

УДК 629.12:12.001

О СТРУКТУРЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В УСТАНОВКЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ БРИДЖМЕНА ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ГРАССГОФА

Ю. П. ЛАДИКОВ, П. П. РАБОЧИЙ, О. К. ЧЕРЕМНЫХ

*Институт космических исследований НАНУ-НКАУ**Получено 03.11.2004 ◊ Пересмотрено 11.10.2005*

Метод Бриджмена является одним из основных методов получения кристаллических материалов. Конструкционные особенности установок кристаллизации Бриджмена таковы, что во время роста кристалла в жидкой фазе вещества (расплаве) возникает конвективное движение. Поскольку скорость выращивания кристаллов, как правило, мала ($\sim 10^{-6}$ м/с), то даже слабые конвективные течения существенно влияют на диффузионные и тепловые условия на фронте кристаллизации. Такое влияние, в свою очередь, изменяет картину процессов теплопереноса и приводит к неконтролируемому искажению структуры кристалла. В связи с этим актуальными являются задачи, направленные на определение параметров процесса кристаллизации, при которых воздействие конвекции на фронт кристаллизации минимально. В данной работе на основе системы уравнений Буссинеска исследуется процесс стационарного конвективного теплопереноса в расплаве. Аналитически, а также с помощью численного моделирования, показано, что при достаточно больших числах Грассгофа можно соответствующим подбором граничных условий для температуры создать вблизи фронта кристаллизации зону равновесного расплава, в которой конвективное движение отсутствует.

Метод Бриджмена є одним з основних методів отримання кристалічних матеріалів. Конструкційні особливості установок кристалізації Бриджмена є такими, що під час росту кристалла в рідкій фазі речовини (розплаві) виникає конвекційний рух. Оскільки швидкість вирощування кристалів, як правило, є малою ($\sim 10^{-6}$ м/с), то навіть слабкі конвекційні течії значно впливають на дифузійні та теплові умови на фронті кристалізації. Такий вплив, в свою чергу, змінює картину теплопереносу та призводить до неконтрольованого спотворення структури кристалу. Тому актуальними є задачі визначення параметрів процесу кристалізації, при яких вплив конвекції на фронт кристалізації мінімальний. У даній роботі на основі системи рівнянь Буссінеска досліджується процес стаціонарного конвекційного теплопереносу у розплаві. Аналітично, а також за допомогою чисельного моделювання, показано, що при достатньо великих числах Грассгофа можна відповідним підбором граничних умов для температури створити поблизу фронту кристалізації рівноважну зону, конвекційний рух у якій відсутній.

Bridgman method is among the main methods of crystal materials obtaining. Construction features of the Bridgman plant are for convection motion to appear in liquid phase of the substance (in melt) during the crystal growth. Since usually solidification velocity is small ($\sim 10^{-6}$ m/s), even slow convection flows influence on diffusion and heat conditions on the solid-melt interface. Such an influence effects on heat-mass transfer situation and gives rise to the uncontrolled crystal structure distortion. That is why solidification process parameters for convection influence on solid-melt interface to be the least determination problems are relevant. In this paper stationary convection heat-transfer process in melt is under investigation with Boussinesq equations set. Analytically and with numerical modeling it has been shown, that equilibrium melt region for convection motion to be absent can be created near solid-melt interface by appropriate choice of temperature boundary condition, if Grasshoff numbers are large enough.

ВВЕДЕНИЕ

Метод Бриджмена широко применяется как для получения кристаллических материалов, так и для проведения экспериментов по изучению процессов затвердевания вещества [1]. При использовании этого метода выращивание кристаллов осуществляется путем направленной кристаллизации расплава. При этом, как показывают многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, в процессе затвердевания в расплаве образуются конвективные течения, оказывающие существенное влияние на диффузионные и тепловые условия на фронте кристаллизации, что приводит к возникновению макронеоднородностей в структуре кристалла, т. е. к ухудшению качества последнего. В связи с этим представляют интерес

задачи, направленные на изучение возможностей, позволяющих ослабить воздействие конвективного движения расплава на фронт кристаллизации.

