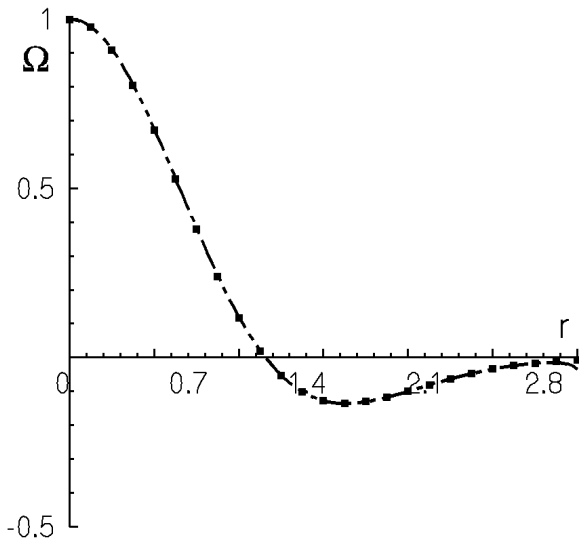


Рис. 2. Зависимость радиального распределения завихренности: маркеры соответствуют выражению (36); линия – приближение автомодельного решения, полученное из условия (33) с удержанием двух десятков членов этого ряда

при удержании первых двух десятков членов ряда последний сходится к аналитическому решению практически по всему масштабу вихря. Различие начинается при $\eta > 2.8 - 2.9$. Кривая начинает отклоняться вниз от оси абсцисс, в то время как маркеры сливаются с ней. Чем больше значение автомодельной координаты, тем больше членов ряда (45) нужно удерживать для сходимости его к (48).

Исходя из вышеизложенного, автомодельное решение имеет следующий вид:

$$\hat{\Omega}(r, t) = \omega_o t^{-6} \left(1 - \frac{3r^2}{4t^6} \right) \exp \left(-\frac{3r^2}{4t^6} \right), \quad (49)$$

а полное автомодельно-аналитическое решение трехмерной задачи соответственно будет

$$\hat{\omega}(r, z, t) = \omega_o t^{-6} \left(1 - \frac{3r^2}{4t^6} \right) \exp \left(-\frac{3r^2}{4t^6} \right) \times \\ \times \sum_{n_3} C(n_3) \exp \left[-\lambda^2(n_3) \frac{\epsilon}{Re_o} t \right] \sin [\lambda(n_3)z].$$

Сравним полученное автомодельное решение $\hat{\Omega}(r, t)$ с его аналогом ω_c для случая постоянного коэффициента горизонтальной диффузии ν . Этот аналог, как известно [21], имеет вид:

$$\omega_c(r, t) = \frac{\Gamma}{8\pi\nu t} \exp \left(-\frac{r^2}{4\nu t} \right), \quad (50)$$

где Γ – циркуляция в начальный момент.

Из сравнения соотношений (50) и (49) видно, что полученное решение гораздо быстрее убывает во времени (t^{-6}), чем в случае постоянной диффузии (t^{-1}). Этот результат довольно неожиданный: скорость затухания амплитуды завихренности очень велика. Сравнение с результатами численных расчетов ниже подтвердит это. Из уравнений (29) и уравнения циклострофического баланса можно получить характер зависимости во времени для поля возмущений плотности. Скорость вырождения последних $\sim t^{-3}$, что согласуется с работой [2], где получены автомодельные зависимости для задачи о мгновенном источнике примеси.

Для полноты изложения следует отметить, что автомодельное решение можно также найти и для окружной компоненты скорости. Однако оно также нефизично. По той же самой причине, что и раньше – на оси вихря получается конечная скорость.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Важно отметить, что начальное вертикальное распределение завихренности (34) позволяет моделировать вихрь на произвольном горизонте и любой толщины, вплоть до толщины слоя жидкости (см. кривые I, рис. 3). С течением времени в движение вовлекается вся водная толща (кривые II, рис. 3). Первая мода (соответствующая $n_3 = 0$) задает развитое вихревое движение, когда максимум находится на поверхности.

Важными моментами для результатов численного моделирования являются оправдание использования в модели переменного во времени коэффициента диффузии и проверка закона затухания t^{-6} автомодельного решения.