Известно, что при развитии конвективного течения в закрытой прямоугольной полости, подогреваемой сбоку, увеличение числа Грассгофа приводит к возникновению вблизи границ полости пограничных слоев [2,7]. При этом внутри полости образуется зона равновесной жидкости (так называемое изогradientное ядро), в которой конвективное движение отсутствует. Задача о конвективном теплопереносе в расплаве также может рассматриваться как задача о развитии свободной конвекции в замкнутой подогреваемой сбоку полости [2,3]. Поэтому указанный эффект образования пограничных слоев при увеличении числа Грассгофа может быть использован для создания зоны равновесной жидкости вблизи фронта кри-

сталлизации. В данной работе такая возможность исследуется с учетом конструктивных особенностей установки Бриджмена.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис. 1 схематически изображена установка кристаллизации по методу Бриджмена [1]. Она состоит из двух цилиндрических термостатов, температура одного из которых ниже (холодильник), а другого - выше (нагреватель) температуры плавления T_c . Внутри термостатов находится цилиндрическая ампула, заполненная веществом. Благодаря соответствующему выбору температур термостатов фронт кристаллизации располагается в зазоре между холодильником и нагревателем. В результате часть вещества выше фронта кристаллизации находится в жидком состоянии, т. е. в состоянии расплава. Процесс выращивания кристалла осуществляется за счет одновременного перемещения обоих термостатов вверх. При этом скорость их движения равна скорости движения фронта кристаллизации. Как правило, эта скорость мала ($V \sim 10^{-6}$ м/с), поэтому всюду далее фронт кристаллизации будем считать неподвижным. Во время процесса кристаллизации справедливы следующие условия. Расплавленное вещество заполняет ампулу от верхнего торца до фронта кристаллизации (см. рис. 1), температура на котором постоянна и равна температуре плавления, и который будем считать плоским на протяжении всего времени кристаллизации. Расплав полностью смачивает стенки ампулы. Температуру на верхнем торце ампулы можно считать постоянной и равной некоторой температуре T_0 . При сделанных предположениях стационарный конвективный теплоперенос внутри полости будет описываться системой уравнений Буссинеска:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \vec{v} + g\beta T \vec{\gamma}, \quad (1)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla T = a\Delta T, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (3)$$

где \vec{v} – гидродинамическая скорость элемента объема расплава; g – ускорение свободного падения; $\vec{\gamma} = -\vec{g}/g$; ρ_0 – плотность расплава, соответствующая некоторому среднему значению \bar{T} ; T – отклонение температуры расплава от величины \bar{T} ; p – отклонение давления от величины p_0 ; $\nabla p_0 = -\rho_0 \vec{g}$; $\beta = -(1/\rho_0)(\partial\rho/\partial T)$ – коэффициент термического расширения; ν и a – кинематическая

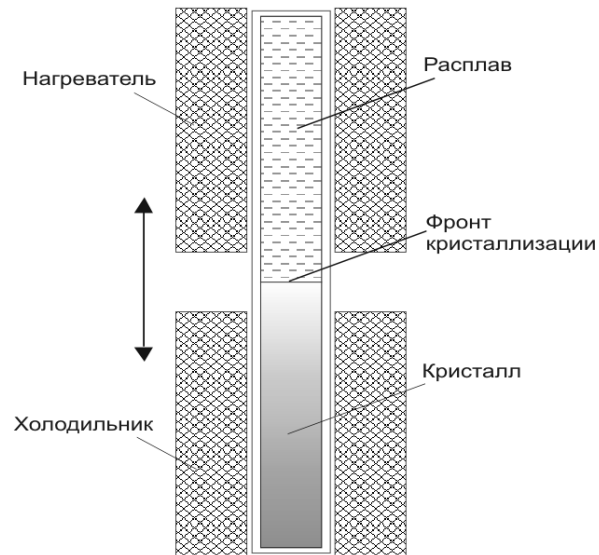


Рис. 1. Схематическое изображение установки кристаллизации по методу Бриджмена

вязкость и теплопроводность расплава соответственно.