На рис. 4 представлен рост во времени коэффициента горизонтальной диффузии, соответствующий следующим начальным данным: глубина – 50 м, характерный масштаб вихря – 100 м, толщина вихря – 10 м. Прямая линия в приведенной системе координат подтверждает квадратичный характер роста:

$$K_L(t) = K_L(0)(1+t)^2, \quad (51)$$

и указывает на необходимость использования переменного коэффициента диффузии. Подставив последнее выражение в формулу (38), получим аналитическое решение

$$\omega_z = \sum_{n_1, n_2} T_h(n_1, n_2, 0) \exp \left[i\pi \left(\frac{n_1 x}{l} + \frac{n_2 y}{l} \right) \right] \times$$

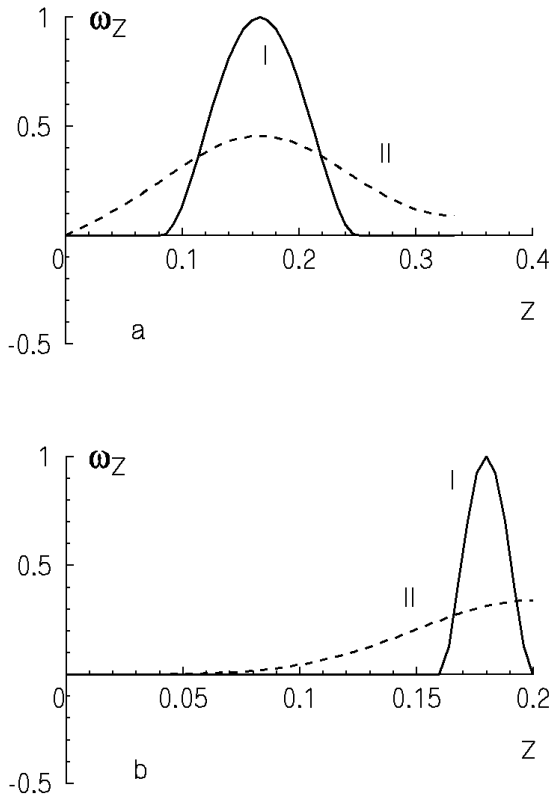


Рис. 3. Эволюция во времени вертикального распределения ω_z :
 а – начальный вихрь в два раза тоньше слоя и находится посередине слоя; б – пример приповерхностного вихря с начальной толщиной, в пять раз меньшей толщины слоя жидкости

$$\times \exp \left[-\frac{\pi^2}{l^2} (n_1^2 + n_2^2) K_L(0) \left(t + t^2 + \frac{t^3}{3} \right) \right] \times \sum_{n_3} C(n_3) \exp [-\lambda^2 (n_3) K_z t] \sin [\lambda (n_3) z].$$

Было проведено сравнение с автомодельным решением. Расчетная область менялась по каждой из горизонтальных координат трижды: $[-20; 20]$, $[-40; 40]$, $[-80; 80]$. При этом вихрь в начальный момент сосредоточен в области $[-3; 3]$ по каждой из координат (x, y) . Количество членов ряда также увеличивалось. Оно задавалось соответственно равными 32, 64, 128. Указанные размеры расчетной области и количества членов ряда выбирались максимальными в том смысле, что их дальнейшее увеличение уже не влияло на результаты. Важным моментом является правильность задания радиуса вихря для вычисления коэффициента диффузии. Результаты численных расчетов изменения во времени амплитуды завихренности

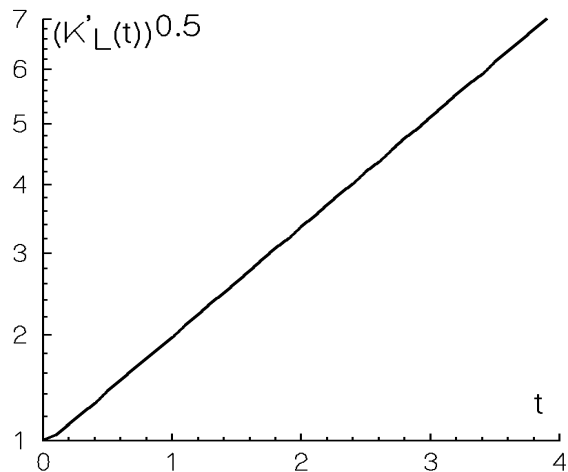


Рис. 4. Полученная в ходе численного эксперимента зависимость от безразмерного времени t квадратного корня отношения коэффициента горизонтальной диффузии к своему начальному значению (51)

сти и сравнение их с автомодельным решением показали, что за критерий величины радиуса вихря можно выбирать падение амплитуды в 50 раз. Как видно из рис. 2, это соответствует полному радиусу (естественно, приближенно) вихря. Показатель степени приблизительно равен -5.5 . Это неплохо согласуется с законом t^{-6} .

Возникает вопрос, как долго длится процесс турбулентной диффузии, если за безразмерное время, равное 1, возмущения в вихре успевают затухнуть во много раз. Для оценки времени жизни вихря t нужно воспользоваться следующей формулой:

$$t = \frac{2\pi R_0}{V_0} \int_0^{t'} \frac{R_*(\tau)}{V_*(\tau)} d\tau,$$

Здесь $V_0, R_0, V_*(\tau), R_*(\tau)$ – максимальные значения скорости и радиуса в начальный и в произвольный моменты времени τ соответственно. Оценка показала, что время жизни вихря при $t' = 1$ соответствует $16\pi R_0/V_0$ секунд. Для характерных масштабов $V_0 = 1$ м/с; $R_0 = 100$ м получаем 1600π секунд или около 84 минут.

Следовательно, время жизни исследуемых в данной работе масштабов вихрей в реальном океане исчисляется десятками (и может первыми сотнями) минут и совпадает с известными оценками для времени жизни мелкомасштабных неоднородностей [11].

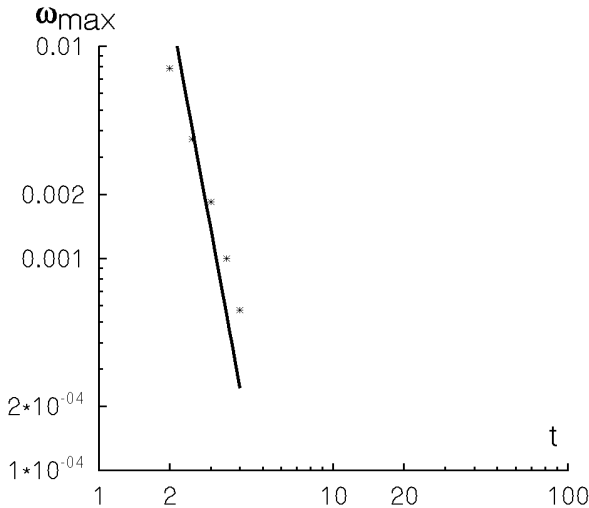


Рис. 5. Зависимость амплитуды завихренности от времени: сплошная линия соответствует автомодельному закону t^{-6} , маркеры – численной модели

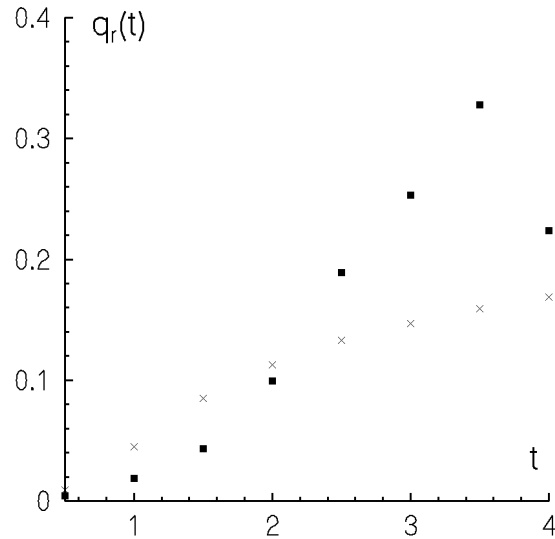


Рис. 6. Эволюция $q_r(t)$ придонного вихря при $Fr=1$. Квадратные маркеры соответствуют $\delta = 0.1$, крестики – $\delta = 0.02$

5. ОЦЕНКА ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Если вихрь достигает дна, нарушается циклострофический баланс. В результате появляется движение в радиальном и, следовательно, в вертикальном направлениях.

Для количественной характеристики радиального и вертикального течений удобно ввести в рассмотрение два безразмерных параметра [22]:

$$q_r(t) = \frac{E_{k,r}(t)}{E_{k,\theta}(t)} \quad \text{и} \quad q_z(t) = \frac{E_{k,z}(t)}{E_{k,\theta}(t)},$$

где $q_r(t)$, $q_z(t)$ – отношение кинетической энергии радиальной и вертикальной компонент скорости соответственно к ее аналогу для окружной компоненты.

Численно решены нелинейные уравнения (16)–(19). В начальный момент вихрь задавался из решения линейной задачи. Рассмотрен следующий типичный случай: $l_v = 10$ м, $R = l_h = 100$ м, $H = 20$ м, $z_0 = 5$ м, $N=0.01$ с⁻¹, $Fr_0 = V_0/(Nl_v) = 1$, $Re_0 = 2000$, $\delta = 0.1$.