Введем цилиндрическую систему координат (r, z, φ) , ось z которой направим вдоль оси ампулы, а начало поместим на фронте кристаллизации (рис. 2). Будем считать, что задача обладает осевой симметрией ($\partial/\partial\varphi = 0$), а для скорости на границе полости заданы условия “прилипания”. С учетом сказанного граничные условия примут вид

$$\vec{v}|_{z=0} = \vec{v}|_{z=L_0} = \vec{v}|_{r=R_0} = v_r|_{r=0} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial r}|_{r=0} = 0, \quad (4)$$

$$T|_{z=0} = T_c, \quad T|_{z=L_0} = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=0} = 0, \quad (5)$$

где R_0 и L_0 – радиус ампулы и длина области, заполненной расплавом, соответственно (см. рис. 2). Вид граничного условия для температуры на боковой поверхности ампулы будет определяться из требования минимального, с учетом конструктивных особенностей установки Бриджмена, воздействия конвекции в расплаве на фронт кристаллизации.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ГРАССГОФА

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть на боковой поверхности ампулы задан некоторый поток тепла:

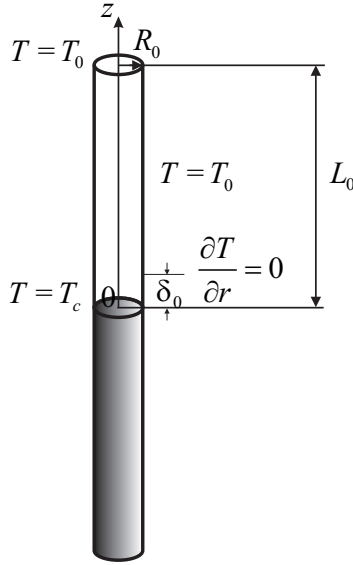


Рис. 2. Схематическое изображение цилиндрической ампулы с веществом

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_0} = G_0,$$

а числа Грассгофа велики:

$$Gr \gg 1.$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$r \rightarrow \frac{r}{R_0}, \quad z \rightarrow \frac{z}{R_0}, \quad \vec{v} \rightarrow \frac{\vec{v}R_0}{\nu}, \quad t \rightarrow \frac{t\nu}{R_0^2}$$

и введем для полученных выражений функцию тока ψ :

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (6)$$

Получим систему нелинейных уравнений

$$\{\psi, \omega\} = Gr \frac{\partial \theta}{\partial r} + r \Delta_3 \omega, \quad (7)$$

$$\text{Pr}\{\psi, \theta\} = r \Delta_1 \theta, \quad (8)$$

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{r=0} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=1} = G, \quad \theta|_{z=0} = 0, \quad \theta|_{z=1} = 1, \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$\{f, g\} = (\partial f / \partial r)(\partial g / \partial z) - (\partial f / \partial z)(\partial g / \partial r),$$

$$\omega = \frac{1}{r^2} \Delta_{-1} \psi,$$

$$\Delta_k = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\text{Pr} = \nu / a$$

$$Gr = [gR^3 \beta(T_0 - T_c)] / \nu^2,$$

$$L = L_0 / R_0$$

$$\theta = (T - T_c) / (T_0 - T_c),$$

$$G = (G_0 R_0) / (T_0 - T_c).$$

Введем малый параметр $\varepsilon = 1 / \sqrt[4]{Gr} \ll 1$ и представим переменные ψ и θ в виде разложения по ε :

$$\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \psi_i, \quad \theta = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \theta_i. \quad (11)$$

Подставим (11) в (7) - (10) и приравняем члены при одинаковых степенях ε . Для нулевого приближения получим

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial r} = 0, \quad (12)$$

$$\text{Pr}\{\psi_0, \theta_0\} = r \Delta_1 \theta_0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \right|_{r=1} = \left. \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad \theta_0|_{z=0} = 0, \quad \theta_0|_{z=1} = 1. \quad (14)$$