Как видно из рис. 6, за безразмерное время, равное двум, относительная энергия вторичного (радиального) течения возрастает до 10%. В дальнейшем этот рост продолжается, но сами амплитуды скорости значительно (в несколько раз) падают. После $t = 3.5$ даже относительная величина q_r также убывает.

Для выяснения роли стратификации был рас-

смотрен случай, когда силы плавучести в 4 раза превышали инерционные: $Fr = 0.25$. Кроме того, вихрь задавался относительно тоньше – $l_v = 20$ м, $R = 500$ м. Максимальное значение q_r достигло 0.012, то есть немногим более 1%.

Поскольку в предыдущем случае изменены сразу два безразмерных параметра (δ и Fr), для выяснения роли каждого из них был рассмотрен еще один случай. Вновь влияние стратификации было ослаблено в 4 раза ($Fr = 1$), а вихрь задавался еще более тонким ($\delta = 1/50$). Маркеры в виде крестиков на рис. 6 указывают на то, что даже при достаточно сильно сплюснутых вихрях при условии равенства порядков сил инерции и плавучести $Fr = 1$ энергия вторичных течений может достигать 15%, что на порядок больше, чем в случае, когда сила плавучести доминирует над силой инерции $Fr = 0.25$.

Следовательно, линейная модель справедлива для всех случаев, когда сила плавучести значительно превышает силу инерции. Кроме того, роль вторичных течений ослабевает с уменьшением относительной толщины вихря, что согласуется с работой [22].

6. ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ ИСКРИВЛЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Хорошо известно, что свободная поверхность

вращающейся жидкости деформируется (искривляется). Обозначим отклонение свободной поверхности

$$H = H(r, t).$$

Для оценки величины искривления используется уравнение гидростатического баланса (8) вместе с уравнением циклострофического баланса, которое в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеет вид

$$-\frac{V_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (52)$$

Полагая $z = h$ в выражении для V_θ , из уравнений балансов получаем необходимое соотношение

$$\frac{V_\theta^2(r, h, t)}{gr} = \frac{\partial h(r, t)}{\partial r}, \quad (53)$$

интегрируя которое, находим

$$H(r, t) = \frac{1}{g} \int_0^r \frac{V_\theta^2(\xi, h, t)}{\xi} d\xi + \phi(t). \quad (54)$$

Для оценки сверху $H(r, t)$ в выражении (54) следует заменить $V_\theta^2(\xi, h, t)$ на максимальное значение V_θ , равное в начальный момент [22]:

$$V_\theta = \frac{V_0^2 r}{r_0^2} \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad (55)$$

где r_0, V_0 – начальные масштаб вихря и амплитуда скорости соответственно.

Подставляя выражение (55) в (54), получаем:

$$H_{max}(r) = \frac{V_0^2}{g} \left(1 - \exp\left(-\frac{r^2}{r_0^2}\right)\right) + H(r=0). \quad (56)$$

Отклонение свободной поверхности будет

$$H(r=\infty) - H(r=0) = \frac{V_0^2}{g}.$$

В работах [23]- [24] получена оценка для величины искривления свободной поверхности на основе интеграла Бернулли в виде $H = V^2/2g$. Как видно, эта оценка не противоречит полученной выше, а более того, она уменьшает еще в два раза величину искривления свободной поверхности.

Поскольку скорости наблюдающихся на поверхности океана течений имеют порядок 1–2 м/с, то для среднего значения 1.5 м/с получим $H = 10$ см, что есть пренебрежимо малая величина по сравнению с типичными вертикальными масштабами (10 м и более).

ВЫВОДЫ

1. Поставлена и решена задача о диффузии изолированного вихря. По вертикальной координате задано начальное распределение, которое точно удовлетворяет нулевым граничным условиям как на свободной поверхности, так и на дне водоема.

2. Получено автомодельное решение, соответствующее условию сохранения третьего момента для заданного радиального распределения завихренности.

3. Результаты численного моделирования указывают на необходимость использования переменного коэффициента турбулентной диффузии, а также на хорошее согласование с законом t^{-6} автомодельного решения для скорости затухания амплитуды завихренности.

4. На основе численного решения полной (нелинейной) задачи показано, что вторичные течения существенны лишь в тех случаях, когда вихрь находится в непосредственной близости от дна и лишь при силе плавучести одного порядка или меньше силы инерции ($Fr \approx 1$ или $Fr > 1$).