Из (12) следует, что $\theta_0 = \theta_0(z)$. С учетом этого обстоятельства из уравнения (13) получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = \frac{d^2 \theta_0 / dz^2}{d\theta_0 / dz} = C(z).$$

Из граничных условий следует, что $(\partial \psi_0 / \partial r)|_{r=1} = 0$. Поэтому $C(z) = 0$, т. е.

$$v_{z0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = 0.$$

Последнее равенство означает, что $\psi_0 = \psi_0(z)$. Но, поскольку $v_{r0} = -(1/r)(\partial \psi_0 / \partial z)$ и $(\partial \psi_0 / \partial z)|_{r=1} = 0$, то

$$v_{r0} \equiv 0.$$

Используя этот результат, из уравнения (13) и граничных условий (14) находим

$$\theta_0 = z/L.$$

Таким образом, в нулевом приближении решение задачи (7) - (10) имеет вид

$$v_{z0} = v_{r0} = 0, \quad \theta_0 = z/L.$$

Рассматривая все последующие приближения, аналогичным образом можно показать, что

$$v_{zi} = v_{ri} = 0, \quad \theta_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

Т. е. решение задачи (7) - (10) внутри области расплава имеет вид

$$\vec{v} = 0, \quad \theta = z/L. \quad (15)$$

Выражения (15) соответствуют состоянию устойчивого механического равновесия расплава. Легко видеть, однако, что такое решение нарушается вблизи боковой поверхности полости ($r = 1$), где радиальный градиент температуры G отличен от нуля. Это означает, что там будет возникать пограничный слой, в котором будет происходить конвективное движение.

Для получения решения в пограничном слое введем переменную

$$\xi = \frac{1-r}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Решение в пограничном слое будем искать в виде

$$\theta(z, \xi) = \frac{z}{L} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i+1} \Theta_i(z, \xi), \quad (17)$$

$$\psi(z, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i(z, \xi).$$

Перейдем в уравнениях (7), (8) к новой переменной, подставим в них выражения (17) и приравняем члены при одинаковых степенях ε . В нулевом приближении получим:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} = -\alpha V_0, \quad (18)$$

$$\eta_0 = \frac{\partial^3 V_0}{\partial \xi^3}, \quad (19)$$

где обозначено $\eta_0 = \partial \Theta_0 / \partial \xi$, $V_0 = \partial \Pi_0 / \partial \xi$, $\alpha = \text{Pr} L^{-1}$. Граничные условия при этом запишутся в виде

$$V_0|_{\xi=0} = 0, \quad \eta_0|_{\xi=0} = G. \quad (20)$$

Кроме того, потребуем выполнения соотношений “сшивки” с решением внутри области

$$\eta_0|_{\xi \rightarrow \infty} = V_0|_{\xi \rightarrow \infty} = 0. \quad (21)$$

Легко убедиться, что соотношениям (18) - (21) удовлетворяют функции

$$V_0(\xi, z) = \frac{Ge^{-\beta\xi} \sin(\beta\xi)}{2\beta^3}, \quad (22)$$

$$\eta_0(\xi, z) = \sqrt{G}e^{-\beta\xi} \sin\left(\beta\xi + \frac{\pi}{4}\right), \quad (23)$$

где $\beta = \sqrt[4]{\alpha/4}$.

Таким образом, при достаточно больших числах Грассгофа конвективный теплоперенос в расплаве описывается выражениями (22), (23). При этом, как легко видеть из (22), величина скорости расплава в пограничном слое пропорциональна величине теплового потока через боковую поверхность. Это означает, что вблизи теплоизолированных участков боковой поверхности конвективное движение расплава отсутствует.

Данное обстоятельство указывает на способ, позволяющий уменьшить влияние конвекции на фазовую границу. Действительно, теплоизолировав часть боковой поверхности между фронтом кристаллизации и нагревателем:

$$G = 0, \quad 0 \leq z \leq \delta,$$

(здесь $\delta_0 = R_0\delta$ – расстояние от фронта кристаллизации до нагревателя) можно ожидать, что при достаточно больших числах Грассгофа макроскопического движения расплава в непосредственной близости от фронта кристаллизации, в соответствии с выражением (22), не будет. Учитывая при этом, что внутри нагревателя температура стенки ампулы равна температуре нагревателя, мы получим следующий вид граничного условия на боковой поверхности:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=1} = 0, \quad 0 \leq z \leq \delta, \quad \theta|_{r=1} = 1, \quad \delta < z \leq L,$$

позволяющий при больших числах Грассгофа создать вблизи фронта кристаллизации ($0 \leq z \leq \delta$) зону равновесной жидкости.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Численное моделирование конвективного теплопереноса в расплаве проводилось методом коне-

чных разностей для полной системы нестационарных уравнений Навье - Стокса в переменных функция тока - “вихрь” [4]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \{ \psi, \omega \} = \frac{Gr}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \Delta_3 \omega, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \{ \psi, \theta \} = \frac{1}{Pr} \Delta_1 \theta, \quad (25)$$

$$\omega = \frac{1}{r^2} \Delta_{-1} \psi, \quad (26)$$

с граничными и начальными условиями

$$r = 0 : \quad \omega = \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0,$$

$$r = 1 : \quad \omega = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, 0 \leq z \leq \delta, \quad \theta = 1, \delta < z \leq L,$$

$$z = 0 : \quad \omega = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \theta = 0,$$

$$z = L : \quad \omega = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \theta = 1,$$

$$\psi|_{t=0} = \omega|_{t=0} \equiv 0, \theta|_{t=0} \equiv 1, \quad (28)$$

где $t \rightarrow (tv)/R_0^2$ – безразмерное время. Стационарное решение системы (24) – (28) находилось методом установления [5, 6].

Расчеты проводились для $Pr = 1, L = 5$ на равномерной прямоугольной сетке

$$w = \{ r_k = hk, h = \frac{1}{M}, k = 0 \dots M;$$

$$z_p = pl, l = \frac{L}{N}, p = 0 \dots N;$$

$$t_n = n\tau, \tau = \frac{\tau_0}{S}, n = 0 \dots S \},$$

где (r_k, z_p, t_n) – узлы сетки; τ_0 – время установления стационарного режима; h, l и τ – шаги по координатам r, z и t соответственно; $M = 40 \dots 80$; $N = 100 \dots 120$. Применялась неявная продольно-поперечная схема [6]. Разностные уравнения на каждом временном слое решались методом прогонки. В качестве критерия установления стационарного режима использовалось условие

$$\max |\Delta \omega_{p,k}^S, \Delta \psi_{p,k}^S, \Delta \theta_{p,k}^S| < \varepsilon_\tau \tau,$$

где $\Delta f_{p,k}^S = |f_{p,k}^S - f_{p,k}^{S-1}|$, $\varepsilon_\tau = O(h^2 + l^2 + \tau^2)$, означающее равенство, с точностью до погрешности аппроксимации, нулю производных по времени от величин $\omega_{p,k}^S, \psi_{p,k}^S, \theta_{p,k}^S$.

На рис. 3 показаны результаты расчетов для $\delta = 0.5$ и разных значений Gr . При $Gr = 10^2$ радиальный градиент температуры присутствует во всем объеме, и возникающее вследствие этого конвективное течение захватывает прифронтовую зону расплава. То есть в этом случае конвективное течение может существенно воздействовать на процессы на фронте кристаллизации. С увеличением числа Грассгофа зависимость температуры от радиальной координаты в объеме расплава становится слабее, и при $Gr = 10^6$ радиальный градиент температуры существует только в пограничном слое вблизи стенки ампулы. Область локализации конвективного движения при этом также уменьшается, “прижимаясь” к боковой поверхности вблизи точки $z = \delta$.

Поскольку при достаточно больших числах Грассгофа течение локализуется вблизи точки $z = \delta$, то, увеличивая δ , можно сместить область локализации такого течения вверх. На рис. 4 и 5 показаны распределения температуры и линии тока конвективных течений для $\delta = 1$ и $\delta = 1.5$, откуда хорошо видно, что увеличение δ приводит к возникновению вблизи фронта кристаллизации зоны, в которой конвективное движение отсутствует.