Выражаю признательность докт. физ.-мат. наук В.С. Мадеричу за ряд консультаций по поводу статьи, а также особо благодарю его за предложение найти автомодельное решение.

Благодарю академика В.Т. Гринченко за ряд критических замечаний по стилю изложения.

1. Монин А.С., Озмидов Р.В. Океанская турбулентность.– Л.: Гидрометеоздат, 1981.– 320 с.
2. Монин А.С. О взаимодействии между вертикальной и горизонтальной диффузией примесей в море // Океанология.– 1969.– т.9, N1.– С. 76-81.
3. Окубо А., Озмидов Р.В. Эмпирическая зависимость коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии в океане от масштаба явления // ФАО.– 1970.– т. VI N5.– С. 534-536.
4. Carton X.J., McWilliams Baroclinic and barotropic instabilities of axisymmetric vortices in a quasi-geostrophic model. 1989. Mesoscale//Synoptic Coherent Structures in Geophysical Turbulence. J.C.J. Nihoul and B.M. Jamart (Eds.), Elsevier. - 1989.- P. 225-244.
5. Beckers M. Dynamics of Vortices in a Stratified Fluid. Ph.Dr. thesis.– Eindhoven, The Netherlands: Eindhoven University of Technology, 1999.– 145 p.
6. Beckers M., Verzicco R., Clercx H.J.H. and Heijst G.J.F. van. Dynamics of pancake-like vortices in a stratified fluid: experiments, model and numerical simulations // J.Fluid Mech.– 2001.– V. 433.– P. 1-27.
7. Pearson H.J., Linden P.F. The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid // J.Fluid Mech.– 1983.– V. 134.– P. 195-203.

8. Flor J.B., Heijst G.J.F. van, Delfos R. Decay of dipolar vortex structures in stably stratified fluid // *Phys. Fluids*.– 1995.– 7, N 2.– P. 374-383.
9. Flor J.B., Heijst G.J.F. van Stable and unstable monopolar vortices in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.*– 1996.– V. 311.– P. 257-287.
10. Trieling R.R., Heijst G.J.F. van Decay of monopolar vortices in a stratified fluid // *Fluid Dynamics Research*.– 1998.– 23.– P. 27-43.
11. Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С. Синоптические вихри в океане.– Л.: Гидрометеоиздат, 1987.– 512 с.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1989.– 840 с.
13. *Динамика океана* /Под ред. Ю.П. Доронина.– Л.: Гидрометеоиздат, 1980.– 304 с.
14. Озмидов Р.В. Диффузия примесей в океане.– Л.: Гидрометеоиздат, 1986.– 280 с.
15. *Физика океана*. / Под ред. Ю.П. Доронина. Л.: Гидрометеоиздат, 1978.– 296 с.
16. Кушнир В.М., Федоров С.В. Диффузия вещества с нейтральной плавучестью из подводного трубопровода при воздействии квазистационарных и волновых течений // *Прикл. гидр.*– 2005.– Т. 79, N1.– С. 43-49.
17. Стеценко А.Г., Лукьянов П.В. Динамика вихревых структур в стратифицированной среде.– Киев: ИГМ НАНУ, 2003.– 125 с.
18. Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей.– М.: Научный мир, 2000.– 375 с.
19. Satijn M.P., Buren M.G. van, Clercx H.J.H., and Heijst G.J.F. van Vortex models based on similarity solutions of the two-dimensional diffusion equation // *Phys. Fluids*.– 2004.– V. 16, N 11.– P. 3997-4011.
20. Голивец С.В., Кошляков М.Н. Циклонические вихри субантарктического фронта и образование антарктической промежуточной воды // *Океанология*.– 2003.– Т. 43, N3.– С. 325-338.
21. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике.– М.: Наука, 1987.– 430 с.
22. Satijn M.P., Cense A. W., Verzicco R., Clercx H.J.H., Heijst G.J.F. van Three-dimensional structure and decay properties of vortices in shallow fluid layers // *Phys. Fluids*.– 2001.– V. 13, N 7.– P. 1932-1945.
23. L.R.M. Maas. Nonlinear and free-surface effects on the spin-down of barotropic axisymmetric vortices // *J. Fluid Mech.*– 1993.– V.246.– P. 117-141.
24. O'Donnell L., Linden P.F. Free-surface effects on the spin-up of fluid in rotating cylinder // *J. Fluid Mech.*– 1991.– V.232.– P. 439-453.