В качестве интегральной характеристики интенсивности конвективного течения можно использовать величину

$$K(Gr) = \int_0^1 \int_0^\Delta v^2(r, z, Gr) dz dr,$$

пропорциональную кинетической энергии расплава, заполняющего область $0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq \Delta$. На рис. 5 приведена зависимость величины $k = Ln [K(10^6)/K(10^2)]$ от Δ для различных значений δ . Как видно из рисунка, с увеличением числа Грассгофа интенсивность конвективного течения во всем объеме возрастает, однако за счет смещения области локализации вихря вверх при увеличении δ вблизи фронта кристаллизации увеличение числа Грассгофа приводит к уменьшению последней.

ВЫВОДЫ

Рассмотрена задача о стационарном конвективном теплопереносе в расплаве вещества при кристаллизации по методу Бриджмена. Аналитически, а также с помощью численных расчетов,

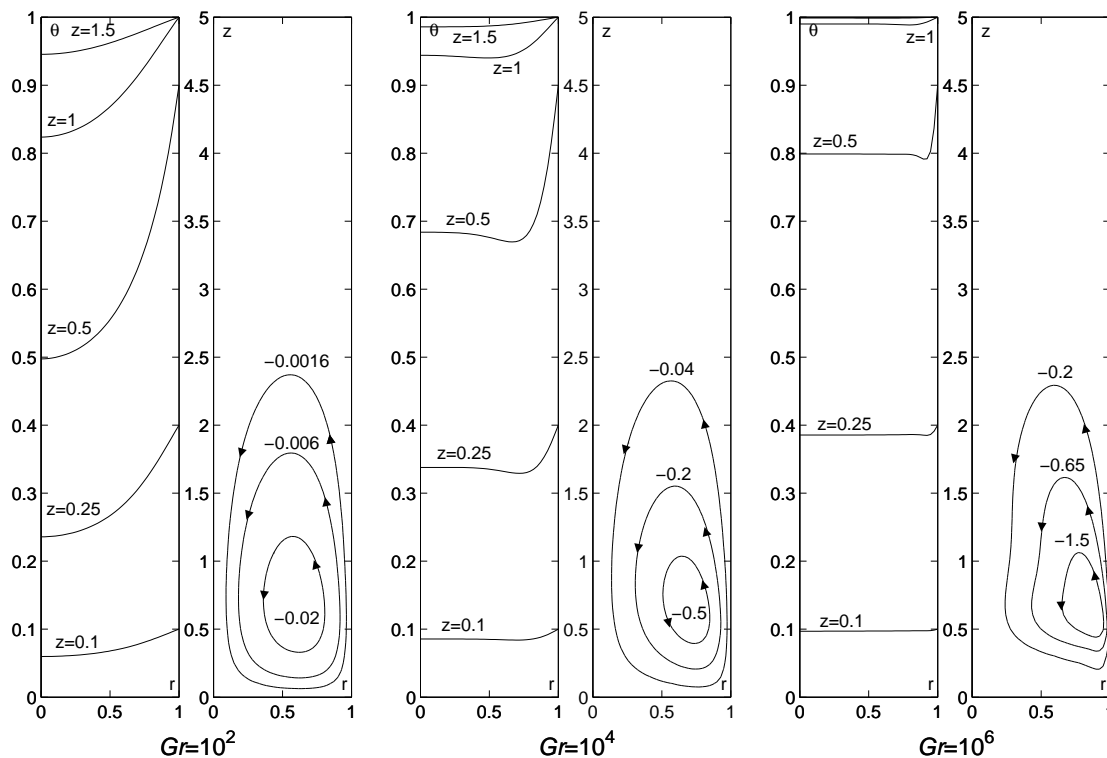


Рис. 3. Распределение температуры и линии тока конвективного течения при $\delta = 0.5$

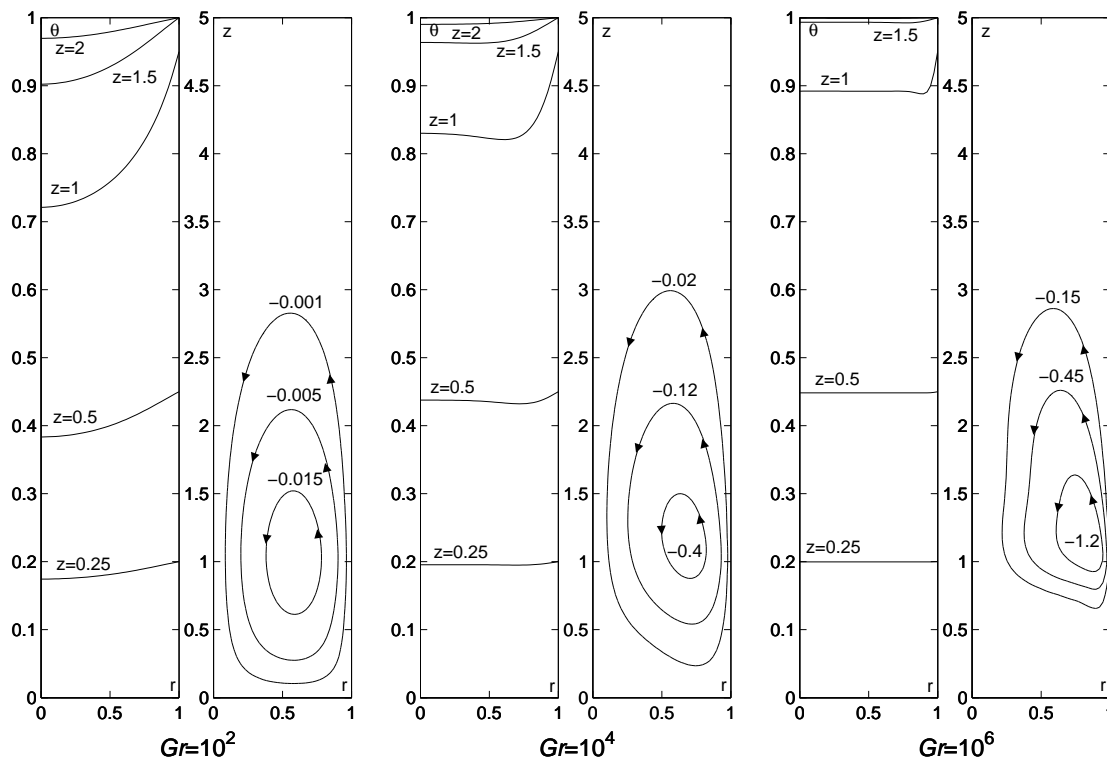


Рис. 4. Распределение температуры и линии тока конвективного течения при $\delta = 1$

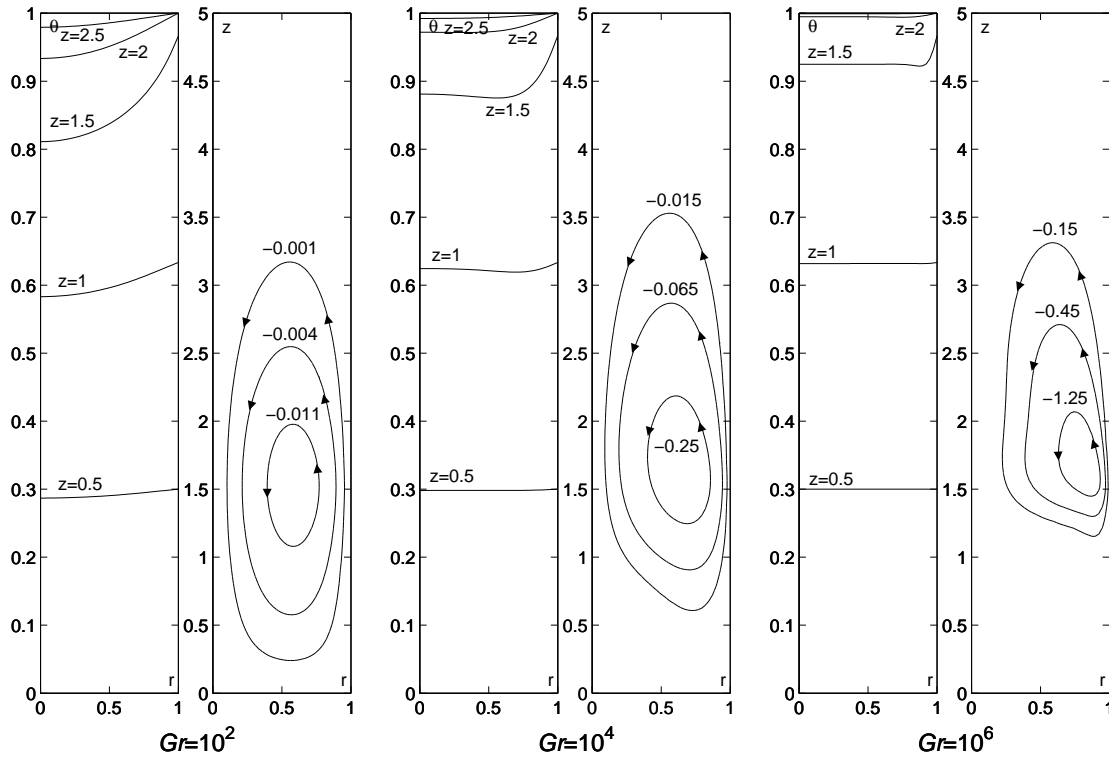


Рис. 5. Распределение температуры и линии тока конвективного течения при $\delta = 1.5$

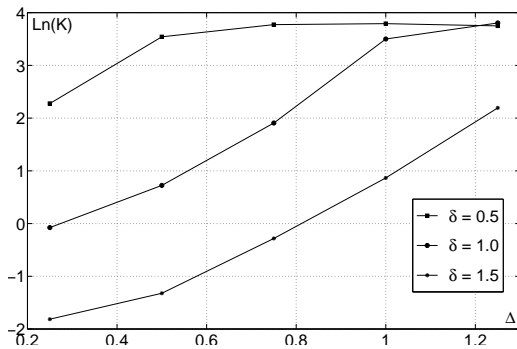


Рис. 6. Зависимость отношения средних кинетических энергий расплава при $Gr = 10^6$ и $Gr = 10^2$ от величины Δ

показано, что при больших числах Грассгофа ($\sim 10^6$) конвективное движение отсутствует во всем объеме расплава за исключением пограничного слоя вблизи боковой поверхности ампулы, где, в силу граничных условий, радиальный градиент температуры не обращается в ноль. Указан вид граничных условий для температуры, позволяющих при достаточно больших числах Грассгофа создать вблизи фронта кристаллизации зону равновесной жидкости, в которой конвективное

движение отсутствует. Показано, что при средних числах Грассгофа ($\sim 10^3$) такой зоны создать нельзя, так как конвекция захватывает объем расплава до фронта кристаллизации.

1. Шпак А.П., Федоров О.П., Берсудский Е.И., Живолуб Е.Л. Некоторые проблемы исследования процессов направленного затвердевания в условиях микрогравитации (создание установки МОР-ФОС) // Космічна наука і технологія.– 2002.– №5/6.– С. 19-27.
2. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Гидродинамика.– М.: Наука, 1987.– 735 с.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.– М.: Наука, 1972.– 392 с.
4. Долгих Г.А., Феоньчев А.И. Численное исследование процессов тепло- и массообмена при направленной кристаллизации в условиях невесомости // Проблемы механики и теплообмена в космической технике.– М.: Машиностроение, 1982.– 24-32 с.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем.– М.: Наука, 1977.– 285 с.
6. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена.– М.: Наука, 1984.– 401 с.
7. Mamou M., Vasseur P., Bilgen E. Analytical and numerical study of double diffusive convection in a vertical enclosure // Heat and mass transfer.– 1996.– 26.– P. 115-125.